# TEOREMA DE BÉZOUT EN PLANOS PROYECTIVOS PONDERADOS

JORGE ORTIGAS GALINDO

Índice

1. Introducción 2
2. Conjuntos algebraicos afines 2
3. Variedades afines 4
3.1. Anillos Coordenados 5
3.2. Aplicaciones Polinómicas 5
3.3. Cambios de Coordenadas 5
3.4. Funciones racionales y anillos locales 5
3.5. Propiedades locales de curvas planas: Multiplicidad de un punto en una curva. 6
3.6. Propiedades locales de curvas planas: Multiplicidad de intersección de dos curvas. 8
4. Variedades analíticas 9
5. Planos proyectivos 10
6. Curvas algebraicas planas 11
7. Recordatorio: Homogeneización y deshomogeneización 12
8. Multiplicidad de la intersección y teorema de Bézout para curvas proyectivas planas 13
9. Espacios recubridores 13
9.1. Definición y primeros ejemplos 14
9.2. Elevación de caminos a un espacio recubridor 15
9.3. Grupo fundamental de un espacio recubridor 15
9.4. Elevación de aplicaciones arbitrarias a un espacio recubridor 15
9.5. Homomorfismos y automorfismos de espacios recubridores 16
9.6. La acción del grupo $\pi(X, x)$ sobre el conjunto $p^{-1}(x)$ 17
9.7. Espacios recubridores regulares y espacios cociente 18
10. Series Formales 18
11. Divisores en variedades lisas 22
12. Singularidades cociente 23
13. Graduaciones de Anillos 24
14. Polinomios cuasihomogéneos 25
15. Espacios Proyectivos Ponderados 26
16. Curvas en Planos Proyectivos Ponderados 28
17. Ejemplos 35
Referencias 40

## 1. Introducción

En este trabajo nos vamos a centrar en el estudio de variedades con singularidades cociente y en particular de espacios proyectivos ponderados. Nuestro principal objetivo es estudiar propiedades de curvas en planos proyectivos ponderados, extender el concepto que tenemos de multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto a este ámbito, y hallar un teorema semejante al de Bézout en planos proyectivos.

Para ponernos en situación, recordaremos nociones básicas de variedades afines, analíticas, anillos de series formales, cubiertas,..., e introduciremos conceptos necesarios como los de divisores, espacios con singularidades cociente y espacios proyectivos ponderados.

El objetivo del estudio de variedades con singularidades cociente reside en el interés de construir resoluciones de singularidades utilizando en lugar de únicamente variedades lisas, este otro tipo de variedades. El hecho de construir resoluciones usando variedades con singularidades cociente simplifica en muchos casos los problemas y es de utilidad estudiar si podemos codificar toda la información de la singularidad con este tipo de resoluciones.

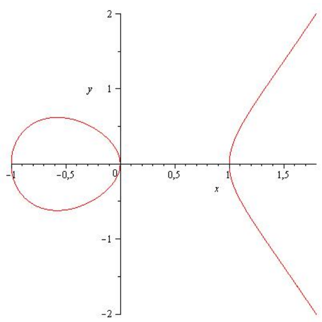
## 2. Conjuntos algebraicos afines

Sea $K$ un cuerpo cualquiera. Con $\mathbb{A}^n(K)$, o simplemente $\mathbb{A}^n$ (si $K$ se sobreentiende), nos referiremos al producto cartesiano de $K$ por sí mismo $n$ veces; $\mathbb{A}^n$ es el conjunto de $n$-tuplas de elementos de $K$. Llamaremos a $\mathbb{A}^n(K)$, espacio afín sobre $K$ de dimensión $n$. Sus elementos se llaman *puntos*. En particular $\mathbb{A}^1$ es la recta afín y $\mathbb{A}^2$ es el plano afín.

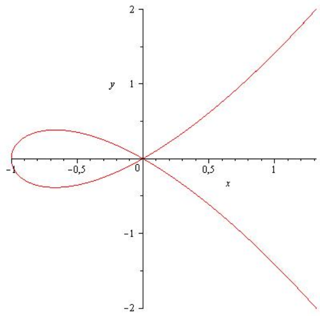
Si $F \in K[X_1, \dots, X_n]$, un punto $P = (a_1, \dots, a_n)$ en $\mathbb{A}^n(K)$ se dice que es un *cero* de $F$ si $F(P) = 0$. Si $F$ es no constante, el conjunto de ceros de $F$ se llama *hipersuperficie* definida por $F$, y se denota $V(F)$.Una hipersuperficie en $\mathbb{A}^2$ se llama *curva algebraica plana*.

**Ejemplo 2.1.**

a $V(Y^2 - X^2(X+1)) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.




b $V(Y^2 - X(X^2-1)) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.




Más en general, si $S$ es un conjunto cualquiera de polinomios en $K[X_1, \dots, X_n]$, denotamos

$$V(S) = \{P \in \mathbb{A}^n | F(P) = 0 \ \forall F \in S\}$$

o también $V(S) = \cap_{F \in S} V(F)$. Si $S = \{F_1, \dots, F_r\}$, normalmente escribiremos $V(F_1, \dots, F_r)$ en lugar de $V(\{F_1, \dots, F_r\})$. Un subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ es un *conjunto algebraico afín*, o simplemente un *conjunto algebraico*, si $X = V(S)$ para algún $S$.

Las siguientes propiedades son fáciles de verificar.

1. Si $I$ es un ideal en $K[X_1, \dots, X_n]$ generado por $S$, entonces $V(S) = V(I)$; por tanto todo conjunto algebraico es igual a $V(I)$ para un cierto ideal.
2. Si $\{I_\alpha\}$ es una colección de ideales, entonces $V(\cup_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha V(I_\alpha)$; así pues la intersección de cualquier colección de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.
3. Si $I \subset J$ entonces $V(I) \supset V(J)$.
4. $V(FG) = V(F) \cup V(G)$ para cualesquiera polinomios $F, G$; $V(I) \cup V(J) = V(\{FG | \ F \in I, G \in J\})$; por tanto la unión de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.
5. $V(0) = \mathbb{A}^n(K)$; $V(1) = \emptyset$; $V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ para $a_i \in K$. Por tanto cualquier subconjunto finito de $\mathbb{A}^n(K)$ es un conjunto algebraico.

Para cualquier subconjunto $X \in \mathbb{A}^n(K)$, consideramos los polinomios que se hacen 0 en $X$, éstos forman un ideal en $K[X_1, \dots, X_n]$, llamado el *ideal* de $X$, escrito $I(X)$.

$$I(X) = \{F \in K[X_1, \dots, X_n] | F(a_1, \dots, a_n) = 0 \ \forall (a_1, \dots, a_n) \in X\}$$

Veamos algunas propiedades que muestran las relaciones entre ideales y conjuntos algebraicos.

1. Si $X \subset Y$, entonces $I(X) \supset I(Y)$.
2. $I(\emptyset) = K[X_1, \dots, X_n]$; $I(\mathbb{A}^n(K)) = (0)$ si $K$ es un cuerpo infinito; $I(\{(a_1, \dots, a_n)\})) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ para $a_i \in K$.
3. $I(V(S)) \supset S$ para cualquier conjunto $S$ de polinomios; $V(I(X)) \supset X$ para cualquier conjunto $X$ de puntos.
4. $V(I(V(S))) = V(S)$ para cualquier conjunto $S$ de polinomios; $I(V(I(X))) = I(X)$ para cualquier conjunto $X$ de puntos. Así si $V$ es un conjunto algebraico,$V = V(I(V))$, y si $I$ es un ideal de un conjunto algebraico $I = I(V(I))$.

   Si un ideal es ideal de un conjunto algebraico tiene una propiedad no compartida por todos los ideales: si $I = I(X)$, y $F^n \in I$ para algún entero $n > 0$, entonces $F \in I$. Si $I$ es un ideal en un anillo $R$, definimos el *radical* de $I$, escrito $\text{Rad}(I)$, como $\{a \in R | a^n \in I$ para algún entero $n > 0\}$. Entonces $\text{Rad}(I)$ es un ideal que contiene a $I$. Un ideal se dice *radical* si $\text{Rad}(I) = I$. Así pues tenemos
5. $I(X)$ es ideal radical para cualquier $X \in \mathbb{A}^n(K)$.

**Teorema 2.2.** *Todo conjunto algebraico es la intersección de un numero finito de hipersuperficies.*

**Definición 2.3.** Diremos que un anillo es *Nötheriano* si todo ideal en el anillo es finitamente generado.

El teorema anterior es pues consecuencia del teorema de la base de Hilbert.

**Teorema 2.4.** *Si $R$ es un anillo Nötheriano, entonces $R[X_1, \ldots, X_n]$ es un anillo Nötheriano.*

**Corolario 2.5.** *El anillo $K[X_1, \ldots, X_n]$ es Nötheriano para cualquier cuerpo $K$.*

**Definición 2.6.** Un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{A}^n$ es *reducible* si $V = V_1 \cup V_2$, donde $V_1$, $V_2$ son conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n$, y $V_i \neq V$. De otra forma $V$ es *irreducible*.

**Proposición 2.7.** *Un conjunto algebraico $V$ es irreducible si y solo si $I(V)$ es primo.*

**Teorema 2.8.** *Sea $V$ un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n(K)$. Existen únicos conjuntos algebraicos $V_1, \ldots, V_m$ tal que*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

*con $V_i \neq V_j$ para todo $i \neq j$.*

**Teorema 2.9** (Teorema de los ceros de Hilbert)**.** *Sea $I$ un ideal en $K[X_1, \ldots, X_n]$ ($K$ algebraicamente cerrado). Entonces $I(V(I)) = \mathrm{Rad}(I)$.*

**Corolario 2.10.** *Si $I$ es un ideal radical en $K[X_1, \ldots, X_n]$, entonces $I(V(I)) = I$. Así que hay una correspondencia uno a uno entre ideales radicales y conjuntos algebraicos.*

**Corolario 2.11.** *Si $I$ es un ideal primo, entonces $V(I)$ es irreducible. Hay una correspondencia uno a uno entre ideales primos y conjuntos algebraicos irreducibles. Los ideales maximales corresponden a los puntos.*

**Corolario 2.12.** *Sea $F$ un polinomio no nulo en $K[X_1, \ldots, X_n]$, $f = F_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot F_r^{n_r}$ la descomposición de $F$ en factores irreducibles. Entonces $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ es la descomposición de $V(F)$ en componentes irreducibles, y $I(V(F)) = (F_1 \cdot \cdots \cdot F_r)$. Hay una correspondencia uno a uno entre polinomios irreducibles $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ (salvo multiplicación por un elemento no nulo de $K$) e hipersuperficies en $\mathbb{A}^n(K)$.*

**Corolario 2.13.** *Sea $I$ un ideal en $K[X_1, \ldots, X_n]$. Entonces $V(I)$ es un conjunto finito de puntos si y sólo si $K[X_1, \ldots, X_n]/I$ es un espacio vectorial finito dimensional sobre $K$. Si esto ocurre, el número de puntos en $V(I)$ es a lo sumo $\dim_K(K[X_1, \ldots, X_n]/I)$.*

## 3. Variedades afines

En esta sección trabajaremos con conjuntos algebraicos afines en $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ para algún $n$. Un conjunto algebraico afín irreducible se dice *variedad afín*. En este capítulo sólo hablaremos de variedades afines, por tanto, las llamaremos simplemente variedades.

**3.1. Anillos Coordenados.** Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad no vacía. Entonces $I(V)$ es un ideal primo en $K[X_1, \ldots, X_n]$, así que $K[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ es un dominio. Denotemos por $\Gamma(V) = K[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$, y le llamaremos *anillo coordenado* de $V$.

Para cualquier conjunto no vacío $V$, denotamos por $\mathcal{F}(V, K)$ al conjunto de las funciones de $V$ a $K$. El conjunto $\mathcal{F}(V, K)$ es un anillo: si $f$, $g \in \mathcal{F}(V, K)$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in V$. Es usual identificar $K$ con el subanillo de $\mathcal{F}(V, K)$ consistente en todas las funciones constantes.

Si $V \subset \mathbb{A}^n$ es una variedad, una función $f \in \mathcal{F}(V, K)$ se dice *polinomial* si hay un polinomio $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) = F(a_1, \ldots, a_n)$ para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in V$. Las funciones polinómicas forman un subanillo de $\mathcal{F}(V, K)$ que contiene a $K$. Dos polinomios $F$, $G$ determinan la misma función si y sólo si $(F - G)(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in V$, i.e., $F - G \in I(V)$. Podemos identificar $\Gamma(V)$ con el subanillo de $f \in \mathcal{F}(V, K)$ consistente en todas las funciones polinómicas sobre $V$. Tenemos dos importantes formas de ver un elemento de $\Gamma(V)$, como una función sobre $V$ o como una clase de equivalencia de polinomios.

**3.2. Aplicaciones Polinómicas.** Sean $V \in \mathbb{A}^n$, $W \in \mathbb{A}^m$ variedades. Una aplicación $\varphi : V \to W$ se dice *polinomial* si hay polinomios $T_1, \ldots, T_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = (T_1\varphi(a_1, \ldots, a_n), \ldots, T_n\varphi(a_1, \ldots, a_n))$ para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in V$.

Cualquier aplicación $\varphi : V \to W$ induce un homomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}(W, K) \to \mathcal{F}(V, K)$ tomando como $\tilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$. Si $\varphi$ es una aplicación polinómica entonces $\tilde{\varphi}(\Gamma(W)) \subset \Gamma(V)$, así pues $\tilde{\varphi}$ se restringe a un homomorfismo (también denotado $\tilde{\varphi}$) de $\Gamma(W)$ en $\Gamma(V)$.

Si $V = \mathbb{A}^n$, $W = \mathbb{A}^m$, y $T_1, \ldots, T_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ determinan una aplicación polinómica $T : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, los $T_i$ están determinados de manera única por $T$.

**Proposición 3.1.** *Sea $V \in \mathbb{A}^n$, $W \in \mathbb{A}^m$ variedades afines. Existe una correspondencia natural inyectiva entre las aplicaciones polinómicas $\varphi : V \to W$ y los homomorfismos $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}(W, K) \to \mathcal{F}(V, K)$. Cualquier tal $\varphi$ es la restricción de una aplicación polinómica de $\mathbb{A}^n$ en $\mathbb{A}^m$.*

Una aplicación polinómica $\varphi : V \to W$ es un *isomorfismo* si existe una aplicación polinómica $\psi : W \to V$ tal que $\psi \circ \varphi = 1_V$, $\varphi \circ \psi = 1_W$. La proposición anterior muestra que dos variedades son isomorfas si y sólo si sus anillos coordenados son isomorfos (sobre $K$).

**3.3. Cambios de Coordenadas.** Si $T = (T_1, \ldots, T_m)$ es una aplicación polinómica de $\mathbb{A}^n$ en $\mathbb{A}^m$, y $F$ es un polinomio en $K[X_1, \ldots, X_m]$, denotamos $F^T = \tilde{T}(F) = F(T_1, \ldots, T_m)$. Para ideales $I$ y conjuntos $V$ en $\mathbb{A}^m$, $I^T$ denota el ideal en $K[X_1, \ldots, X_n]$ generado por $\{F^T | F \in I\}$ y $V^T = \{T^{-1}(V) = V(I^T) | I = I(V)\}$. Si $V$ es una hipersuperficie de $F$, $V^T$ es la hipersuperficie de $F^T$ (si $F^T$ no es constante).

Un *cambio de coordenadas afín* en $\mathbb{A}^n$ es una aplicación polinómica $T = (T_1, \ldots, T_n) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ tal que cada $T_i$ es un polinomio de grado 1, y tal que $T$ es inyectiva y suprayectiva.

**3.4. Funciones racionales y anillos locales.** Sea $V$ una variedad no vacía de $\mathbb{A}^n$, $\Gamma(V)$ su anillo coordenado. Como $\Gamma(V)$ es un dominio, podemos formar su cuerpo cociente. Este cuerpo se denomina *cuerpo de las funciones racionales sobre* $V$, y se denota $K(V)$. Un elemento de $K(V)$ es una *función racional sobre* $V$.

Si $f$ es una función racional sobre $V$, y $P \in V$, decimos que $f$ está *definida* en $P$ si para algunos $a, b \in \Gamma(V)$, $f = \frac{a}{b}$, y $b(P) \neq 0$. Notar que hay múltiples formas de escribir $f$ como cociente de funciones polinómicas; $f$ está definida en $P$ si es posible encontrar un "denominador" para $f$ que no se anule en $P$. Si $\Gamma(V)$ es un DFU, sin embargo, existe esencialmente una única representación $f = \frac{a}{b}$, donde $a$ y $b$ no tienen factores comunes, y $f$ está definida en $P$ si y sólo si $b(P) \neq 0$.

Sea $P \in V$. Definimos $O_P(V)$ el anillo de las funciones racionales sobre $V$ que están definidas en $P$. Es fácil comprobar que $O_P(V)$ es un subanillo de $K(V)$ que contiene a $\Gamma(V)$: $K \subset \Gamma(V) \subset O_P(V) \subset K(V)$. El anillo $O_P(V)$ se llama *anillo local de $V$ en $P$*. El conjunto de puntos $P \in V$ donde una función $f$ no está definida se llama *el conjunto de polos de $f$*.

**Proposición 3.2.**

1. *El conjunto de polos de una función racional es un subconjunto algebraico de $V$.*
2. $\Gamma(V) = \cap_{P \in V} = O_P(V)$.

Sea $f \in O_P(V)$. Podemos definir el *valor de $f$ en $P$*, escrito $f(P)$, como sigue: si $f = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \Gamma(V)$ y $b(P) \neq 0$, $f(P) = \frac{a(P)}{b(P)}$ (se puede comprobar que es independiente de la elección de $a$ y $b$). El ideal $\mathfrak{m}_P = \{f \in= O_P(V) | f(P) = 0\}$ se llama *ideal maximal de $f$ en $P$*. Es el núcleo del homomorfismo evaluación $f \to f(P)$ de $O_P(V)$ sobre $K$, así pues $O_P(V)/\mathfrak{m}_P(V)$ es isomorfo a $K$. Un elemento $f \in O_P(V)$ es una unidad de $O_P(V)$ si y sólo si $f(P) \neq 0$, por tanto tenemos que $\mathfrak{m}_P(V) = \{$ no-unidades de $O_P(V)\}$.

