INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

PROF. GOTTFRIED WILHELM (VON) LEIBNIZ AND PROF. SIR ISAAC NEWTON

RESUMEN. En este trabajo conjunto presentamos nuestros recientes avances en Cálculo moderno para estudiantes que quieran practicar LaTeX.

Incluye un índice d

1. DEFINIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS

Corrige el título

En esta sección daremos una definición y describiremos algunos ejemplos del concepto de derivada de una función de una variable.

1.1. Definición.

Incluye una nota a pie de página: "Escribimos un trabajo común para no llegar a la

Definición 1.1. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. La aplicación f se dice diferenciable en x_0 si el límite*

Incluye los términos "diferenciable" y "derivada"

Enfatiza (\emph) y po

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. El valor de este límitese llama la derivada de f en x_0 y normalmente se denota como $f'(x_0)$. Una notación alternativa de $f'(x_0)$ que especifica la variable tomada es $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Cita la definición y la fórmula

Separa el título de la

1.2. Ejemplos. Una lista de ejemplos.

Ejemplo 1.2. *Calculemos la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = 0$. Para este propósito, hay que calcular*

En español

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Como este límite existe, se puede afirmar que $f(x) = \sin(x)$ es diferenciable en 0 y que $f'(0) = 1$.

Ejemplo 1.3. *Calculemos la derivada de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. Para eso, hay que calcular*

Vuelve a citar lo que se usa

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

En cambio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Date: 6 de abril de 1675.

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ *no existe y así la función* g *no es diferenciable en* 0*. Se puede ver que* g *es diferenciable en cualquier otro punto de su dominio.*

Enfatiza con negritas

Pon la gráfica del seno (usa el fichero o constrúyela). Haz referencia

Separa el título de la subsección (

1.3. Una interpretación geométrica de derivada. La recta tangente. Una interpretación de la derivada $f'(x_0)$ viene dada como la pendiente del grafo de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto la ecuación de la recta tangente al grafo de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ tiene la siguiente forma

Añádelo al listado de términos

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Proporciona un título corto a la

Pon la gráfica del seno junto a la tangente en t=0 (usa el fichero o

2. Propiedades de la derivada

La propiedad más útil del operador derivada es su comportamiento con respecto a la composición. Esta propiedad se conoce como la ***Regla de la Cadena*** y dice así.

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones reales de una variable con $f(A) \subset B$. Si f es diferenciable en $x_0 \in A$ y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A$ y*

$$(g \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Añade este término a la lista, ordenándolo me

Separa los items, pon como etiqueta (Dnúmero) y pon \label e

Separa título y texto de la subse

2.1. Derivadas de las funciones más frecuentes. Una lista de las derivadas de las funciones más frecuentes.

1. $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
2. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = k \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
5. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
6. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u^2(x)}$
7. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
8. $f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
9. $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
10. $f(x) = \log u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
11. $f(x) = \log_b x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\log_b e}{x}$
12. $f(x) = \log_b u(x) \Rightarrow f'(x) = \log_b e \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
13. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
14. $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
15. $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^x$
16. $f(x) = b^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^{u(x)} \cdot u'(x)$
17. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
18. $f(x) = \sin u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$
19. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
20. $f(x) = \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin u(x) \cdot u'(x)$
21. $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
22. $f(x) = \tan u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = (1 + \tan^2 u(x))u'(x)$
23. $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
24. $f(x) = \cot u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sin^2 u(x)} = -(1 + \cot^2 u(x))u'(x)$
25. $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
26. $f(x) = \arcsin u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
27. $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
28. $f(x) = \arccos u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
29. $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

30. $f(x) = \arctan u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$
31. $f(x) = \sinh x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$
32. $f(x) = \arg\sinh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
33. $f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \sinh x$
34. $f(x) = \arg\cosh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
35. $f(x) = \tanh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
36. $f(x) = \arg\tanh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

3. Ejercicios

En español

Ejercicio 3.1. *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como*

$$f(x) = \frac{2^x}{\pi + \sqrt[3]{\sin(x)}}.$$

Calcula $f'(x)$.

Ejercicio 3.2. *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como*

$$f(x) = e^{x+1} \arctan(\cosh(x^2)).$$

Calcula $f'(x)$.

Usa "Solución"

Demostración. □

Ejercicio 3.3. *Prueba que* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *para* $g(x) = \log(x)$ *solo usando que* g *es la función inversa de* $g(x) = e^x$.

Ejercicio 3.4. *Si* $f(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x + 2)$. *Calcula la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto de la curva cuya coordenada* x *es* -1.

Ejercicio 3.5. *Explica con cuidad cómo encontrar la curva que pasa por el punto* $(2, 3)$ *con la siguiente propiedad: el segmento de cualquier recta tangente a la curva contenido entre los ejes coordenados (positivos) está bisecada en el punto de tangencia.*

Leipzig University, Germany
Email address: `leibniz@calculus.de`

University of