**Lema 3.3.** *Las siguientes condiciones sobre un anillo $R$ son equivalentes:*

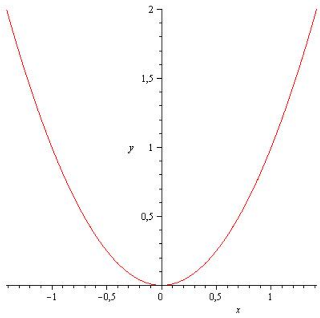
1. *El conjunto de las no-unidades de $R$ forma un ideal.*
2. *El anillo $R$ tiene un único ideal maximal que contiene a todos los ideales propios de $R$.*

Un anillo que satisface las condiciones del lema anterior se llama *anillo local*; las unidades son aquellos elementos que no pertenecen al ideal maximal. Hemos visto que $O_P(V)$ es un anillo local, y $\mathfrak{m}_P(V)$ su único ideal maximal. Estos anillos locales juegan un importante rol en el estudio moderno de las variedades algebraicas. Todas las propiedades de $V$ que dependen sólamente de un "entorno" del punto $P$ (las propiedades "locales") quedan reflejadas en el anillo $O_P(V)$.

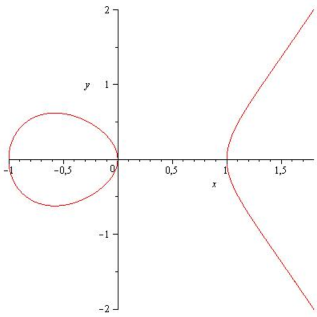
**3.5. Propiedades locales de curvas planas: Multiplicidad de un punto en una curva.** Sea $F$ una curva plana de grado $n$, $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2$. Queremos definir la *multiplicidad del punto $P$ en $F$*. lo denotaremos $m_P(F)$. Descomponemos $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$ como producto de polinomios homogéneos $F_i \in K[X,Y]$ de grado $i$. Definimos la *multiplicidad del punto $P$ en la curva $F$* de la siguiente manera, $m = m_P(F)$. Notar que $P \in F$ si y sólo si $m_P(F) > 0$. Usando las reglas de derivación, es fácil comprobar que $P$ es un punto simple de $F$ si y sólo si $m_P(F) = 1$, y en este caso $F_1$ es la recta tangente a $F$ en $P$. Si $m_P(F) = 2$ el punto se llamará *doble*; si $m_P(F))3$, triple, etc. Puesto que $F_m$ es un polinomio homogéneo en 2 variables, podemos escribir $F_m = \prod L_i^{r_i}$ donde las $L_i$ son rectas tangentes a $F$ en $P = (0,0)$. La recta $L_i$ es una tangente simple (resp doble, triple...) si $r_i = 1$ (resp. $2, 3, ..$). Si $F$ tiene $m$ tangentes simples distintas en $P$, diremos que $P$ es un *punto múltiple ordinario de $F$*. Un punto doble ordinario se llama *nodo*. Por conveniencia, decimos que una recta que pasa por $P$ es tangente de multiplicidad 0 cuando no es tangente a ésta en $P$.

**Ejemplo 3.4.** La curva $A$ tiene una tangente simple en el origen. La curva $D$ tiene un nodo en $(0,0)$, $E$ tiene un punto triple ordinario, mientras que $C$ y $F$ tienen un punto múltiple no ordinario en el $(0,0)$.

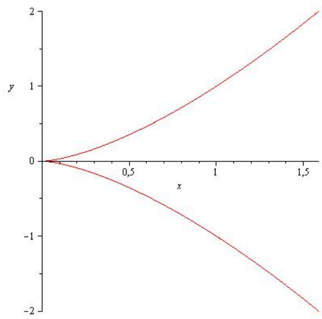
1. $A = Y - X^2$.



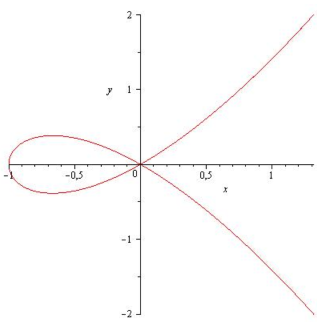

2. $B = Y^2 - X^3 + X$.



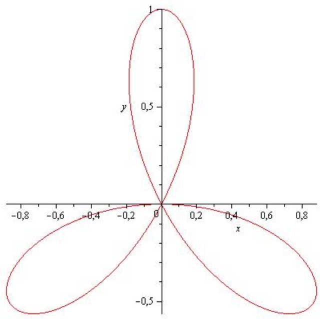

3. $C = Y^2 - X^3$.



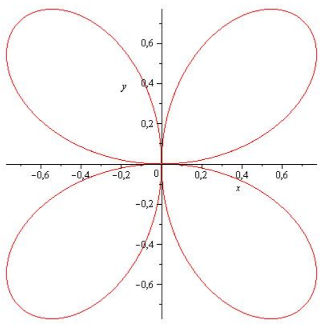

4. $D = Y^2 - X^3 - X^2$.




5. $E = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$.




6. $F = (X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2$




Sea $F = \prod F_i^{e_i}$ la factorización de $F$ en componentes irreducibles. Entonces $m_P(F) = \sum e_i m_P(F_i)$; y si $L$ es tangente a $F_i$ con multiplicidad $r_i$, entonces $L$ es tangente a $F$ con multiplicidad $\sum e_i r_i$.

Para extender estas definiciones a un punto cualquiera $P = (a, b) \neq (0, 0)$, vasta coger $T$ una traslación que lleva el origen al punto $P$, i.e, $T(x, y) = (x + a, y + b)$. Entonces $F^T = F(X + a, Y + b)$. Definimos $m_P(F)$ como $m_{(0,0)}(F^T)$, i.e, consideramos $F^T = G_m + G_{m+1} + \dots$, con $G_i$ homogéneos de grado $i$ y $G_m \neq 0$, y $m = m_P(F)$. Si $G_m = \prod L_i^{r_i}$, $L_i \alpha_i X + \beta_i Y$, las rectas $\alpha_i(X - a) + \beta_i(Y - b)$ son las tangentes de $F$ en $P$.

**3.6. Propiedades locales de curvas planas: Multiplicidad de intersección de dos curvas.** Sean $F$, $G$ curvas planas, $P \in \mathbb{A}^2$. Queremos definir la *multiplicidad de intersección de $F$ y $G$ en $P$*, la denotaremos $\mathrm{mult}_P(F, G)$. Puesto que la definición es bastante intuitiva, veremos primero siete propiedades que nos gustaría que la multiplicidad de intersección verificase. Después veremos que sólo hay una posible definición de ésta y al mismo tiempo nos da un método para su cálculo.

Diremos que $F$ y $G$ se intersecan *propiamente* en $P$ si $F$ y $G$ no tienen componentes comunes que pasen por $P$. Nuestros requisitos son:

1. Queremos que $\mathrm{mult}_P(F, G)$ sea un entero no negativo para cualesquiera $F$ y $G$ que se intersequen propiamente en $P$; a su vez $\mathrm{mult}_P(F, G) = \infty$ si $F$ y $G$ no se intersecan propiamente en $P$.
2. Queremos que $\mathrm{mult}_P(F, G) = 0$ si y sólo si $P \notin F \cap G$. Que $\mathrm{mult}_P(F, G)$ dependa sólo del número de componentes de $F$ y $G$ que pasan por $P$. Y $\mathrm{mult}_P(F, G) = 0$ si $F$ o $G$ fueran constantes no nulas.
3. Si $T$ es un cambio de coordenadas afín en $\mathbb{A}^2$, y $T(Q) = P$, entonces $\mathrm{mult}_P(F, G) = \mathrm{mult}_Q(F^T, G^T)$.

4. Que $\mathrm{mult}_P(F,G) = \mathrm{mult}_P(G,F)$.

   Dos curvas $F$, $G$ se *cortan transversalmente en* $P$ si $P$ es un punto simple de ambas y la recta tangente a $F$ en $P$ es distinta de la recta tangente a $G$ en $P$. Queremos que la multiplicidad de intersección sea uno cuando $F$ y $G$ se corten transversalmente en $P$, más en general lo que nos gustaría es
5. $\mathrm{mult}_P(F,G) \geq m_P(F)m_P(G)$, dándose la igualdad si y sólo si las curvas $F$ y $G$ no tienen rectas tengentes en $P$ en común.
6. La multiplicidad de intersección debería ser aditiva cuando tomamos uniones de curvas: si $F = \prod F_i^{r_i}$ y $G = \prod G_j^{s_j}$, entonces $\mathrm{mult}_P(F,G) = \sum_{i,j} r_i s_j \,\mathrm{mult}_P(F_i, G_j)$.
7. Si $F$ es irreducible, queremos que $\mathrm{mult}_P(F,G)$ dependa sólo de la imagen de $G$ en $\Gamma(F)$, es decir $\mathrm{mult}_P(F,G) = \mathrm{mult}_P(F, G + AF)$ para cualquier $A \in K[X,Y]$.

**Teorema 3.5.** *Existe una única definición de multiplicidad de intersección* $\mathrm{mult}_P(F,G)$ *definida para cualesquiera curvas planas* $F$, $G$, *y todos los puntos* $P \in \mathbb{A}^2$, *que cumpla las propiedades anteriores. Está dada por la fórmula*

$$\mathrm{mult}_P(F,G) = \dim_K \frac{O_P(\mathbb{A}^2)}{(F,G)}.$$

**Notación 3.6.** Sean $\mathcal{C}_1 = V(F)$ y $\mathcal{C}_2 = V(G)$ dos curvas denotaremos $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) := \mathrm{mult}_P(F,G)$.

## 4. Variedades analíticas

**Definición 4.1.** Una *variedad diferenciable de dimensión* $n$ es un espacio topológico $M$ junto con un atlas diferenciable, es decir una familia $\{(V_i, U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i\in I}$ donde

(a) $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $M$.
(b) $\mathbf{x}_i : U_i \to V_i$ es un homeomorfismo, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ abierto.
(c) $\forall i,j \in I$, $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \mathbf{x}_j^{-1}(V_i \cap V_j)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

*Observación* 4.2. Estrictamente hablando, una variedad diferenciable está asociada cuando el atlas es maximal, es decir cualquier aplicación que verifique (b) y (c) es un elemento del atlas. Un atlas (aunque no sea maximal) determina la estructura de variedad diferenciable.

A partir de este concepto se definen los de función y aplicación diferenciables.

**Definición 4.3.** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* si para todos los miembros de un atlas $\{(V_i, U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i\in I}$ se cumple que $f \circ \mathbf{x}_i : U_i \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

**Definición 4.4.** Una aplicación $f : M^m \to N^n$ entre variedades diferenciables es *diferenciable* si $\forall x \in M$ existen $\mathbf{x} : U_x \to V_x \subset M$ e $\mathbf{y} : U_{f(x)} \to V_{f(x)} \subset N$ tales que $f(V_x) \subset V_{f(x)}$ y $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U_x \to U_{f(x)}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Para definir el concepto de variedad analítica (compleja, holomorfa) y de funciones y aplicaciones analíticas debemos realizar los siguientes cambios:

- Reemplazamos $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ en la Definición 4.1(b).
- Reemplazamos $\mathcal{C}^\infty$ por *holomorfo* en la Definición 4.1(c) y en las Definiciones 4.3 y 4.4.

**Propiedades 4.5.** Recordemos algunas definiciones y propiedades de las funciones holomorfas.

($\mathscr{O}$1) Una función $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, es *holomorfa* si es continua y si es holomorfa en cada variable.

($\mathscr{O}$2) Una aplicación $f : U \to V$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ abiertos, es *holomorfa* si cada componente lo es.

($\mathscr{O}$3) Las funciones holomorfas cumplen el principio de prolongación analítica (PPA): si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa, $U$ es conexo, $V$ es abierto, $\emptyset \neq V \subset U$ y $f_{|V} \equiv 0$, entonces, $f \equiv 0$.

($\mathscr{O}$4) Las funciones holomorfas cumplen el principio del módulo máximo (PMM): si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa, $U$ conexo, y $|f|$ alcanza un máximo (relativo) en $x \in U$, entonces $f$ es constante.

($\mathscr{O}$5) Las funciones holomorfas cumplen fórmulas de tipo Cauchy.

**Definición 4.6.** Una variedad analítica compleja de dimensión 1 se llama *superficie de Riemann*.

## 5. Planos proyectivos

El primer ejemplo que nos viene a la cabeza de variedad analítica es obviamente $\mathbb{C}^n$ (tomando como atlas la identidad). En general, si $X$ es una variedad analítica y $V \subset X$ es un abierto, $V$ también es variedad analítica.

El primer ejemplo no trivial es el espacio proyectivo. Si $V$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces:

$$\mathbb{P}(V) := \{L \subset V \text{ subespacio vectorial } \mid \dim L = 1\} = V \setminus \{0\}/\sim, \quad w \sim v \Leftrightarrow w = \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Denotaremos $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$; la clase de equivalencia de $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se denota $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ (coordenadas homogéneas). Dos elementos en coordenadas homogéneas son iguales si estas son proporcionales y no tienen sentido las coordenadas homogéneas nulas.

Como espacios topológicos, consideramos su topología cociente; es fácil ver que $\mathbb{P}^n$ es Hausdorff y la aplicación

$$\psi : \mathbb{S}^{2n+1} := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{j=0}^{n} |x_j|^2 = 1\} \to \mathbb{P}^n,$$

$\psi(x_0, x_1, \dots, x_n) := [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$, demuestra que $\mathbb{P}^n$ es compacto.

Dado $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, denotamos $U_j := \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_j \neq 0\}$. Recordemos que el valor de $x_j$ no está bien definido en coordenadas homogéneas, pero si su nulidad o no. Es inmediato ver que $U_j$ es abierto y que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$.

Consideremos $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in U_j$; como $x_j \neq 0$, tenemos

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = [x_0 x_j^{-1} : x_1 x_j^{-1} \cdots : x_{j-1} x_j^{-1} : 1 : x_{j+1} x_j^{-1} : \cdots : x_n x_j^{-1}],$$

lo que permite establecer una biyección $\varphi_j : \mathbb{C}^n \to U_j$, ya que las restantes coordenadas están determinadas.

Es inmediato comprobar que $U_0 \cap U_1 = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 x_1 \neq 0\}$ y que

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \mid y_1 \neq 0\}.$$

Además:

$$(y_1, \dots, y_n) \xmapsto{\varphi_0} [1 : y_1 : \cdots : y_n] = [y_1^{-1} : 1 : y_2 y_1^{-1} \cdots : y_n y_1^{-1}] \xmapsto{\varphi_1^{-1}} (y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}, \dots, y_n y_1^{-1}).$$

Observamos que el cambio de carta es holomorfo; para los demás cambios de carta se procede análogamente y tenemos que $\mathbb{P}^n$ es una variedad analítica.

## 6. Curvas algebraicas planas

Consideremos un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$. La curva plana afín asociada a $f$ es $C_f := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Apoyados en el teorema de la función implícita, consideramos

$$C_f^* := \left\{ (x, y) \in C_f \;\middle|\; \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0) \right\}.$$

**Proposición 6.1.** *Con las notaciones anteriores, $C_f^*$ es una superficie de Riemann.*

Estudiemos lo que ocurre en $\mathbb{P}^2$. Si $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, dado $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$, la expresión $f(x, y, z)$ no tiene ningún sentido, ya que en general, si $t \in \mathbb{C}^*$, $f(tx, ty, tz) \neq f(x, y, z)$. Hay polinomios que sin cumplir la igualdad están mejor situados para este problema.

**Definición 6.2.** Un polinomio $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es homogéneo de grado $d$ si es suma de monomios de grado $d$.

*Observación* 6.3. Esta definición equivale a pedir que $F(tx_0, tx_1, \ldots, tx_n) = t^d F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. En este caso, aunque sigue sin tener sentido evaluar $F(x, y, z)$ en coordenadas homogéneas, sí que lo tiene considerar si el valor es cero o no.

**Definición 6.4.** Dado $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, polinomio homogéneo, la curva proyectiva asociada a $F$ es $C_F := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$.

**Proposición 6.5** (Identidad de Euler)**.** *Sea un polinomio $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ homogéneo de grado $d$, éste verifica:*

$$\sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = dF.$$

Por analogía con el caso anterior, denotaremos

$$C_F^* := \left\{ [x : y : z] \in C \;\middle|\; \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right) \neq (0, 0, 0) \right\}.$$

**Proposición 6.6.** *Con las notaciones anteriores, $C_F^*$ es una superficie de Riemann.*

*Demostración.* Debemos construir un atlas para $C_F^*$. Vamos a encontrar cartas cuyo dominio contenga cualquier punto y luego veremos que los cambios son analíticos. Sea $p_0 := [x_0 : y_0 : z_0]$; supongamos que $z_0 \neq 0$ y denotemos $a := x_0 z_0^{-1}$ y $b := y_0 z_0^{-1}$.

Denotemos $f(x, y) := F(x, y, 1)$. Veamos que $C_F^* \cap U_z = C_f^*$. Es obvio que $C_F^* \cap U_z = C_f^*$. Además, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, 1)$$

y

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, 1) = d\, f(x, y).$$

Con estos datos deducimos la igualdad $C_F^* \cap U_z = C_f^*$. Utilizando la Proposición 6.1, tenemos dos posibles tipos de cartas:

$$x \mapsto [x : h(x) : 1], \quad y \mapsto [h(y) : y : 1].$$

Una situación análoga se da para $U_x$ y $U_y$. Es fácil ver que los cambios de carta son holomorfos. Si tenemos una carta del tipo $x \mapsto [x : h(x) : 1]$ y otra del tipo $z \mapsto [h(z) : 1 : z]$, obtendremos:

$$x \mapsto [x : h(x) : 1] = [x h(x)^{-1} : 1 : h(x)^{-1}] \mapsto h(x)^{-1}.$$

Las demás funcionan igual. □

*Observación* 6.7. En la demostración hemos visto que una curva proyectiva es unión de tres curvas afines. Una curva afín también determina una curva proyectiva. Sea $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio de grado $d$; la *homogeneización* de este polinomio es el polinomio $F(x,y,z) := z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Observemos que $F(x,y,1) = f(x,y)$. Si $C_f$ es la curva afín asociada a $f$, entonces $C_F$ es la *proyectivización* de $C_f$.

Descompongamos $f(x,y) := \sum_{j=0}^{d} f_j(x,y)$, $f_j$ polinomio homogéneo de grado $j$. Entonces, es fácil ver que $F(x,y,z) = \sum_{j=0}^{d} f_j(x,y) z^{d-j}$.

**Definición 6.8.** Dado $F(x,y,z) \in \mathbb{C}[x,y,z]$ polinomio homogéneo, la curva proyectiva asociada a $F$ es $\mathcal{C} := \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x,y,z) = 0\}$.

**Definición 6.9.**

$$\operatorname{Sing} F := \left\{ [x:y:z] \in C \,\middle|\, \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \right) = (0,0,0) \right\}.$$

**Definición 6.10.**

$$\operatorname{Reg} F := \left\{ [x:y:z] \in C \,\middle|\, \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \right) \neq (0,0,0) \right\}.$$

## 7. Recordatorio: Homogeneización y deshomogeneización

Sea $f \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio de grado $d$ y consideremos el polinomio $F(x,y,z) := z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, veamos que $F$ es un polinomio homogéneo:

- Sea $f = \sum_{i,j \leq d} a_{ij} x^i y^j$, entonces:

$$f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = \sum_{i,j \leq d} a_{ij} \frac{x^i y^j}{z^{i+j}}.$$

- Se cumple:

$$F(x,y,z) = \sum_{i,j \leq d} a_{ij} x^i y^j z^{d-(i+j)},$$

$$F(tx,ty,tz) = \sum_{i,j \leq d} a_{ij} t^{i+j+d-(i+j)} x^i y^j z^{d-(i+j)} = t^d F(x,y,z).$$

**Definición 7.1.** En el caso anterior a $F$ se le llama *homogeneización* de $f$. Recíprocamente si $F$ es un polinomio homogéneo, entonces el polinomio $f(x,y) = F(x,y,1)$ se denomina *deshomogeneización* con respecto a $z$.

*Observación* 7.2. Cabe remarcar ciertas observaciones:

1. Si $d := \deg f$ entonces $\deg F = d$.
2. Además si $F \in \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]$ es un polinomio homogéneo tal que $F(x_0,x_1,x_2) \neq 0$ entonces $\deg F = \deg F(x_0,x_1,1) = \deg f$.
3. Si $F$ es el homogeneizado de $f \Rightarrow F(x_0,x_1,1) \neq 0$.
4. Sea $f$ un polinomio cualquiera $f = f_{k_1} + f_{k_1+1} + \cdots + f_{d_1}$, con $f_i$ polinomios homogéneos de grado $i$, y sea $g = g_{k_2} + g_{k_2+1} + \cdots + g_{d_2}$. Consideremos ahora el polinomio $h = fg = f_{k_1} g_{k_2} + \cdots + f_{d_1} g_{d_2} = h_{k_3} + \ldots h_{d_1+d_2}$, si $k_1 \leq d_1$, $k_2 \leq d_2$ y $k_1 + k_2 = k_3 = d_1 + d_2$ entonces $k_1 = d_1$ y $k_2 = d_2$.

Usaremos las observaciones anteriores para demostrar el siguiente lema que nos será de gran ayuda para demostrar el teorema de Bézout.

**Lema 7.3.** *Sea $f \in \mathbb{C}[x,y]$, entonces $f$ es irreducible si y sólo si $F$ es irreducible.*

*Demostración.*
($\Rightarrow$) Si $F = GH$, siendo $G$ y $H$ polinomios homogéneos con $\deg G \geq 1$ y $\deg H \geq 1$, como

$$F(x_0, x_1, 0) \neq 0 \Rightarrow G(x_0, x_1, 0)H(x_0, x_1, 0) \neq 0,$$

entonces por la segunda observación $\deg g = \deg G \geq 1$ $\deg h = \deg H \geq 1$ y por tanto

$$F(x_0, x_1, 1) = f(x_0, x_1) = G(x_0, x_1, 0)H(x_0, x_1, 0) = g(x_0, x_1)h(x_0, x_1)$$

por las observaciones del principio ($F$ viene de $f$).
($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $f = gh$ con $d_2 := \deg g \geq 1$, $d_3 := \deg h \geq 1$ y $d_1 := \deg f = d_2 + d_3 \geq\ 1$. En este caso,

$$F = x_2^{d_1} f(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}) = x_2^{d_1} g(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})h(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}) = x_2^{d_2+d_3} g(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})h(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}) = GH$$

por ser $G$ la homogeneización de $g$ y $H$ la de $h$, y por tanto $\deg G = \deg g$ y $\deg H = \deg h$. $\square$

## 8. Multiplicidad de la intersección y teorema de Bézout para curvas proyectivas planas

**Definición 8.1** (Multiplicidad de la intersección de dos curvas proyectivas)**.** Sean $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ dos curvas sin componentes comunes,

$$F_1 = a_n x_2^n + a_{n-1}x_2^{n-1} + \cdots + a_1 x_2 + a_0,$$
$$F_2 = b_m x_2^m + b_{m-1}x_2^{m-1} + \cdots + b_1 x_2 + b_0,$$

con $a_n, b_m \neq 0$, $b_j, a_i \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$, $\deg a_i = n - i$ y $\deg b_j = m - j$.
Supongamos que el punto $q := [0:0:1] \notin \mathcal{C}_i, i = 1,2$ (en caso contrario, mediante un cambio de coordenadas podemos conseguirlo), entonces $F_1(q) = a_n \neq 0$ y $F_2(q) = b_m \neq 0$. Tomemos un punto $P = [p_0 : p_1 : p_2] \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, y sean $f_1$ y $f_2$ los deshomogenehizados de $F_1$ y $F_2$ con respecto a $x_2$.

Se define la *multiplicidad de intersección* de dos curvas proyectivas $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ en un punto $P$ como:

$$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_P(\mathbb{P}^2)}{(f_1, f_2)}$$

Notar que al igual que pasaba con la definición 3.5 esta definición cumple las propiedades 3.6 y no depende de las coordenadas tomadas.

**Teorema 8.2** (Teorema de Bézout)**.** *Si $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ son curvas planas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sin componentes comunes, entonces*

$$\sum_{P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} \mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \deg \mathcal{C}_1 \deg \mathcal{C}_2.$$

## 9. Espacios recubridores

En este párrafo supondremos que todos los espacios son arcoconexos y localmente arcoconexos.

### 9.1. Definición y primeros ejemplos.

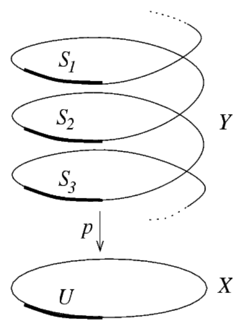
**Definición 9.1.** Un *espacio recubridor* de un espacio $X$ es un par $(\tilde{X}, p)$ que consiste en un espacios conexo por caminos y una aplicación continua $p : \tilde{X} \to X$ tal que $X$ puede ser cubierto por abiertos $U$ satisfaciendo que cada componente $C$ de $p^{-1}(U)$ es abierto en $\tilde{X}$ y que $p|_C : C \to U$ es un homeomorfismo.

**Nota 9.2.** Llamamos *base* a $X$, entorno elemental a los $U$ anteriores, *cubierta* a $\tilde{X}$ y *fibra* a $p^{-1}(x)$ con $x \in X$.

**Ejemplo 9.3.** Definamos $p : \mathbb{R} \to S^1$ por

$$p(t) = (sen(t), cos(t))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. El par $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio recubridor de la circunferencia unidad $S^1$. Todo subintervalo abierto del circulo $S^1$ puede servir como entorno elemental. Este es uno de los ejemplos más simples e importantes.




**Ejemplo 9.4.** Si $X$ es un espacio arbitrario, e $i : X \to X$ denota la identidad, entonces el par $(X, i)$ es un ejemplo trivial de espacio recubridor de $X$. Análogamente, si $f$ es un homeomorfismo de $Y$ sobre $X$, entonces $(Y, f)$ es un espacio recubridor de $X$.

**Ejemplo 9.5.** Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$, y $(\tilde{Y}, q)$ es un espacio recubridor de $Y$, entonces $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ es un espacio recubridor de $X \times Y$ (la aplicación $p \times q$ está definida por $(p \times q)(x, y) = (px, qy)$).

**Ejemplo 9.6.** Veamos otro ejemplo relacionado con la teoría de funciones de una variable compleja. Para cada entero $n \neq 0$ sea $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $p_n(z) = z^n$. Entonces $(\mathbb{C} - \{0\}, p_n)$ es un espacio recubridor de $\mathbb{C} - \{0\}$.

**Definición 9.7.** Una aplicación continua $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo local* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto $V$ tal que $f(V)$ es abierto y $f$ es un homeomorfismo de $V$ en $f(V)$.

**Nota 9.8.** Notar que la composición de homeomorfismos locales es homeomorfismo local.

**Lema 9.9.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, $A$ un subespacio de $X$ arco-conexo y localmente arcoconexo, y $\tilde{A}$ una arcocomponente de $p^{-1}(A)$. Entonces $(\tilde{A}, p|\tilde{A})$ es un espacio recubridor de $A$.*

Planteamos dos de los problemas más importantes de la teoría de cubiertas y que trataremos después:

1. Dar condiciones necesarias y suficientes para que dos espacios recubridores $(\tilde{X}_1, p_1)$ y $(\tilde{X}_2, p_2)$ de $X$ sean isomorfos (por definición, dos espacios recubridores son isomorfos si y sólo si existe un homeomorfismo $h$ de $\tilde{X}_1$ sobre $\tilde{X}_2$ tal que $p_2 h = p_1$).
2. Dado un espacio $X$, determinar (salvo isomorfismos) todos los posibles espacios recubridores de $X$.

### 9.2. Elevación de caminos a un espacio recubridor.

**Proposición 9.10** (Propiedades de Elevación). *Sea $p : \tilde{X} \to X$ un espacio recubridor. Una aplicación $f : Y \to X$ se dice que se* eleva *a una aplicación $F : Y \to \tilde{X}$ si $f = p \circ F$.*

**Lema 9.11** (Lema de Unicidad). *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, e $Y$ un espacio conexo y localmente arcoconexo. Dadas dos aplicaciones continuas $f_0,\ f_1 : Y \to \tilde{X}$ tales que $pf_0 = pf_1$, el conjunto $\{y \in Y | f_0(y) = f_1(y)\}$ es vacío o es todo $Y$.*

**Teorema 9.12** (Teorema de elevación de Caminos). *Dado un camino cualquiera $\omega : I \to X$ y cualquier $\tilde{x} \in p^{-1}\omega(0) \subset \tilde{X}$, existe una elevación $\tilde{\omega}$ de $\omega$ que satisface $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$. Por el lema de unicidad $\tilde{w}$ es única.*

**Lema 9.13.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, y $\omega_0,\ \omega_1 : I \to \tilde{X}$ caminos en $\tilde{X}$ con el mismo origen. Si $p\omega_0 \sim p\omega_1$, entonces $\omega_0 \sim \omega_1$; en particular $\omega_0$ y $\omega_1$ tienen el mismo extremo.*

**Lema 9.14.** *Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de $X$, entonces los conjuntos $p^{-1}(x)$ tienen el mismo cardinal, para todo $x \in X$. Este cardinal se denomina* número de hojas *de la cubierta.*

### 9.3. Grupo fundamental de un espacio recubridor.

**Teorema 9.15.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$, y $x_0 = p(\tilde{x_0})$. Entonces el homomorfismo inducido $p_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi(X, x_0)$ es un monomorfismo.*

**Teorema 9.16.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, y $x \in X$. Entonces, los subgrupos $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$, para $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, forman exactamente una clase de conjugación de subgrupos de $\pi(X, x)$.*

### 9.4. Elevación de aplicaciones arbitrarias a un espacio recubridor.

En el párrafo anterior hemos estudiado elevación de caminos de $X$ a un espacio recubridor $\tilde{X}$. Estudiamos ahora el problema análogo para aplicaciones de un espacio arbitrario $Y$ en $X$. Para discutir esta cuestión, introducimos la siguiente notación: Si $X$ e $Y$ son espacios topológicos, $x \in X$ e $y \in Y$, entonces $f : (X, x) \to (Y, y)$ significa que $f$ es una aplicación continua de $X$ en $Y$ y $f(x) = y$. Con esta notación podemos establecer de manera concisa nuestro objetivo principal, como sigue: Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $x = p(\tilde{x})$, $y \in Y$, y $\varphi : (Y, y) \to (X, x)$ ¿En qué condiciones existe una aplicación $\tilde{\varphi} : (Y, y) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \tilde{\varphi} \nearrow & \\ (Y, y) & & \downarrow p \\ & \varphi \searrow & \\ & & (X, x) \end{array}$$

sea conmutativo? Si una tal aplicación $\tilde{\varphi}$ existe, decimos que $\varphi$ puede ser *elevada* a $\tilde{\varphi}$, o que $\tilde{\varphi}$ es una elevación de $\varphi$.

Es fácil obtener una condición necesaria para la existencia de una tal elevación $\tilde{\varphi}$, por consideraciones sobre los subgrupos fundamentales de los espacios implicados. Pues, si suponemos que $\tilde{\varphi}$ existe, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de grupos y homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} & \pi(\tilde{X},\tilde{x}) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi(Y,y) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}_*"] \arrow[r, "\varphi_*"'] & \pi(X,x) \end{tikzcd}$$

Puesto que $p_*$ es un monomorfismo, la existencia de un homomorfismo $\tilde{\varphi}_* : \pi(Y,y) \to \pi(\tilde{X},\tilde{x})$, que haga conmutativo el diagrama, es equivalente a la condición de que la imagen de $\varphi_*$ esté contenida en la imagen de $p_*$. Ésta es nuestra condición necesaria deseada. Lo sorprendente es que esta condición necesaria también es suficiente.

**Teorema 9.17.** *Sea $(\tilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$, $Y$ un espacio conexo y localmente arcoconexo, $y \in Y$, $x \in X$, y $x = p(\tilde{x})$. Dada una aplicación $\varphi : (Y,y) \to (X,x)$ existe una elevación $\tilde{\varphi} : (Y,y) \to (\tilde{X},\tilde{x})$ si y sólo si $\varphi_*\pi(Y,y) \subset \pi(\tilde{X},\tilde{x})$.*

*Observación* 9.18. La aplicación $\tilde{\varphi}$ es única en virtud del lema 9.11

### 9.5. Homomorfismos y automorfismos de espacios recubridores.

Deseamos obtener información sobre los posibles espacios recubridores de un espacio $X$.

**Definición 9.19.** Sean $(\tilde{X}_1,p_1)$ y $(\tilde{X}_2,p_2)$ espacios recubridores de $X$. Un *homomorfismo* de $(\tilde{X}_1,p_1)$ en $(\tilde{X}_2,p_2)$ es una aplicación continua $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Obsérvese que la composición de dos homomorfismos es de nuevo un homomorfismo, y que, si $(\tilde{X},p)$ es un espacio recubridor de $X$, entonces la identidad $i : \tilde{X} \to \tilde{X}$ es un homomorfismo.

**Definición 9.20.** Un homomorfismo $\varphi$ de $(\tilde{X}_1,p_1)$ en $(\tilde{X}_2,p_2)$ se llama *isomorfismo* si existe un homomorfismo $\psi$ de $(\tilde{X}_2,p_2)$ en $(\tilde{X}_1,p_1)$ tal que las composiciones $\psi\varphi$ y $\varphi\psi$ son ambas la identidad. Dos espacios recubridores se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo de uno sobre el otro. Un *automorfismo* es un isomorfismo de un espacio recubridor en sí mismo; puede ser o no la identidad.

Observemos que un homomorfismo de espacios recubridores es un isomorfismo si y sólo si es un homeomorfismo en el sentido usual. El conjunto de todos los automorfismos de un espacio recubridor $(\tilde{X},p)$ de $X$ constituye obviamente un grupo con la composición de aplicaciones. Designaremos a este grupo por $A(\tilde{X},p)$. Veamos ahora algunas propiedades básicas de los homomorfismos y automorfismos de cubiertas.

**Lema 9.21.** *Sean $\varphi_0$ y $\varphi_1$, homomorfismos de $(\tilde{X}_1,p_1)$ en $(\tilde{X}_2,p_2)$. Si existe algún punto $x \in \tilde{X}_1$ tal que $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, entonces $\varphi_0 = \varphi_1$.*

**Corolario 9.22.** *El grupo $A(\tilde{X},p)$ opera sin puntos fijos sobre el espacio $\tilde{X}$; es decir, si $\varphi \in A(\tilde{X},p)$ y $\varphi \neq 1$, entonces $\varphi$ no tiene puntos fijos.*

**Lema 9.23.** *Sean $(\tilde{X}_1,p_1)$ y $(\tilde{X}_2,p_2)$ espacios recubridores de $X$ y $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$, $i = 1,2$, puntos tales que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Entonces existe un homomorfismo $\varphi$ de $(\tilde{X}_1,p_1)$ en $(\tilde{X}_2,p_2)$ tal que $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, si y sólo si $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1,p_1) \subset p_{2*}\pi(\tilde{X}_2,p_2)$.*

**Corolario 9.24.** *Con las hipótesis del lema 9.23, existe un isomorfismo $\varphi$ de $(\tilde{X}_1,p_1)$ sobre $(\tilde{X}_2,p_2)$ tal que $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, si y sólo si $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1,p_1) = p_{2*}\pi(\tilde{X}_2,p_2)$.*

**Corolario 9.25.** *Sea $(\tilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$ y $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$, donde $x_0 \in X$. Existe un automorfismo $\varphi \in A(\tilde{X},p)$ tal que $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, si y sólo si $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1,p_1) = p_{2*}\pi(\tilde{X}_2,p_2)$.*

**Teorema 9.26.** *Los espacios recubridores $(\tilde{X}_1,p_1)$ y $(\tilde{X}_2,p_2)$ de $X$ son isomorfos si y sólo si para cada para de puntos $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ y $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$, tales que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$, los subgrupos $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1,p_1)$ y $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2,p_2)$ pertenecen a la misma clase de conjugación en $\pi(X,x_0)$.*

**Lema 9.27.** *Sean $(\tilde{X}_1,p_1)$ y $(\tilde{X}_2,p_2)$ espacios recubridores de $X$, y $\varphi$ un homomorfismo del primer espacio recubridor en el segundo. Entonces $(\tilde{X}_1,\varphi)$ es un espacio recubridor de $\tilde{X}_2$.*

Sea $(\tilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$ tal que $\tilde{X}$ sea simplemente conexo. Si $(\tilde{X}',p')$ es cualquier otro espacio recubridor de $X$, entonces, por el lema 9.23, existe un homomorfismo $\varphi$ de $(\tilde{X},p)$ en $(\tilde{X}',p')$, y por el lema anterior, $(\tilde{X},\varphi)$ es un espacio recubridor de $\tilde{X}'$; es decir, $\tilde{X}$ puede servir como espacio recubridor de cualquier espacio recubridor de $X$. Por esta razón, un espacio recubridor simplemente conexo, tal como $(\tilde{X},p)$, se llama *espacio recubridor universal* o *cubierta universal*. Por 9.26 dos cubiertas universales son isomorfas.

### 9.6. La acción del grupo $\pi(X,x)$ sobre el conjunto $p^{-1}(x)$.

Para estudiar más a fondo el grupo de automorfismos de un espacio recubridor $(\tilde{X},p)$ de $X$, definimos, para cada $x \in X$, una acción del grupo $\pi(X,x)$ sobre el conjunto $p^{-1}(x)$; es decir, hacemos operar $\pi(X,x)$ por la derecha sobre el conjunto $p^{-1}(x)$.

**Definición 9.28.** Sea $(\tilde{X},p)$ un espacio recubridor de $X$, y $x \in X$. Para todo punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y todo $\alpha \in \pi(X,x)$, definimos $\tilde{x}\cdot\alpha \in p^{-1}(x)$ como sigue: en virtud de los lemas 9.12 y 9.13, existe una única clase de caminos $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{X}$ tal que $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ y el origen de $\tilde{\alpha}$ es el punto $\tilde{x}$. Definimos $\tilde{x}\cdot\alpha$ como el extremo de la clase de caminos $\tilde{\alpha}$.

**Nota 9.29.** Se cumple que $(\tilde{x}\cdot\alpha)\cdot\beta = \tilde{x}\cdot(\alpha\cdot\beta)$ y $\tilde{x}\cdot 1 = \tilde{x}$.

**Lema 9.30.** *El grupo $\pi(X,x)$ opera* transitivamente *sobre el conjunto $p^{-1}(x)$.*

El conjunto $p^{-1}(x)$ es un $\pi(X,x)$-espacio homogéneo por la derecha. A partir de esta definición vemos inmediatamente que, para todo punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, el subgrupo de isotropía correspondiente a este punto es precisamente el subgrupo $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ de $\pi(X,x)$. Por tanto, como $\pi(X,x)$-espacio a derecha, $p^{-1}(x)$ es isomorfo al espacio de clases laterales $\dfrac{\pi(X,x)}{p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})}$, y el número de hojas del espacio recubridor es igual al índice del subgrupo $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$.

Tenemos ahora el siguiente importante resultado, que establece una conexión entre el grupo de automorfismos de un espacio recubridor y la acción de $\pi(X,x)$ sobre $p^{-1}(x)$.

**Proposición 9.31.** *Para todo automorfismo $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, todo punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y todo $\alpha \in \pi(X, x)$,*

$$\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha) = (\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha;$$

*es decir, cada elemento $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$ induce un automorfismo del conjunto $p^{-1}(x)$, considerado como un $\pi(X, x)$-espacio por la derecha.*

Ahora podemos determinar completamente la estructura del grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$.

**Teorema 9.32.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$. Entonces, el grupo de automorfismos, $A(\tilde{X}, p)$, es naturalmente isomorfo al grupo de automorfismos del conjunto $p^{-1}(x)$, $x \in X$, considerado como $\pi(X, x)$-espacio por la derecha.*

**Corolario 9.33.** *Para todo punto $x \in X$ y todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, el grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al grupo cociente $\dfrac{N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]}{p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})}$.*

**Definición 9.34.** Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$, diremos que es *regular* si $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) \trianglelefteq \pi(X, x)$

*Observación* 9.35. Observar que la condición anterior es independiente de la elección del punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

**Corolario 9.36.** *Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$, entonces $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al grupo cociente $\dfrac{\pi(X, x)}{p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})}$ para $x \in X$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ cualesquiera.*

**Corolario 9.37.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un recubrimiento universal de $X$. Entonces, $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo a $\pi(X)$, y el orden del grupo $\pi(X)$ es igual al número de hojas del espacio recubridor $(\tilde{X}, p)$.*

### 9.7. Espacios recubridores regulares y espacios cociente.

**Lema 9.38.** *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio recubridor de $X$. El grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$ opera transitivamente sobre $p^{-1}(x)$, $x \in X$, si y sólo si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$.*

Es consecuencia inmediata del teorema 9.16 y del corolario 9.25.

Consecuencia de este lema es que, si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor regular de $X$, entonces $X$ es naturalmente homeomorfo al espacio cociente $\dfrac{\tilde{X}}{A(\tilde{X}, p)}$.

**Proposición 9.39.** *Sea $Y$ un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo, y $G$ un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos de $Y$. Designemos por $p : Y \to Y/G$ la proyección natural de $Y$ sobre su espacio cociente. Entonces $(Y, p)$ es un espacio recubridor regular de $Y/G$, y $G = A(Y, p)$.*

## 10. Series Formales

**Nota 10.1.** En este apartado denotaremos:

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$.
- $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$.
- $X^\nu = (X_1^{\nu_1}, \ldots, X_n^{\nu_n})$.
- $|\nu| = (\nu_1 + \cdots + \nu_n)$.

**Definición 10.2.** Se define el anillo de las *series formales* $\mathbb{C}[[X]]$ como:

$$\mathbb{C}[[X]] := \{f = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu | a_\nu \in \mathbb{C}\}.$$

**Definición 10.3.** Se define la parte homogénea de grado $d$ de una serie formal $f$ como:

$$f_d := \sum_{|\nu|=d} a_\nu X^\nu.$$

**Definición 10.4.** Se define la parte polinómica de grado $\leq k$ de una serie formal $f$ como:

$$f^{(k)} := \sum_{d=0}^{k} f_d.$$

**Nota 10.5.** El anillo $\mathbb{C}[[X]]$ es una extensión de $\mathbb{C}[X]$.

**Propiedades 10.6.**

1. Si $f \in \mathbb{C}[[X]] \Rightarrow f_d, f^{(k)} \in \mathbb{C}[X]$.
2. Se define la suma de series formales como:
$$f + g := \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} (a_\nu + b_\nu) X^\nu.$$
3. Se define el producto de series formales como:
$$fg := \sum_{d=0}^{\infty} (\sum_{k+l=d} f_k g_l).$$
4. La serie $f$ la puedo ver como $f = \sum f_d$.

**Definición 10.7.** Diremos que dos series formales $f$, $g$ son iguales si:

$$f = g \iff f_d = g_d \ \forall d.$$

**Definición 10.8.** Definimos el *orden* de una serie formal como:

$$\operatorname{ord} f := \begin{cases} \text{mín}\{d | f_d \neq 0\} & \text{si } f \neq 0 \\ \infty & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

**Propiedades 10.9.** Tenemos que:

- $\operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord} f + \operatorname{ord} g$.
- $\operatorname{ord}(f + g) \geq \text{mín}\{\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g\}$.

  *Demostración.* Al sumar dos series $f$ y $g$, si tienen el mismo orden $d$, puede ocurrir que $f_d = -g_d$ y al sumar queda $\operatorname{ord}(f+g) \geq \text{mín}\{\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g\}$. Si las dos series tienen órdenes distintos, entonces $\operatorname{ord}(f + g) = \text{mín}\{\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g\}$. □

- Tenemos $\mathbb{C}[[X]]$ es un dominio de integridad y que $\mathfrak{m} := \{f \in \mathbb{C}[[X]] \,|\, \operatorname{ord} f \geq 1\}$ es el único ideal maximal.

*Observación* 10.10. Sea $f \in \mathbb{C}[[X]], g_i \in \mathbb{C}[[X]]$ entonces $f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{C}[[X]]$ si $\operatorname{ord} g_i > 0$.

**Proposición 10.11.** *Las unidades en el anillo de las series formales son:*

$$\mathbb{C}[[X]]^* = \{f \in \mathbb{C}[[X]] \,|\, \operatorname{ord} f = 0\}.$$

**Proposición 10.12.** *Probar que los elementos del anillo de las series formales que no son unidades constituyen un ideal que es maximal.*

**Proposición 10.13.** *Una serie formal* $f \in \mathfrak{m}^k \Leftrightarrow \operatorname{ord} f \geq k$.

**Definición 10.14.** Definiremos la *norma* de una serie formal de la siguiente manera:

$$\|f\| = \operatorname{ord} f.$$

**Definición 10.15.** Una sucesión de series formales $\{f_n\}$ converge a una serie $f$ si para todo $k$ existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f - f_n \in \mathfrak{m}^k \ \forall n \geq n_0$.

**Definición 10.16.** Una sucesión de series formales es de *Cauchy* si para todo $k$ existe un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n - f_m \in \mathfrak{m}^k \ \forall n, m \geq n_0$.

**Lema 10.17.**

(i) $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^k = \{0\}$ *($\mathfrak{m}$ ideal maximal).*

(ii) *Toda sucesión de Cauchy es convergente.*

*Observación* 10.18.

1. Sea $f \in \mathbb{C}[[X]], g_i \in \mathbb{C}[[X]]$ entonces $f(g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{C}[[X]]$ si $\operatorname{ord} g_i > 0$.
2. En las condiciones anteriores $f^{(k)}(g) \in \mathbb{C}[[X]]$ por ser $\mathbb{C}[[X]]$ un anillo.
3. Se cumple que $\operatorname{ord}(f^{(k)}(g)) \geq f^{(k)}(Y)$.
4. Lo anterior también se puede ver como $\operatorname{ord} Y_i(g) \geq 1$.
5. Sea $0 \leq< l$, $\operatorname{ord}(f^{(k)}(g) - f^{(l)}(g)) \geq k+1$.

**Definición 10.19.** Definimos el *anillo de las series convergentes* de la siguiente manera:

$$\mathbb{C}\{X\} := \{f = \sum a_\nu X^\nu \in \mathbb{C}[[X]] \,|\, \exists \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_\nu) \in \mathbb{C}^n_{>0} \text{ tal que } \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} |a_\nu| \rho^\nu \text{ converge}\}.$$

**Nota 10.20.** Notar que $\mathbb{C}[X] \subset \mathbb{C}\{X\} \subset \mathbb{C}[[X]]$.

**Definición 10.21.** Sea $f \in \mathbb{C}[[X]]$, se dice *general* en $X_n$ (de orden $k$) si $\operatorname{ord}(f(0, \ldots, 0, X_n)) < \infty (= k)$.

**Nota 10.22.** Denotamos $\widehat{X} = (X_1, \ldots, X_{n-1})$.

**Definición 10.23.** Una serie formal $f$ se dice de *Weierstrass* (de grado $k$) si $f \in \mathbb{C}\{\widehat{X}\}[X_n]$, es decir $f = X_n^k + a_{k-1} X_n^{k-1} + \cdots + a_1 X_n + a_0$ con $a_i(0) \equiv 0, \ a_i \in \mathbb{C}\{\widehat{X}\}$.

**Lema 10.24.** *Sea* $0 \neq f \in \mathbb{C}[[X]]$, *y* $k := \operatorname{ord} f$, *entonces existe una transformación* $X_n = Y_n$, $X_i = Y_i + c_i Y_n$ *de modo que* $g(Y) = f(X(Y))$ *es general en* $Y_n$ *de orden* $k$.

**Teorema 10.25** (Teorema de división de Weierstrass)**.** *Sean* $f, g \in \mathbb{C}[[X]]$ *con* $g$ *general en* $X_n$ *de orden* $k$, *entonces existe un único* $q \in \mathbb{C}\left[\left[\overline{X}\right]\right]$ *y un único* $r \in \mathbb{C}[[X]][X_n]$ *con* $\deg_{X_n} r < n$ *tal que*

$$f = qg + r.$$

**Teorema 10.26** (Teorema de preparación de Weierstrass)**.** *Si* $f \in \mathbb{C}[[X]]$ *es general en* $X_n$ *de orden* $k$, *entonces* $f = up$, *donde* $u$ *es una unidad en* $\mathbb{C}[[X]]$ *y* $p$ *es un polinomio de Weierstrass de grado* $k$. *Además la descomposición es única.*

**Ejemplos 10.27.** Veamos algún ejemplo:

1. Sea $f = X^2+X^3 = X^2(1+X)$ donde $(1+X)$ es una unidad, en este caso $\exists u^0$ tal que $V(f)\cap u^0 = V(X^2)\cap 0$ $((V(f),0) = (V(X^2),0))$.
2. Sea $f = X^2 - Y + X^3 - XY = (X^2 - Y)(1 + X)$.

**Teorema 10.28** (Teorema de la función implícita)**.** *Si $f \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ con $f(0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial Y} \neq 0$, entonces existe una única $\varphi \in \mathbb{C}[[X]]$ tal que $\varphi(0) = 0$ y $f(X, \varphi(X)) \equiv 0$.*

**Nota 10.29.** Los resultados anteriores para series formales también valen para series convergentes.

**Teorema 10.30** (Teorema de sistema de funciones implícitas)**.** *Sean $f_1,\dots,f_m \in \mathbb{C}[[X,Y_1,\dots,Y_m]]$ con $f_i(0) = 0$ y $0 \neq \operatorname{Jac}(f,Y)\big|_0 := \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}(0)\right)_{1\leq i,j\leq m}$, entonces existen unas únicas $\varphi_1,\dots,\varphi_m \in \mathbb{C}[[X]]$ tales que $\varphi_i(0) = 0$ ($\varphi_i$ no son unidades) y $f_i(X,\varphi) \equiv 0$.*

**Corolario 10.31.** *Sean $g_1,\dots,g_m \in \mathbb{C}[[Y]]$ con $g_i(0) = 0$ y $\operatorname{Jac}(g,Y)\big|_0 \neq 0$, entonces $f \mapsto f(g)$ es un isomorfismo.*

**Ejemplo 10.32.** Sean:

$$Y_1 = X_1 - \frac{X_2^2}{X_2 - 1} \equiv g_1$$

$$Y_2 = X_2 - X_1^2 + X_1^3 \equiv g_2$$

Notar que $\frac{1}{X_2 - 1} = 1 + X_2 + X_2^2 + X_2^2 + \dots$ es unidad.
Se cumple que $g_i(0) = 0$.

$$\operatorname{Jac}(g,Y)\big|_0 = \begin{vmatrix} 1 & X_2(\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)X_2^n) \\ -2X_1 + 3X_1^2 & 1 \end{vmatrix}_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**Teorema 10.33** (Teorema de continuidad de las raices)**.** *Sean $D^1 := \{(z_1,\dots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} | |z_i| < \rho_i\}$, y $E := \{y \in \mathbb{C} | |y| < \rho\}$. Sea $f$ holomorfa en $D^1 \times E$ (polidisco), supongamos que existe $0 < r < \rho$ tal que $f_{x_0} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $y \mapsto f(x_0,y)$ no se anula en $r \leq |y| < \rho$. Entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in D'_0$, $f_x$ tiene exactamente $k$ ceros en $E$ (con multiplicidad).*

**Lema 10.34** (Lema de Hensel)**.** *Sea $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ normalizado ($a_n = 1$),*

$$f(0,Y) = (Y - C_1)^{k_1}\dots(Y - C_r)^{k_r}.$$

*Entonces existen unos únicos $f_1,\dots,f_r \in \mathbb{C}[[Y]]$ tal que $f = f_1\dots f_r$ donde $\deg_Y f_i = k_i$ y $f_i(0,Y) = (Y - C_i)^{k_i}$.*

**Teorema 10.35** (Teorema de división de Study)**.** *Sea $f \in \mathbb{C}\langle X\rangle$ irreducible y $g \in \mathbb{C}\langle X\rangle$ tal que $V(f) \subset V(g) \Rightarrow f|g$.*

**Teorema 10.36** (de descomposición en componentes irreducibles de un germen de hipersuperficie analítica)**.** *Sea $f \in \mathbb{C}\{X\}$ entonces*

$$V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_r),$$

*con $V(f_i)$ irreducible, de manera única.*

## 11. Divisores en variedades lisas

Sea $M$ una variedad analítica compleja conexa lisa de dimensión $n$, no necesariamente compacta. Denotaremos $\mathscr{O}(M)$ el conjunto de funciones holomorfas globalmente definidas en $M$ ($\mathscr{O}(M) \equiv \mathbb{C}$ si $M$ es compacta). De la misma manera, denotaremos $\mathscr{O}^*(M)$ el conjunto de las funciones globalmente definidas que no se anulan nunca.

**Definición 11.1.** Una *familia divisorial* en $M$ es una familia $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ donde $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de $M$ y $f_i : U_i \dashrightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa $\forall i \in I$ tal que $\forall i, j \in I$, el cociente $\frac{f_i}{f_j}$ define una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Dos familias divisoriales son equivalentes si su unión es una familia divisorial. Un *divisor* en $M$ es una clase de equivalencia de familias divisoriales. Las funciones $f_i$ se llaman las *ecuaciones locales* del divisor. El conjunto de divisores se denota $\operatorname{Div}(M)$.

Normalmente identificaremos una familia divisorial con el divisor que inducen y por abuso de notación la llamaremos divisor. Se pueden establecer diferentes relaciones de equivalencia entre divisores. Consideremos dos divisores en $M$; refinando los recubrimientos podemos suponer que estos son comunes a ambos.

**Definición 11.2.** Dos divisores $D = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ y $E = \{(U_i, g_i)\}_{i\in I}$ son *linealmente equivalentes* si existe una función meromorfa $h : M \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g_i = h_{|U_i} f_i$.

**Definición 11.3.** Sean $D = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}, E = \{(U_i, g_i)\}_{i\in I} \in \operatorname{Div}(M)$.

1. El *divisor suma* $D + E$ es el representado por $\{(U_i, f_i g_i)\}_{i\in I}$.
2. El divisor nulo es el representado por la función constante 1 en $M$.
3. El divisor $-D$ es el representado por $\left\{\left(U_i, \frac{1}{f_i}\right)\right\}_{i\in I}$.
4. El divisor $D$ se dice *efectivo* si todas las funciones $f_i$ son holomorfas.
5. Un divisor efectivo es *irreducible* si no se puede poner como suma de dos divisores efectivos.

**Propiedades 11.4.** Tenemos las siguientes propiedades.

(1) $D + 0 = D$.
(2) Un divisor es nulo si y solo si es de la forma $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ con $f_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ holomorfa.
(3) Si $D = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ es un divisor y $h \in \mathscr{O}^*(M)$, entonces $\{(U_i, h_{|U_i} f_i)\}_{i\in I}$ también representa a $D$.
(4) El conjunto de divisores $\operatorname{Div}(M)$ es un grupo abeliano.

**Teorema 11.5.** *Un divisor $D$ es combinación entera localmente finita de divisores irreducibles. Es decir, existen divisores irreducibles $\{D_j\}_{j\in J}$ tal que $D$ se puede escribir formalmente como $\sum_{j\in J} n_j D_j$, con $n_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. La* igualdad formal *significa que existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de $M$ tal que $D_j = \{(U_i, f_{i,j}\}_{i\in I}$ y:*

(a) *$f_{i,j} \in \mathscr{O}(U_j)$ y $\forall x \in U_i$, el germen de $f_{i,j}$ en $x$ es un elemento irreducible de $\mathscr{O}_x$.*
(b) $\#\{j \in J \mid n_j \neq 0, f_{i,j} \notin \mathscr{O}^*(U_j)\} < \infty$.
(c) *Si $f_{i,j} \in \mathscr{O}^*(U_j)$, entonces $f_{i,j} \equiv 1$.*
(d) *La función meromorfa que define $D$ sobre $U_i$ es $\prod_{j\in J} f_{i,j}^{n_j}$.*

**Ejemplo 11.6.** Veamos algunos ejemplos de divisores.

(a) $M$ es un disco $\Delta$ en $\mathbb{C}$. El conjunto de divisores de $\Delta$ es el cociente de $\mathscr{O}(\Delta)$ por la acción multiplicativa de $\mathscr{O}^*(\Delta)$. La razón principal es que todo divisor está representado por una función meromorfa global. Lo mismo ocurre para bolas o polidiscos en dimensión superior.
(b) Si $M$ es una superficie de Riemann compacta, el conjunto de divisores se identifica con el grupo abeliano libre de base los puntos de $M$. Para dimensión superior, la base son las hipersuperficies. En el caso compacto, la suma formal a la que hace referencia el Teorema 11.5 es una suma de verdad.

**Definición 11.7.** Si expresamos $D$ como una suma formal $\sum_{j\in J} n_j D_j$, con $n_j \in \mathbb{Z}$ y $D_j$ irreducible, entonces el *soporte* de $D$ es $\operatorname{Supp}(D) := \bigcup_{j\in J} D_j$; el *divisor reducido* asociado a $D$ es la suma formal $\sum_{n_j\neq 0} D_j$.

**Proposición 11.8.** *El soporte de un divisor es cerrado en $M$.*

Denotaremos $\operatorname{Div}^c(M)$ el subgrupo de los divisores de soporte compacto. Se trata del grupo libre de base los divisores irreducibles de soporte compacto.

Podríamos haber considerado en lugar de $\operatorname{Div}^c(M)$ el grupo abeliano libre engendrado por las hipersuperficies compactas de $M$. En el caso que nos ocupa en el que $M$ es liso, ambos conceptos coinciden. Si consideramos $\operatorname{Div}(M)$, se puede identificar con un grupo engendrado por *uniones localmente finitas* de hipersuperficies, con identificaciones que provienen de la geometría.

## 12. Singularidades cociente

Denotamos $\mu_d$ el grupo cíclico de orden $d$ visto como subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^*$. Sean $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ tales que $\operatorname{mcd}(k_1, \ldots, k_n, d) = 1$.

**Definición 12.1.** La acción de $\mu_d$ sobre $\mathbb{C}^n$ de tipo $(d; k_1, \ldots, k_n)$ es la definida por

$$\xi_d \cdot (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\xi_d^{k_1} x_1, \ldots, \xi_d^{k_n} x_n).$$

**Notación 12.2.** Denotaremos $X_{(d;k_1,\ldots,k_n)}$ el espacio cociente de $\mathbb{C}^n$ por esta acción.

**Nota 12.3.** Notar que los espacios $X_{(d;k_1,\ldots,k_n)}$ son variedades afines.

*Observación* 12.4. Sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{mcd}(l, d) = 1$. Entonces las acciones de tipo $(d; k_1, \ldots, k_n)$ y $(d; lk_1, \ldots, lk_n)$ son equivalentes. Además, basta considerar $k_i \mod d$.

**Ejemplo 12.5.** En el caso $n = 1$, tenemos $\operatorname{mcd}(k_1, d) = 1$; denotemos $k := k_1$. La aplicación $X_{(d;k)} \to \mathbb{C}$ dada por $[x] \mapsto x^d$ está bien definida y es un isomorfismo.

**Ejemplo 12.6.** Estudiemos el caso $n = 2$. Supongamos que $r := \operatorname{mcd}(k_2, d)$ 1. Sea $e := \dfrac{d}{r}$. Consideremos la siguiente acción del subgrupo $\mu_r$ de $\mu_d$ ($\{\xi^e | \xi \in \mu_d\}$)

$$\xi_d^e \cdot (x, y) \to (\xi^{ek_1} x, y).$$

La acción es de tipo $(r; ek_1, 1)$. La aplicación $X_{(r;ek_1,1)} \to \mathbb{C}^2$ dada por $[(x, y)] \mapsto (x^r, y)$ es un isomorfismo. Observemos que el cociente $X_{(d;k_1,k_2)}$ es isomorfo al cociente de $X_{(r;ek_1,1)} \cong \mathbb{C}^2$ por la acción de $\mu_d/\mu_r \cong \mu_e$. Este último isomorfismo está dado por $[\xi_d] \mapsto \xi_d^r$. Fijemos $[\xi_d] \in \mu_d/\mu_r$ y $[(x, y)] \in X_{(r;ek_1,1)}$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [\xi_d] \cdot [(x,y)] & \mapsto & [(\xi_d^{k_1} x, \xi_d^{k_2} y)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \xi^d \cdot (x^r, y) & & [(\xi_d^{rk_1} x^r, \xi_d^{r\frac{k_2}{r}} y)] \end{array}.$$

La acción resultante de $\mu_e$ es de tipo $(e; k_1, \frac{k_2}{r})$. Es decir $X(d; k_1, k_2) \cong X_{(e;k_1,\frac{k_2}{r})}$. Por tanto, basta que estudiemos acciones de tipo $(d; k_1, k_2)$ tales que $\mathrm{mcd}(d, k_i) = 1$, $i = 1, 2$.

Estos cocientes tienen una singularidad aislada en la imagen del origen. La razón es que $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ es el único punto en el que la acción no es libre.

**Ejemplo 12.7.** Siguiendo un razonamiento similar al caso anterior, en el caso $n = 3$ basta que estudiemos acciones del tipo $(d; k_1, k_2, k_3)$ tales que $\mathrm{mcd}(k_i, k_j, d) = 1$, siempre que $1 \leq i < j \leq 3$. En este caso, la imagen del origen siempre es singular. La imagen del $i$-ésimo eje coordenado es singular si y sólo si $r_i := \mathrm{mcd}(k_i, d) > 1$. Basta observar que en la clase de $[(x, 0, 0)]$, $x \in \mathbb{C}^*$, la acción es del tipo $(r_1; 1, k_1, k_2)$, es decir, localmente el cociente es $D \times X_{(r_1;k_1,k_2)}$, donde $D$ es un disco de $\mathbb{C}$

## 13. Graduaciones de Anillos

Sea $K$ un cuerpo de característica 0 y denotemos $B := K[x, y, z]$.

**Definición 13.1.** Una $\mathbb{N}$-*graduación* de $B$ es una descomposición $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$ de espacios vectoriales sobre $K$ de dimensión finita, donde además $B_i \leq (B, +)$ subgrupo cumpliendo que $B_i B_j \subseteq B_{i+j}$.

**Definición 13.2.** Una *graduación positiva de* $B$ es una $\mathbb{N}$-graduación

$$B = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} B_i$$

tal que $B_0 = K$.

**Definición 13.3.** Diremos que un polinomio $f \neq 0$ es *homogéneo respecto de una graduación* $B$ si $f \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

**Nota 13.4.** Si $f \in B_i$ entonces el grado de $f$ es $i$.

**Ejemplo 13.5.** Sean $(a, b, c) \in (\mathbb{N}\backslash\{0\})^3$, existe una única graduación positiva de $B$ tal que $x \in B_a$, $y \in B_b$ y $z \in B_c$:

$$B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

con $B_n = K$-espacio vectorial generado por $\{x^i y^j z^k |\ ai + bj + ck = n\}$.

**Notación 13.6.** Denotaremos $(B, (a, b, c))$ al anillo $B$ dotado de esta graduación.

**Definición 13.7.** Dado $(a, b, c) \in (\mathbb{N}\backslash\{0\})^3$ definimos el plano proyectivo ponderado de pesos $\omega = (a, b, c)$ :

$$\mathbb{P}_{(a,b,c)} := \mathrm{Proj}(B, (a, b, c))$$

**Nota 13.8.** Posteriormente daremos una noción más intuitiva de plano proyectivo ponderado.

**Definición 13.9.** Sea $S := \bigoplus_{i\geq 0} S_i$ un anillo graduado, definimos $\mathrm{Proj}\, S$ como el conjunto de los ideales primos homogéneos que no contienen a $S_+ := \bigoplus_{i>0} S_i$.

**Nota 13.10.** Si $A$ es un anillo, tenemos que $\mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proj}\, A[x_0, \ldots, x_n]$. En particular $\mathbb{P}^2 = \mathrm{Proj}\, \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

¿Cuándo tenemos que $\mathbb{P}_{(a,b,c)} \cong \mathbb{P}_{(a',b',c')}$?

**Proposición 13.11.** *Tenemos:*

1. *Si* $(a',b',c')$ *es una permutación de* $(a,b,c)$ *entonces* $(B,(a,b,c)) \cong (B,(a',b',c')) \Rightarrow \mathbb{P}_{(a,b,c)} \cong \mathbb{P}_{(a',b',c')}$.
2. *Si* $n \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}_{(a,b,c)} \cong \mathbb{P}_{(na,nb,nc)}$.
3. *Si tenemos que* $\mathrm{mcd}(a,b,c) = 1$, *tomamos* $\alpha = \mathrm{mcd}(b,c)$, $\beta = \mathrm{mcd}(a,c)$ *y* $\gamma = \mathrm{mcd}(a,b)$ *y consideramos* $(a',b',c') = \left(\dfrac{a}{\beta\gamma}, \dfrac{b}{\alpha\gamma}, \dfrac{c}{\alpha\beta}\right)$. *Entonces* $\mathbb{P}_{(a,b,c)} \cong \mathbb{P}_{(a',b',c')}$.

**Corolario 13.12.** *Dado un plano proyectivo ponderado con peso* $\boldsymbol{w} = (a,b,c)$ *podemos suponer que* $a$, $b$ *y* $c$ *son primos dos a dos.*

**Ejemplo 13.13.**

- $\mathbb{P}_{(9,6,8)} \overset{3}{\cong} \mathbb{P}_{(3,1,4)}$.
- $\mathbb{P}_{(12,20,30)} \overset{2}{\cong} \mathbb{P}_{(6,10,5)} \overset{3}{\cong} \mathbb{P}_{(1,1,1)} \cong \mathbb{P}^2$.

**Teorema 13.14.** *Sea* $X$ *un plano proyectivo ponderado. Entonces existen* $(a,b,c) \in (\mathbb{N}\backslash\{0\})^3$ *tal que* $X \cong \mathbb{P}_{a,b,c}$ *y* $(a,b,c)$ *son primos entre sí dos a dos. Además* $(a,b,c)$ *son únicos salvo permutación.*

En general tenemos:

**Proposición 13.15.** *Dos espacios proyectivos* $\mathbb{P}_{(p_0,\ldots,p_r)}$, $\mathbb{P}_{(q_0,\ldots,q_r)}$ *son isomorfos si se cumplen alguna de las siguientes propiedades:*

1. *Si* $(q_0,\ldots,q_r)$ *es una permutación de* $(p_0,\ldots,p_r)$.
2. *Si existe* $n \geq 0$ *tal que* $(q_0,\ldots,q_r) = (np_0,\ldots,np_r)$.
3. *Si tomamos:*
   - $d_i = \mathrm{mcd}(p_0,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_r)$.
   - $a_i = \mathrm{mcm}(d_0,\ldots,d_{i-1},d_{i+1},\ldots,d_r)$.
   - $a = \mathrm{mcm}(d_0,\ldots,d_r)$.
   - $(q_0,\ldots,q_n) = \left(\dfrac{p_0}{a_0}, \dfrac{p_1}{a_1}, \ldots, \dfrac{p_r}{a_r}\right)$.

   *Entonces* $\mathbb{P}_{(p_0,\ldots,p_r)}$, $\mathbb{P}_{(q_0,\ldots,q_r)}$. *Notar que* $a_i | q_i$, $\mathrm{mcd}(a_i,d_i) = 1$ *y que* $a_i d_i = a$.

*Demostración.* La demostración se encuentra en el artículo ”Weighted projective varieties” de Igor Dolgachev. □

**Corolario 13.16.** *Si asumimos que* $q_i = a_i$ *para* $i = 0,\ldots,r$ *entonces* $\mathbb{P}_{(q_0,\ldots,q_r)} \cong \mathbb{P}^r$. *(Esto ocurre, por ejemplo, cuando todos los números* $\frac{\mathrm{mcm}(p_0,\ldots,p_r)}{p_i}$ *son coprimos). Notar que en el caso* $r = 1$ *si tenemos dos números primos entre sí* $p$ *y* $q$ *entonces* $\mathbb{P}_{(p,q)} \cong \mathbb{P}$.

## 14. Polinomios cuasihomogéneos

**Definición 14.1.** Diremos que un polinomio $f \in R[x_1,\ldots,x_n]$ es *$\omega$-cuasihomogéneo de grado $d$* siendo $\omega := (q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{Z}^n$ o simplemente, cuasihomogéneo de pesos $(q_1,\ldots,q_n)$ cuando:

$$f(t^{q_1}x_1,\ldots,t^{q_n}x_n) = t^d f(x_1,\ldots,x_n).$$

**Nota 14.2.** Notar que $f$ es de la forma $f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ con $a_\alpha \in R$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $\sum_{i=1}^n \alpha_i q_i = d$.

**Teorema 14.3.** *Sea $K$ un cuerpo de característica $0$. Un polinomio no nulo $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ es cuasihomogéneo de pesos $(k_1, \dots, k_n)$ y grado $d$ si y sólo si satisface la siguiente ecuación diferencial parcial de Euler:*

$$\sum_{j=1}^{n} k_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = df.$$

*Demostración.* Sabemos que cuando $f$ es cuasihomogéneo de grado $d$, es de la forma:

$$\sum_{k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=d} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} k_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^{n} k_j x_j \sum_{k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=d} k_j \alpha_j x_j a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_j^{\alpha_j-1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \\ &= \sum_{k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=d} (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n) a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = df \end{aligned}$$

Para probar el recíproco escribimos el polinomio $f$ como $f = f_{d_1} + \cdots + f_{d_r}$, donde los $f_{d_s}$ son cuasihomogéneos de grado $d_s$ con pesos $k_1, \dots, k_n$. Entonces, como ya hemos probado,

$$\sum_{j=1}^{n} k_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = d_1 f_{d_1} + \cdots + d_r f_{d_r}.$$

Puesto que ahora $f$ satisface la ecuación diferencial de Euler, se sigue que $d_1 f_{d_1} + \cdots + d_r f_{d_r} = df_{d_1} + \cdots + df_{d_r}$, y por tanto, comparando coeficientes (la característica de $K$ es 0), $r = 1$ y $d = d_1$, así que $f$ es cuasihomogéneo. □

**Nota 14.4.** Si $D$ representa el operador diferencial parcial $D = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, el teorema anterior se lee $Df = df$ y es fácil observar que se tiene $D^r f = d^r f$.

Sean $p, q, r \in \mathbb{N}$ y consideremos $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio cualquiera, tomemos $\tilde{f} = f(x^p, y^q)$ de grado $d$ y consideremos el polinomio $\tilde{F}(x^p, y^q, z) := z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, entonces $\tilde{F}$ es un polinomio homogéneo, y si las potencias de $z$ que aparecen en $\tilde{F}$ son múltiplos de $r$ entonces podemos construir el polinomio $F(x, y, z) := \tilde{F}(x^{\frac{1}{p}}, y^{\frac{1}{q}}, z^{\frac{1}{r}})$ que será cuasihomogéneo de pesos $\omega = (p, q, r)$.

**Definición 14.5.** En el caso anterior a $F$ lo llamamos *cuasihomogeneización* de $f$ (siempre que ésto sea posible). Recíprocamente si $F$ es un polinomio cuasihomogéneo, entonces el polinomio $f(x, y) = F(x, y, 1)$ lo denominamos *cuasideshomogeneización* con respecto a $z$.

**Notación 14.6.** Cuando no haya lugar a confusión y trabajemos con polinomios cuasihomogéneos usaremos los términos *homogeneización* en lugar de *cuasihomogeneización* y *deshomogeneización* en lugar de *cuasideshomogeneización*.

## 15. Espacios Proyectivos Ponderados

Sea $\omega := (k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $\mathrm{mcd}(\omega) = 1$. Diremos que $\omega$ es un peso. Consideremos la siguiente acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$t \cdot (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (t^{k_0} z_0, t^{k_1} z_1, \dots, t^{k_n} z_n)$$

que denotaremos $t \cdot \mathbf{x}$

**Definición 15.1.** El *espacio proyectivo ponderado* $\mathbb{P}^n_\omega$ *de peso* $\omega$ es el cociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ por la accion anterior de $\mathbb{C}^*$.

Para representar este espacio utilizaremos coordenadas $\omega-$*cuasihomogéneas* $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]_\omega$, donde

$$[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]_\omega = [t^{k_0} z_0 : t^{k_1} z_1 : \cdots : t^{k_n} z_n]_\omega, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

Para entender la estructura analítica de este espacio (fuera de los puntos intersección de los ejes nuestro espacio es isomorfo a $\mathbb{C}^n$) utilizaremos *falsas cartas* siguiendo una construcción análoga a la del espacio proyectivo usual. Consideremos los abiertos $U_{z_i} \subset \mathbb{P}^n_\omega$ cuyos puntos son aquellos cuya coordenada $\omega$-cuasihomogénea $i$-ésima es no nula, es decir $U_{z_i} := \big\{[z_0 : z_1 : \cdots : 1_{(i)} : \cdots : z_n]_\omega | z_j \in \mathbb{C}\big\}$. Consideremos la aplicación

$$\tilde{\Psi^\omega_{z_i}} : \mathbb{C}^n \to U_{z_i}, \quad \tilde{\Psi^\omega_{z_i}}(z_1, \dots, z_n) := [z_1 : z_2 : \cdots : 1_{(i)} : \cdots : z_n]_\omega.$$

Nuestra aplicación $\tilde{\Psi^\omega_{z_i}}$ no es inyectiva y por tanto no tiene inversa. De ahí que no podamos usar las "cartas tradicionales" con nuestros espacios proyectivos ponderados para dotarles así de una estructura analítica como la vista en la sección 4. De hecho tenemos que

$$\tilde{\Psi^\omega_{x_i}}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\Psi^\omega_{y_i}}(y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists\ \xi_{k_i} \in \mu_{k_i} \text{ tal que } y_j = \xi_{k_i}^{k_j} x_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Observemos que de manera natural surge una aplicación $\Psi^\omega_{x_i}$ tal que:

$$U_{z_i} \subset \mathbb{P}^n_\omega \quad \overset{(\Psi^\omega_{z_i})^{-1}}{\to} \quad X_{(k_i;k_0,..,\widehat{k_i},\dots,k_n)}$$

$$[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \quad \overset{(\Psi^\omega_{z_i})^{-1}}{\longmapsto} \quad \left[\left(\frac{z_0}{(z_i)^{\frac{k_0}{k_i}}}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{(z_i)^{\frac{k_n}{k_i}}}\right)\right]$$

Si tomamos $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \in U_{z_j}$; como $z_j \neq 0$, tenemos

$$[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] = \left[\frac{z_0}{(z_i)^{\frac{k_0}{k_i}}}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{(z_i)^{\frac{k_n}{k_i}}}\right],$$

lo que permite establecer una biyección $\Psi^\omega_{z_j} : X_{(k_i;k_0,..,\widehat{k_i},\dots,k_n)} \to U_{z_j}$, ya que las restantes coordenadas están determinadas.

Es fácil observar que trivialmente $\tilde{\Psi^\omega_{z_i}}$ induce pues un isomorfismo $\Psi^\omega_{z_i} : X_{(k_i;k_0,k_1,\dots,k_n)} \to U_{z_i}$ y por tanto podemos considerar $\mathbb{P}^n_\omega$ como una variedad analítica con singularidades cociente.

Notar que los cambios de cartas son isomorfismos en los anillos locales de cada punto. En la siguiente sección describiremos con detalle los anillos locales en los distintos puntos para los planos proyectivos ponderados.

**Ejemplo 15.2.** Consideremos el caso $n = 1$, $\omega := (p, q)$, con $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$. En este caso tenemos un isomorfismo tal que $\mathbb{P}_\omega \cong \mathbb{P}$. El isomorfismo está definido por

$$[x : y]_\omega \mapsto [x^q : y^p].$$

Vamos a considerar ahora únicamente el caso $n = 2$. Sea $\omega := p_x, p_y, p_z$, $\gcd \omega = 1$.

**Ejemplo 15.3.** Denotemos $d_x := \operatorname{mcd}(p_y, p_z)$, $d_y := \operatorname{mcd}(p_x, p_z)$ y $d_z := \operatorname{mcd}(p_x, p_y)$. Como $p_x$, $p_y$ y $p_z$ son coprimos, tenemos que $q_x := \dfrac{p_x}{d_y d_z} \in \mathbb{Z}$. Lo mismo ocurre con $q_y := \dfrac{p_y}{d_x d_z}$ y $q_z := \dfrac{p_z}{d_x d_y}$. Además $\nu := (q_x, q_y, q_z)$ cumple que sus componentes son dos a dos primos entre sí.

El plano proyectivo ponderado $\mathbb{P}^2_\omega$ está cubierto por tres *cartas*. Estudiemos la primera de ellas, es decir, la que corresponde a $U_x := \{[1:y:z]_\omega | y,z \in \mathbb{C}\}$. Para esta carta tenemos un isomorfismo

$$\Psi^\omega_x : X_{(p_x;p_y,p_z)} \to U_x \qquad [(x,y)] \mapsto [1:y:z]_\omega.$$

Podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 15.4.** *La aplicación $X_{(p_x;p_y,p_z)} \to X_{(q_x;q_y,q_z)}$, dada por $[(x,y)] \mapsto [(x^{d_y}, y^{d_z})]$, está bien definida y es un isomorfismo analítico.*

*Demostración.* Consideremos $(y,z) \in \mathbb{C}^2$ y $\xi_{p_z} \in \mu_{p_z}$. Como elementos de $X_{(p_x;p_y,p_z)}$ tenemos $[(y,z)] \mapsto [(\xi^{p_y}_{p_x} y, \xi^{p_z} y_{p_x} z)]$. Observemos que $\xi^{p_y}_{p_x} = (\xi^{d_x d_z}_{p_x})^{q_y}$ y $\xi^{p_z}_{p_x} = (\xi^{d_x d_y}_{p_x})^{q_z}$.

Observemos que $\xi^{d_x d_y d_z}_{p_x} \in \mu_{q_x}$. Por tanto, las imágenes de $[(y,z)]$ y $[(\xi^{p_y}_{p_x} y, \xi^{p_z} y_{p_x} z)]$ son :

$$[(y^{d_y}, z^{d_z})] \text{ y } [(\xi^{p_y}_{p_x} y^{d_y}, \xi^{p_z} y_{p_x} z^{d_z})] \text{ en } X_{(q_x;q_y,q_z)}.$$

Deducimos que la aplicación está bien definida. Es más, como $p_x$ y $d_x$ son primos entre sí, $\mu_{q_x} = \left\{\xi^{d_x d_y d_z}_{p_x} | \xi_{p_x} \in \mu_{p_x}\right\}$. Por tanto se trata de un isomorfismo. □

**Corolario 15.5.** *La aplicación $\mathbb{P}^2_\omega \to \mathbb{P}^2_\nu$ dada por*

$$[x:y:z]_\omega \mapsto [x^{d_x} : y^{d_y} : z^{d_z}]_\nu,$$

*es un isomorfismo.*

## 16. Curvas en Planos Proyectivos Ponderados

El plano proyectivo ponderado $\mathbb{P}^2_\omega$ está cubierto por tres *cartas*. Para la primera de ellas, es decir, la que corresponde a $U_x := \{[1:y:z]_\omega | y,z \in \mathbb{C}\}$, tenemos un isomorfismo que denotaremos

$$\Psi^\omega_x : X_{(p_x;p_y,p_z)} \to U_x \qquad [(y,z)] \mapsto [1:y:z]_\omega$$

(análogamente con las otras dos cartas).

En esta sección consideraremos polinomios cuasihomogéneos sin componentes comunes $F_1$ y $F_2$ de pesos $\omega = (p_x,p_y,p_z) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{0\}$ y las curvas asociadas a éstos, $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ en $\mathbb{P}^2_\omega = \operatorname{Proj}(B,(p_x,p_y,p_z))$. Si tomamos $P := [(x_0,y_0,z_0)] \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ definiremos más adelante la multiplicidad de intersección de las dos curvas en dicho punto y la denotaremos $\operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$.

Notar también que a partir de ahora, cuando trabajemos con anillos locales locales lo haremos de forma analítica en vez de algebraica, como hemos hecho en la sección de variedades afines, es decir, en vez de tomar por ejemplo, $O_p(\mathbb{A}^2) = \mathbb{C}[x,y]_{\mathfrak{M}_p} \subseteq \mathbb{C}\{x,y\}$ tomaremos como $O_p(\mathbb{A}^2) = \mathbb{C}\{x,y\}$.

**Definición 16.1.** Entenderemos por *divisor de Weyl* sobre una variedad algebraica $X$ a una combinación lineal entera de subvariedades de codimensión 1.

**Definición 16.2.** Entenderemos por *divisor de Cartier* sobre una variedad algebraica $X$ la definición 11.1

**Definición 16.3.** Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_\omega$ es una curva irreducible, entonces existe $F \in B$ homogéneo e irreducible tal que $\mathcal{C} = V(F)$. Definimos el *grado de* $\mathcal{C}$, $\deg \mathcal{C} := \deg F$ ($\deg F = i$ donde $F \in B_i$).

$$\begin{array}{rccc} \deg: & \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \sum_i a_i \mathcal{C}_i & \longmapsto & \sum_i a_i \deg \mathcal{C}_i \end{array}$$

**Notación 16.4.** Sea $\mathbb{P}^2_\omega$, denotaremos $e := \mathrm{mcm}(p_x, p_y, p_z)$ siendo $\omega = (p_x, p_y, p_z)$. Notar que $e = p_x p_y p_z$ ya que podemos suponer sin pérdida de generalidad por el resultado 13.14 que $p_x, p_y, p_z$ son primos dos a dos,

Consideremos las siguientes aplicaciones:

- $$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{P}^2 \setminus \{xyz = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^2_\omega \setminus \{xyz = 0\} \\ & [x:y:z] & \longmapsto & [x^{p_x} : y^{p_y} : z^{p_z}]_\omega \end{array}$$
  La aplicación $\phi$ es una cubierta regular de $p_x p_y p_z$ hojas. En caso de tomar $\phi : \mathbb{P}^2_\omega \longrightarrow \mathbb{P}^2$ lo que nos queda es una cubierta ramificada que ramifica en los puntos situados en los ejes. La aplicación $\phi$ induce $\phi^*$ que es un morfismo del anillo de coordenas del plano proyectivo ponderado al anillo de coordenadas del plano proyectivo. Por ejemplo, si tomamos el polinomio $x^6 - y^3 + z^2$ cuyo lugar de ceros es una curva que vive en $\mathbb{P}^2_{(1,2,3)}$ tenemos que $\phi^*(x^6 - y^3 + z^2) = x^6 - y^6 + z^6$ que da lugar a una curva en el plano proyectivo.
- $$\begin{array}{rccc} \psi_z: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & X_{(p_z;p_x,p_y)} \\ & (x,y) & \longmapsto & [(x,y)] \end{array}$$
  El par $(\mathbb{C}^2, \psi_z)$ es una cubierta del espacio $X_{(p_z;p_x,p_y)}$ (se construyen de forma análoga las cubiertas para $X_{(p_x;p_y,p_z)}$ y $X_{(p_y;p_x,p_z)}$).

**Nota 16.5.**

- Notar que dado $F$ un polinomio cuasi-homogéneo de pesos $(p_x, p_y, p_z)$, la aplicación $\phi^*$ lo lleva a un polinomio $\tilde{F}$ que es homogéneo.
- Notar también que la aplicación $\phi^*$ conserva grados.
- Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2 \in \mathbb{P}^2_\omega$ tal que $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2 = V(F_2)$ con $F_1, F_2 \in (B, (p_x, p_y, p_z))$ y sean $\tilde{F_1} := \phi^*(F_1)$ y $\tilde{F_2} := \phi^*(F_2) \in (B, (1,1,1))$, denotamos $\tilde{\mathcal{C}_1} = V(\tilde{F_1})$ y $\tilde{\mathcal{C}_2} = V(\tilde{F_2})$. Sabemos que $\phi^{-1}(P) := \left\{ \tilde{P} \in \mathbb{P}^2 |\ \phi(\tilde{P}) = P \right\}$ es un conjunto finito. Tomemos $P \in V(F_1 \cap F_2)$, entonces si $\tilde{P} \in \phi^{-1}(P) \Rightarrow \tilde{P} \in V(\tilde{F_1} \cap \tilde{F_2}) = \tilde{\mathcal{C}_1} \cap \tilde{\mathcal{C}_2}$.

*Observación* 16.6. Notar que:

- Para todo $\tilde{P_i} \in \phi^{-1}(P)$ tenemos que $\mathrm{mult}_{\tilde{P_i}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) = \mathrm{mult}_{\tilde{P_j}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2})$. La demostración es obvia y proviene de la propia definición de cubierta en un punto.
- Sabemos que
  $$O_{(\mathbb{C}^2,(a,b))} \cong \mathbb{C}\{u, v\},$$
  el anillo de las series convergentes en $u$ y $v$, siendo $u = x + a$ y $v = x + b$; por comodidad lo denotaremos $\mathbb{C}\{x + a, y + b\}$. Por tanto
  $$O_{(\mathbb{C}^2,(a,b))} \cong \mathbb{C}\{x + a, y + b\}.$$
- Si por ejemplo tenemos $[(a,b)] \in X_{(p_z;p_x,p_y)}$ con $ab \neq 0$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(a,b)])} & = & \left\{ h(x+a, y+b) \in \mathbb{C}\{x+a, y+b\} \,|h(\xi_{p_z}^{p_x} x + a, \xi_{p_z}^{p_y} y + b) = h(x+a, y+b) \right\} \cong \\ & \cong & \mathbb{C}\{x+a, y+b\} \end{array}.$$

El último isomorfismo proviene de que localmente (en un entorno del punto lo suficientemente pequeño) nuestra aplicación $\tilde{\Psi_{z_i}^{\omega}}$ es un isomorfismo.

- Si $b=0$ y $a\neq 0$(resp $a=0$ y $b\neq 0$) entonces,

$$\begin{array}{rcl} O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(a,0)])} & = & \left\{h(x+a,y)\in\mathbb{C}\left\{x+a,y\right\}|h(\xi_{p_z}^{p_x}x+a,\xi_{p_z}^{p_y}y)=h(x+a,y)\right\}\cong \\ & \cong & \mathbb{C}\left\{x+\xi_{p_z}^{p_x}a,y\right\}\cong\mathbb{C}\left\{x+a,y\right\} \end{array}.$$

- Si estamos en la intersección de dos ejes por ejemplo $y=0,\ z=0$ tenemos

$$O_{(X_{(p_x;p_y,p_z)},[(0,0)])}\cong O_{(X_{(p_x;p_y,p_z)})}$$

siendo $O_{(X_{(p_x;p_y,p_z)})}$ el anillo de las funciones sobre $X_{(p_x;p_y,p_z)}$, es decir:

$$O_{(X_{(p_x;p_y,p_z)})}=\left\{f\in\mathbb{C}\{y,z\}|\ f(\xi_{p_x}^{p_y}y,\xi_{p_x}^{p_z}z)=f(y,z)\text{ con }\xi_{p_x}^{p_x}=1\right\}.$$

**Notación 16.7.** Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2\subset\mathbb{P}^2_\omega$ tal que $\mathcal{C}_1=V(F)$ y $\mathcal{C}_2=V(G)$ y $P\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$, denotaremos $k:=\#\{\phi^{-1}(P)\}$.

**Definición 16.8.** Definimos la *multiplicidad A de la intersección de dos curvas* $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2\subset\mathbb{P}^2_\omega$ en un punto $P\in\mathbb{P}^2_\omega$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{mult}^A_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2):=\frac{1}{e}\sum_{\tilde{P}\in\phi^{-1}(P)}\operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2}).$$

**Definición 16.9.** Sean $\mathcal{C}_1=V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2=V(F_2)\subset\mathbb{P}^2_\omega$ y $P\in\mathbb{P}^2_\omega$ que suponemos de la forma $P=[(x_0,y_0,1)]\in\mathbb{P}^2_\omega$, consideramos $p:=[(x_0,y_0)]=\Psi^\omega_z(P)$, el punto visto en la carta adecuada, y sean $f_1$ y $f_2$ los deshomogeneizados de $F_1$ y $F_2$ (con respecto a la tercera variable) respectivamente, entonces definimos la *multiplicidad B de la intersección de dos curvas* $\mathcal{C}_1=V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2=V(F_2)\subset\mathbb{P}^2_\omega$ en un punto $P\in\mathbb{P}^2_\omega$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{mult}^B_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2):=\begin{cases}\dim\dfrac{\mathbb{C}\left\{x+x_0,y+y_0\right\}}{(f_1(x+x_0,y+y_0),f_2(x+x_0,y+y_0))} & \text{si } p \text{ no es el origen de } X_{(p_z;p_x,p_y)}.\\ \dfrac{1}{p_z}\dim\dfrac{\mathbb{C}\left\{x,y\right\}}{(f_1(x,y),f_2(x,y))} & \text{si } p \text{ es el origen de } X_{(p_z;p_x,p_y)}.\end{cases}$$

En caso de que la tercera coordenada de nuestro punto $P$ fuera nula, elegiríamos una coordenada no nula de éste y procederíamos de forma análoga a lo anterior.

**Definición 16.10.** Sean $f$ y $g$ dos funciones polinómicas (respetan la acción) de $X_{(p_x;p_y,p_z)}$ en $\mathbb{C}$. Definimos la multiplicidad de la intersección de $f$ y $g$ en un punto $p\in X_{(p_x;p_y,p_z)}$ como:

$$\operatorname{mult}_p(f,g):=\dim\frac{O_{(X_{(p_x;p_y,p_z)})}}{(f,g)},$$

**Definición 16.11.** Sean $\mathcal{C}_1=V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2=V(F_2)\subset\mathbb{P}^2_\omega$ y $P\in\mathbb{P}^2_\omega$ que suponemos de la forma $P=[(x_0,y_0,1)]\in\mathbb{P}^2_\omega$, consideramos $p:=[(x_0,y_0)]=\Psi^\omega_z(P)$, el punto visto en la carta adecuada, y sean $f_1$ y $f_2$ los deshomogeneizados de $F_1$ y $F_2$ (con respecto a la tercera variable) respectivamente. Sea $\widehat{f_i}\in O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(x_0,y_0)])}$ tal que

$$\widehat{f_i}=\begin{cases} f_i & \text{si } f_i\in O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(x_0,y_0)])}\\ f_i^{p_z} & \text{si } f_i\notin O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(x_0,y_0)])}\end{cases}$$

(Notar que $V(f_i)=V(\widehat{f_i})\quad i=1,2$)

Definimos la *multiplicidad C de la intersección de dos curvas* $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2 = V(F_2) \subset \mathbb{P}^2_\omega$ en un punto $P \in \mathbb{P}^2_\omega$ de la siguiente manera:

$$mult^C_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) := \begin{cases} \dim \dfrac{O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(x_0,y_0)])}}{(\widehat{f}, \widehat{g})} & \text{si } \widehat{f}_1 = f_1 \text{ y } \quad \widehat{f}_2 = f_2 \\ \dfrac{1}{p_z} \dim \dfrac{O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(x_0,y_0)])}}{(\widehat{f}, \widehat{g})} & \text{si } \widehat{f}_1 = f_1^{p_z} \text{ o } \widehat{f}_2 = f_2^{p_z} \\ \dfrac{1}{p_z^2} \dim \dfrac{O_{(X_{(p_z;p_x,p_y)},[(x_0,y_0)])}}{(\widehat{f}, \widehat{g})} & \text{si } \widehat{f}_1 = f_1^{p_z} \text{ y } \widehat{f}_2 = f_2^{p_z} \end{cases}$$

En caso de que la tercera coordenada de nuestro punto $P$ fuera nula, elegiríamos una coordenada no nula de éste y procederíamos de forma análoga a lo anterior.

**Nota 16.12.** Notar que las definiciones 16.8, 16.9 y 16.11 están bien definidas en el sentido de que no dependen de la carta que elijamos, ya que los cambios de cartas son isomorfismos en los anillos locales.

**Lema 16.13.** *Sean $f$ y $g \in \mathbb{C}\{x, y^q\}$, consideremos los ideales $I := \mathbb{C}\{x, y\} < f, g >$ y $J := \mathbb{C}\{x, y^q\} < f, g >$, entonces tenemos que*

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{I} \cong \bigoplus_{j=0}^{q-1} y^j \frac{\mathbb{C}\{x, y^q\}}{J}$$

*Demostración.* Tenemos una descomposición del anillo de las series convergentes

$$\mathbb{C}\{x, y\} \cong \bigoplus_{j=0}^{q-1} y^j \mathbb{C}\{x, y^q\}$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{x, y\} & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{j=0}^{q-1} y^j \mathbb{C}\{x, y^q\} \\ f & \longmapsto & (f_0, \ldots, f_{q-1}) \end{array}$$

con $f_j \in y^j \mathbb{C}\{x, y^q\}$. Dado que $f$ y $g \in \mathbb{C}\{x, y^q\}$ tenemos que

$$I = \bigoplus_{j=0}^{q-1} y^j J$$

y se sigue que

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{I} \cong \bigoplus_{j=0}^{q-1} y^j \frac{\mathbb{C}\{x, y^q\}}{J}$$

□

**Proposición 16.14.** *Las definiciones 16.8 y 16.9 de multiplicidad son equivalentes, es decir*

$$\mathrm{mult}^A_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \mathrm{mult}^B_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2).$$

*Demostración.* Sean $\mathcal{C}_1 = V(F)$ y $\mathcal{C}_2 = V(G) \subset \mathbb{P}^2_\omega$ y $P \in \mathbb{P}^2_\omega$ y supongamos sin pérdida de generalidad que nuestro punto es de la forma $P = [(x_0^{p_x}, y_0^{p_y}, z_0^{p_z})] \in \mathbb{P}^2_\omega$. Vamos a distinguir tres casos:

- Supongamos que nuestro punto es de la forma $P = [(x_0^{p_x}, y_0^{p_y}, z_0^{p_z})] \in \mathbb{P}^2_\omega$ con $x_0y_0z_0 \neq 0$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{mult}_P^A(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &:= \frac{1}{p_xp_yp_z} \sum_{\tilde{P} \in \phi^{-1}(P)} \operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) \\
&= \frac{p_xp_yp_z}{p_xp_yp_z} \operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x + x_0, y + y_0\}}{(f(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y} + y_0^{p_y}), g(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y} + y_0^{p_y}))} \\
&\overset{*}{=} \dim \frac{\mathbb{C}\left\{x + x_0^{p_x}, y + y_0^{p_y}\right\}}{(f(x + x_0^{p_x}, y + y_0^{p_y}), g(x + x_0^{p_x}, y + y_0^{p_y}))}
\end{aligned}$$

Notar que la última igualdad se debe a que $\phi$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}\left\{x + x_0^{p_x}, y + y_0^{p_y}\right\} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}\{x + x_0, y + y_0\} \\
1 & \longmapsto & 1 \\
x + x_0^{p_x} & \longmapsto & x^{p_x} + x_0^{p_x} = (x + x_0)u \\
y + y_0^{p_y} & \longmapsto & y^{p_y} + y_0^{p_y} = (y + y_0)v
\end{array}$$

con $u$ y $v$ unidades del anillo de las series formales y por tanto nos queda que:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}\left\{x + x_0^{p_x}, y + y_0^{p_y}\right\} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}\{x + x_0, y + y_0\} \\
h(x + x_0^{p_x}, y + y_0^{p_y}) & \longmapsto & h(x + x_0, y + y_0)
\end{array}$$

- Supongamos que nuestro punto es $P = [(x_0^{p_x}, y_0^{p_y}, z_0^{p_z})]$ con $x_0y_0z_0 = 0$ pero con dos componentes no nulas, por ejemplo $P = [(x_0^{p_x}, 0, z_0^{p_z})]$. En este caso la cubierta $\phi$ ramifica y tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{mult}_P^A(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &:= \frac{1}{p_xp_yp_z} \sum_{\tilde{P} \in \phi^{-1}(P)} \operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) \\
&= \frac{p_xp_z}{p_xp_yp_z} \operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{1}{p_y} \dim \frac{\mathbb{C}\{x + x_0, y\}}{(f(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y}), g(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y}))} \\
&\overset{*}{=} \dim \frac{\mathbb{C}\{x + x_0^{p_x}, y\}}{(f(x + x_0^{p_x}, y), g(x + x_0^{p_x}, y))}
\end{aligned}$$

Notar que la última igualdad se debe a que la aplicación

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}\{x + x_0^{p_x}, y\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x + x_0, y\} \\
1 & \longmapsto & 1 \\
x + x_0^{p_x} & \longmapsto & x^{p_x} + x_0^{p_x} = (x + x_0)u \\
y & \longmapsto & y
\end{array}$$

es un isomorfismo, y que, por otra parte tenemos que

$$\frac{\mathbb{C}\{x + x_0, y\}}{(f(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y}), g(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y}))} \overset{16,13}{\cong} \bigoplus_{j=0}^{p_y - 1} y^j \frac{\mathbb{C}\{x + x_0, y^{p_y}\}}{(f(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y}), g(x^{p_x} + x_0^{p_x}, y^{p_y}))}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\dim \frac{\mathbb{C}\{x+x_0,y\}}{(f(x^{p_x}+x_0^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x}+x_0^{p_x},y^{p_y}))} &= \dim \bigoplus_{j=0}^{p_y-1} y^j \frac{\mathbb{C}\{x+x_0,y^{p_y}\}}{(f(x^{p_x}+x_0^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x}+x_0^{p_x},y^{p_y}))} = \\ &= \bigoplus_{j=0}^{p_y-1} \dim y^j \frac{\mathbb{C}\{x+x_0,y^{p_y}\}}{(f(x^{p_x}+x_0^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x}+x_0^{p_x},y^{p_y}))} = \\ &= p_y \dim \frac{\mathbb{C}\{x+x_0,y\}}{(f(x^{p_x}+x_0^{p_x},y),g(x^{p_x}+x_0^{p_x},y))}.\end{aligned}$$

- Supongamos que nuestro punto es $P=[(0,0,z_0^{p_z})]$. En este caso tanto la cubierta $\phi$ como la cubierta $\psi$ ramifican y la situación que tenemos es:

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}_P^A(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) &:= \frac{1}{p_xp_yp_z}\sum_{\tilde{P}\in\phi^{-1}(P)} \operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2}) \\ &= \frac{1}{p_xp_yp_z}\operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{1}{p_xp_yp_z}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f(x^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x},y^{p_y}))} \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{p_z}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f(x,y),g(x,y))}\end{aligned}$$

Notar que la última igualdad se debe a que

$$\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f(x^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x},y^{p_y}))} \overset{16,13}{\cong} \bigoplus_{j=0}^{p_y-1}\left(\bigoplus_{i=0}^{p_x-1} x^iy^j\frac{\mathbb{C}\{x^{p_x},y^{p_y}\}}{(f(x^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x},y^{p_y}))}\right)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f(x^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x},y^{p_y}))} &= \dim\bigoplus_{j=0}^{p_y-1}\left(\bigoplus_{i=0}^{p_x-1} x^iy^j\frac{\mathbb{C}\{x^{p_x},y^{p_y}\}}{(f(x^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x},y^{p_y}))}\right) = \\ &= \bigoplus_{i=0}^{p_x-1}\bigoplus_{j=0}^{p_y-1}\dim x^iy^j\frac{\mathbb{C}\{x^{p_x},y^{p_y}\}}{(f(x^{p_x},y^{p_y}),g(x^{p_x},y^{p_y}))} = \\ &= p_xp_y\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f(x,y),g(x,y))}\end{aligned}$$

□

**Proposición 16.15.** *Sean* $f,\ g\in\mathbb{C}[x,y]\subset\mathbb{C}\{x,y\}$ *tal que* $\operatorname{mcd}(f,g)=1$ *y* $n\in\mathbb{N}$ *entonces:*

$$\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}\cong\frac{(f^n,g)}{(f^{n+1},g)}$$

*Demostración.* Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)} & \xrightarrow{\varphi} & \dfrac{(f^n,g)}{(f^{n+1},g)} \\ {[h]} & \longmapsto & [f^nh]\end{array}$$

Veamos que $\varphi$ es un isomorfismo:

- *Inyectiva.* Sea $[h] \in \dfrac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}$ tal que $f^n h \in (f^{n+1}, g)$, en este caso $f^n h = uf^{n+1} + vg$ y tomando $w = \frac{v}{f^n} \subset \mathbb{C}\{x,y\}$ tenemos que $h = uf + wg$, y por tanto $[h] = [0]$. Así pues el núcleo de la aplicación es nulo y por tanto la aplicación es inyectiva.
- *Suprayectiva.* Claramente la aplicación es suprayectiva ya que todo $[h] \in \dfrac{(f^n, g)}{(f^{n+1}, g)}$ es de la forma $[h] = [f^n u]$ (notar que $f$ no divide a $u$) y me basta tomar $[u] \in \dfrac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}$.

□

**Lema 16.16.** *Sean $f,\ g \in \mathbb{C}[x,y] \subset \mathbb{C}\{x,y\}$ tal que $\operatorname{mcd}(f,g) = 1$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces:*

$$\dim \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f^n, g)} = n \dim \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}$$

*Demostración.* Sabemos que si tenemos una cadena de espacios vectoriales sobre $K$

$$0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_n = V$$

con $\frac{H_j}{H_{j-1}} \cong K$, entonces $\dim V = n \dim K$. Construimos la siguiente cadena

$$0 \subseteq \frac{(f^{n-1}, g)}{(f^n, g)} \subseteq \frac{(f^{n-2}, g)}{(f^n, g)} \subseteq \cdots \subseteq \frac{(f,g)}{(f^n,g)} \subseteq \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}$$

y aplicando el tercer teorema de isomorfía y la proposición anterior 16.15 tenemos que

$$\frac{\dfrac{(f^{n-i-1}, g)}{(f^n, g)}}{\dfrac{(f^{n-i}, g)}{(f^n, g)}} \cong \frac{(f^{n-i-1}, g)}{(f^{n-i}, g)}$$

y por tanto

$$\dim \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f^n, g)} = n \dim \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}.$$

□

**Proposición 16.17.** *Sean $p \in \mathbb{C}^2$, $f,\ g,\ h \in O_p(\mathbb{A}^2) = \mathbb{C}[x,y]_{\mathfrak{M}_p} \subseteq \mathbb{C}\{x,y\}$, $f$ y $g$ sin componentes comunes. Tenemos que:*

$$\dim \frac{O_p(\mathbb{A}^2)}{(f, gh)} = \dim \frac{O_p(\mathbb{A}^2)}{(f,g)} + \dim \frac{O_p(\mathbb{A}^2)}{(f,h)}$$

*Demostración.* La demostración de esto se encuentra en el libro de Fulton, sección 3.3 teorema 3, apartado 6. Notar que al coincidir

$$\dim \frac{O_p(\mathbb{A}^2)}{(f,g)} = \dim \frac{\mathbb{C}[x,y]_{\mathfrak{M}_p}}{(f,g)} = \dim \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)},$$

ésto nos da de manera directa nuestro resultado en series convergentes. □

**Corolario 16.18.** *La definición 16.11 es equivalente a las definiciones 16.8 y 16.9.*

**Definición 16.19.** Definimos la *multiplicidad de la intersección de dos curvas* $\mathcal{C}_1 = V(F_1)$ y $\mathcal{C}_2 = V(F_2) \subset \mathbb{P}^2_\omega$ en un punto $P \in \mathbb{P}^2_\omega$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) := \operatorname{mult}^A_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \operatorname{mult}^B_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \operatorname{mult}^C_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$$

**Teorema 16.20** (Teorema de Bézout para planos proyectivos ponderados)**.** *Si $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ son curvas planas en $\mathbb{P}^2_\omega$ sin componentes comunes, entonces*

$$\sum_{P\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2} \operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \frac{1}{e}\deg\mathcal{C}_1\deg\mathcal{C}_2.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2} \operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) &= \sum_{P\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2}\left(\frac{1}{e}\sum_{\tilde{P}\in\phi^{-1}(P)}\operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2})\right) = \\ &= \frac{1}{e}\sum_{\tilde{P}\in\tilde{\mathcal{C}_1}\cap\tilde{\mathcal{C}_2}}\operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{1}{e}\deg\tilde{\mathcal{C}_1}\deg\tilde{\mathcal{C}_2} = \\ &= \frac{1}{e}\deg\mathcal{C}_1\deg\mathcal{C}_2.\end{aligned}$$

□

Sea $F$ un polinomio cuasihomogéneo tal que $F=\prod_i F_i^{n_i}$, con $F_i$ polinomios irreducibles. Su divisor asociado es $\sum_i n_i V(F_i) := \sum_i n_i\mathcal{C}_i$

**Definición 16.21.** Dedinimos la multiplicidad de intersección de dos divisores en un punto $P\in\mathbb{P}^2\omega$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{mult}_P(\sum_i n_i\mathcal{C}_i,\sum_j m_j\mathcal{C}_j) := \sum_{i,j} n_i m_j \operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_i,\mathcal{C}_j).$$

Dicha definición generaliza la ya dada en curvas sin componentes múltiples.

Nos interesaría saber quién juega el papel de recta en los planos proyectivos.

En el plano proyectivo, las rectas son las únicas curvas que, por el teorema de Bézout, cumplen que, siendo $\mathcal{C}_r = V(F)$, con $F$ polinomio homogéneo de grado 1:

$$\sum_{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}_r}\operatorname{mult}_P(\mathcal{C},\mathcal{C}_r) = \deg\mathcal{C}\deg\mathcal{C}_r = \deg\mathcal{C}.$$

Esto nos da pie a la siguiente definición:

**Definición 16.22.** Diremos que la curva $\mathcal{C}\subset\mathbb{P}^2_\omega$, con pesos $\omega=(p_x,p_y,p_z)$, es una recta del plano proyectivo ponderado si $\mathcal{C}=V(F)$ con $F$ un polinomio cuasiohomogéneo de la forma:

$$F := \alpha x^{p_y p_z} + \beta y^{p_x p_z} + \gamma z^{p_x p_y}.$$

Con la definición anterior, las rectas son las únicas curvas del plano proyectivo ponderado que, por el teorema de Bézout, cumplen que, siendo $\mathcal{C}_r = V(F)$, con $F$ la ecuación de una recta:

$$\sum_{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}_r}\operatorname{mult}_P(\mathcal{C},\mathcal{C}_r) = \frac{1}{e}\deg\mathcal{C}\deg\mathcal{C}_r = \deg\mathcal{C}.$$

## 17. Ejemplos

**Ejemplo 17.1.** Sean $F=y-x^2$ y $G=z-x^3$ dos polinomios cuasihomogéneos de pesos $\omega:=(1,2,3)$. Tomemos las curvas $\mathcal{C}_1=V(F)$ y $\mathcal{C}_2=V(G)$ ambas en $\mathbb{P}^2_{(1,2,3)}$. Calculemos la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}_1=V(F)$ y $\mathcal{C}_2=V(G)$ en el punto $P=[1:1:1]_\omega$. Notar que $P$ es el único punto que pertenece a la intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ya que todos los puntos solución de $F$ y $G$ son de la forma $[t:t^2:t^3]_\omega = t\cdot[1:1:1]_\omega$.

Calculemos $\operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(P) = \{[1:1:1],[1:1:\xi],[1:1:\xi^2],[1:-1:1],[1:-1:\xi],[1:-1:\xi^2]\}$ con $\xi^3 = 1$, $\tilde{F} = y^2 - x^2$ y $\tilde{G} = z^3 - x^3$; así pues nos queda:

$$\mathrm{mult}_{[1:1:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \frac{1}{6} \sum_{\tilde{P} \in \phi^{-1}(P)} \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{6}{6} = 1.$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto $P = [1:1:1]_\omega$ es liso y podemos elegir la carta que queramos, tomamos la carta $\psi_0 : U_0 \to X_{(1;2,3)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la primera variable y nos queda que $f = y - 1$ y $g = z - 1$ con el cambio de variables $z = z + 1$, $y = y + 1$ nos llevamos el punto $p = (1,1)$ al origen y tenemos que:

$$\mathrm{mult}_{[1:1:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y, z)} = 1.$$

- **Definición 16.11**

  Al ser $P = [1:1:1]_\omega$ liso, podemos elegir la carta que queramos, tomamos por ejemplo la segunda carta $\psi_1 : U_1 \to X_{(2;1,3)}$, haciendo el cambio de coordenadas $x = x+1$, $z = z+1$ llevamos el punto $(1,1)$ al origen y nos queda que $f = -x^2 - x$, $g = z - x^3 - 3x^2 - 3x$, por tanto:

$$\mathrm{mult}_{[1:1:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim \frac{O_{(X_{(2;1,3)}),[(1,1)]}}{(f,g)} = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, z\}}{(x(1-x), z - x^3 - 3x^2 - 3x)} = 1.$$

  Notar que en este caso el punto es liso y 16.9 y 16.11 son exactamente iguales.

Así pues se cumple el teorema de Bézout para Planos Proyectivos Ponderados ya que:

$$1 = \sum_{P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} \mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \frac{1}{6} \deg \mathcal{C}_1 \deg \mathcal{C}_2 = \frac{1}{6} 6 = 1.$$

**Ejemplo 17.2.** Sean $F = x$ y $G = y$. Tomemos las curvas $\mathcal{C}_1 = V(F)$ y $\mathcal{C}_2 = V(G)$ ambas en $\mathbb{P}^2_{(2,3,5)}$. Calculemos la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}_1 = V(F)$ y $\mathcal{C}_2 = V(G)$ en el punto $P = [0:0:1]_\omega$. Notar que $P$ es el único punto que pertenece a la intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ya que todos los puntos solución de $F$ y $G$ son de la forma $[0:0:t]_\omega = t \cdot [0:0:1]_\omega$.

Calculemos $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(P) = \{[0:0:1]\}$, con $\tilde{F} = x^2$ y $\tilde{G} = y^3$; así pues nos queda:

$$\mathrm{mult}_{[0:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \frac{1}{30} \sum_{\tilde{P} \in \phi^{-1}(P)} \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto $P = [0:0:1]_\omega$ sólo lo podemos ver desde la carta $\psi_2 : U_2 \to X_{(5;2,3)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la tercera variable y nos queda que $f = x$ y $g = y$:

$$\mathrm{mult}_{[0:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \frac{1}{5} \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x, y)} = \frac{1}{5}.$$

- **Definición 16.11**

  Nuestro punto $P = [0:0:1]_\omega$ sólo lo podemos ver desde la carta $\psi_2 : U_2 \to X_{(5;2,3)}$, tenemos que $\widehat{f} = x^5$ y $\widehat{g} = y^5$, por tanto:

$$\mathrm{mult}_{[0:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\dim\frac{O_{(X_{(5;2,3)}),[(0,0)]}}{(f,g)}=\dim\frac{O_{(X_{(5;2,3)})}}{(f,g)}=\frac{1}{5}\frac{1}{5}\frac{\mathbb{C}\left\{x^5,xy,y^5\right\}}{(x^5,y^5)}=\frac{1}{5}.$$

Así pues se cumple el teorema de Bézout para Planos Proyectivos Ponderados ya que:

$$\frac{1}{5}=\sum_{P\in\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2}\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\frac{1}{30}\deg\mathcal{C}_1\deg\mathcal{C}_2=\frac{1}{30}\cdot 6=\frac{1}{5}.$$

**Ejemplo 17.3.** Sean $F=x^6-y^3-z^2$ y $G=(x^3-z)(x^2-y)$. Tomemos las curvas $\mathcal{C}_1=V(F)$ y $\mathcal{C}_2=V(G)$ ambas en $\mathbb{P}^2_{(1,2,3)}$. Calculemos la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}_1=V(F)$ y $\mathcal{C}_2=V(G)$ en los puntos $P=[1:0:1]_\omega$ y $Q=[1:1:0]_\omega$. Notar que $P$ y $Q$ son los únicos puntos que pertenecen a la intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ya que todos los puntos solución de $F$ y $G$ son de la forma $[t:0:t^3]_\omega=t\cdot[1:0:1]_\omega$ o de la forma $[t:t^2:0]_\omega=t\cdot[1:1:0]_\omega$.

Calculemos $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(P)=\left\{[1:0:1],[1:0:\xi],[1:0:\xi^2]\right\}$ con $\xi^3=1$, $\tilde{F}=x^6-y^6-z^6$ y $\tilde{G}=(x^3-z^3)(x^2-y^2)$, sean $f=x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x-y^6$ y $g=x^5+5x^4+10x^3-x^3y^2+9x^2-3x^2y^2+3x-3xy^2$ resultado de deshomogeneizar con respecto a $z$ y aplicar un cambio de coordenadas, así pues nos queda:

$$\begin{aligned}\mathrm{mult}_{[1:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)&=\frac{1}{6}\sum_{\tilde{P}\in\phi^{-1}(P)}\mathrm{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2})=\frac{3}{6}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}=\\&=\frac{3}{6}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x-y^6,x)}=\\&=\frac{3}{6}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(y^6,x)}=\frac{3}{6}6=3.\end{aligned}$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto es $P=[1:0:1]_\omega$, podemos elegir la primera o la tercera carta, tomamos la carta $\psi_0:U_0\to X_{(1;2,3)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la primera variable y nos queda que $f=1-y^3-z^2$ y $g=(1-z)(1-y)$ con el cambio de variables $z=z+1$, $y=y$ nos llevamos el punto $p=(0,1)$ al origen y tenemos que:

$$\mathrm{mult}_{[1:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\dim\frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(z,y^3+z^2+2z)}=3.$$

- **Definición 16.11**

  Nuestro punto es $P=[1:0:1]_\omega$, podemos elegir la primera o la tercera carta, tomamos la carta $\psi_0:U_0\to X_{(1;2,3)}$. Haciendo el cambio de coordenadas $y=y$, $z=z+1$ llevamos el punto $(0,1)$ al origen y nos queda que $f=y^3+z^2+2z$ y $g=z(1-y)$ , por tanto:

$$\mathrm{mult}_{[1:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\dim\frac{O_{(X_{(1;2,3)}),[(0,1)]}}{(f,g)}=\dim\frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(z,y^3+z^2+2z)}=3.$$

Calculemos ahora $\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(Q)=\{[1:1:0],[1:-1:0]\}$, $\tilde{F}=x^6-y^6-z^6$ y $\tilde{G}=(x^3-z^3)(x^2-y^2)$, sean $f=-y^6-6y^5-15y^4-20y^3-15y^2-6y-z^6$ y $g=-y^2-2y+z^3y^2+2z^3y$ resultado de deshomogeneizar con respecto a $x$ y aplicar un cambio de coordenadas, así pues nos queda:

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}_{[1:1:0]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) &= \frac{1}{6}\sum_{\tilde{P}\in\phi^{-1}(P)}\operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{2}{6}\dim\frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(f,g)} = \\ &= \frac{2}{6}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(y,z^6)} = \frac{2}{6}6 = 2.\end{aligned}$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto es $Q = [1:1:0]_\omega$, podemos elegir la primera o la segunda carta, tomamos la carta $\psi_0 : U_0 \to X_{(1;2,3)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la primera variable y nos queda que $f = 1 - y^3 - z^2$ y $g = (1-z)(1-y)$ con el cambio de variables $y = y+1$, $z = z$ nos llevamos el punto $q = (1,0)$ al origen y tenemos que:

$$\operatorname{mult}_{[1:1:0]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \dim\frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(y, y^3-3y^2-3y-z^2)} = 2.$$

- **Definición 16.11**

  Nuestro punto es $Q = [1:1:0]_\omega$, podemos elegir la primera o la segunda carta, tomamos la carta $\psi_0 : U_0 \to X_{(1;2,3)}$. Haciendo el cambio de coordenadas $y = y+1$, $z = z$ nos llevamos el punto $q = (1,0)$ al origen y nos queda que $f = y^3 - 3y^2 - 3y - z^2$ y $g = (1-z)(y)$ ,por tanto:

$$\operatorname{mult}_{[1:1:0]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \dim\frac{O_{(X_{(1;2,3)}),[(1,0)]}}{(f,g)} = \dim\frac{\mathbb{C}\{y,z\}}{(y, y^3-3y^2-3y-z^2)} = 2.$$

Así pues se cumple el teorema de Bézout para Planos Proyectivos Ponderados ya que:

$$5 = 3+2 = \sum_{P\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2}\operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \frac{1}{6}\deg\mathcal{C}_1\deg\mathcal{C}_2 = \frac{1}{6}6\cdot 5 = 5.$$

**Ejemplo 17.4.** Sean $F = y(x^6 - y^3 - z^2)$ y $G = x(x^2 - y)$. Tomemos las curvas $\mathcal{C}_1 = V(F)$ y $\mathcal{C}_2 = V(G)$ ambas en $\mathbb{P}^2_{(1,2,3)}$. Calculemos la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}_1 = V(F)$ y $\mathcal{C}_2 = V(G)$ en los puntos $P = [0:0:1]_\omega$, $Q = [1:1:0]_\omega$ y $R := [0:1:1]_\omega$. Notar que $P$, $Q$ y $R$ son los únicos puntos que pertenecen a la intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ ya que todos los puntos solución de $F$ y $G$ son de la forma $[0:0:t]_\omega = t\cdot[0:0:1]_\omega$, de la forma $[t:t^2:0]_\omega = t\cdot[1:1:0]_\omega$ o de la forma $[0:-t^2:t^3]_\omega = t\cdot[0:-1:1]_\omega$.

Calculemos $\operatorname{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(P) = \{[0:0:1]\}$, con $\tilde{F} = y^2(x^6 - y^6 - z^6)$ y $\tilde{G} = x(x^2 - y^2)$; así pues nos queda:

$$\operatorname{mult}_{[0:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2) = \frac{1}{6}\sum_{\tilde{P}\in\phi^{-1}(P)}\operatorname{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1},\tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{1}{6}\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(x^3,y^2)} = 1.$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto $P = [0:0:1]_\omega$ sólo lo podemos ver desde la carta $\psi_2 : U_2 \to X_{(3;1,2)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la tercera variable y nos queda que $f = y(x^6 - y^3 - 1)$

y $g = x(x^2 - y)$:

$$\mathrm{mult}_{[0:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \frac{1}{3} \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^3, y)} = \frac{3}{3} = 1.$$

- **Definición 16.11**

  Nuestro punto $P = [0:0:1]_\omega$ sólo lo podemos ver desde la carta $\psi_2 : U_2 \to X_{(3;1,2)}$, tenemos que $\widehat{f} = f^3$ y $\widehat{g} = g^3$, por tanto:

$$\mathrm{mult}_{[0:0:1]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim \frac{O_{X_{(3;1,2)}),(0,0)}}{(f, g)} = \dim \frac{O_{(X_{(3;1,2)})}}{(f, g)} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} \frac{\mathbb{C}\left\{x^3, xy, y^3\right\}}{(f^3, g^3)} = 9\frac{1}{9} = 1.$$

Calculemos ahora $\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(Q) = \{[1:1:0], [1:-1:0]\}$, $\tilde{F} = y^2(x^6 - y^6 - z^6)$ y $\tilde{G} = x(x^2 - y^2)$, sean $f = -y^8 - 8y^7 - 28y^6 - 56y^5 - 70y^4 - 56y^3 - y^2z^6 - 27y^2 - 2yz^6 - 6y - z^6$ y $g = -y^2 - 2y$ resultado de deshomogeneizar con respecto a $x$ y aplicar un cambio de coordenadas, así pues nos queda:

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_{[1:1:0]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) &= \frac{1}{6} \sum_{\tilde{P} \in \phi^{-1}(P)} \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{\mathcal{C}_1}, \tilde{\mathcal{C}_2}) = \frac{2}{6} \dim \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(f, g)} = \\ &= \frac{2}{6} \dim \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(z^6, y)} = \frac{2}{6} 6 = 2. \end{aligned}$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto es $Q = [1:1:0]_\omega$, podemos elegir la primera o la segunda carta, tomamos la carta $\psi_0 : U_0 \to X_{(1;2,3)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la primera variable y hacemos el cambio de variables $y = y + 1$, $z = z$ con el que nos llevamos el punto $q = (1, 0)$ al origen y nos queda que $f = (y+1)(-y^3 - 3y^2 - 3y - z^2)$ y $g = (y)$, tenemos que:

$$\mathrm{mult}_{[1:1:0]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y, -y^3 - 3y^2 - 3y - z^2)} = 2.$$

- **Definición 16.11**

  Nuestro punto es $Q = [1:1:0]_\omega$, podemos elegir la primera o la segunda carta, tomamos la carta $\psi_0 : U_0 \to X_{(1;2,3)}$. Haciendo el cambio de coordenadas $y = y+1$, $z = z$ nos llevamos el punto $q = (1, 0)$ al origen y nos queda que $f = (y+1)(-y^3 - 3y^2 - 3y - z^2)$ y $g = (y)$ , por tanto:

$$\mathrm{mult}_{[1:1:0]_\omega}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \dim \frac{O_{(X_{(1;2,3)}),(1,0)}}{(f, g)} = \dim \frac{\mathbb{C}\{y, z\}}{(y, -y^3 - 3y^2 - 3y - z^2)} = 2.$$

Calculemos ahora $\mathrm{mult}_R(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ de las tres formas vistas:

- **Definición 16.8**

  Vemos que $\phi^{-1}(P) = \left\{[0:i:1], [0:i:\xi], [0:i:\xi^2], [0:-i:1], [0:-i:\xi], [0:-i:\xi^2]\right\}$ con $\xi^3 = 1$, $\tilde{F} = y^2(x^6 - y^6 - z^6)$ y $\tilde{G} = x(x^2 - y^2)$, Deshomogeneizo con respecto a la segunda variable y hago el cambio $x = x$, $z = z - i$. Tenemos pues (SINGULAR):

$$\mathrm{mult}_{[0:-1:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\dim\frac{\mathbb{C}\{x,z\}}{(\tilde{f},\tilde{g})}=1.$$

- **Definición 16.9**

  Nuestro punto es $R=[0:-1:1]_\omega$, podemos elegir la segunda o la tercera carta, tomamos la carta $\psi_0: U_1 \to X_{(2;1,3)}$. Deshomogeneizamos con respecto a la tercera variable y nos queda que $f=y^2(x^6-(y-1)^3-1)$ y $g=x(x^2-y)$ con el cambio de variables $y=y-1$, $x=x$ nos llevamos el punto $p=(0,-1)$ al origen y tenemos que (SINGULAR):

$$\mathrm{mult}_{[0:-1:1]_\omega}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\dim\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,g)}=1.$$

- **Definición 16.11**

  Igual que antes.

Así pues se cumple el teorema de Bézout para Planos Proyectivos Ponderados ya que:

$$4=1+2+1=\sum_{P\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2}\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)=\frac{1}{6}\deg\mathcal{C}_1\deg\mathcal{C}_2=\frac{1}{6}\cdot 24=4.$$

## Referencias

[1] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Translated from the German by John Stillwell.

[2] Igor Dolgachev. Weighted projective varieties. In *Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981)*, volume 956 of *Lecture Notes in Math.*, pages 34–71. Springer, Berlin, 1982.

[3] Gerd Fischer. *Plane algebraic curves*, volume 15 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1994 German original by Leslie Kay.

[4] William Fulton. *Algebraic curves*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. An introduction to algebraic geometry, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original.

[5] Gert-Martin Greuel and Gerhard Pfister. *A* **Singular** *introduction to commutative algebra*. Springer, Berlin, extended edition, 2008. With contributions by Olaf Bachmann, Christoph Lossen and Hans Schönemann, With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[6] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] William S. Massey. *Algebraic topology: an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

[8] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [8] [7]

Departamento de Matemáticas, IUMA, Universidad de Zaragoza, Campus Plaza San Francisco s/n, E-50009 Zaragoza SPAIN

*E-mail address*: jortigas@unizar.es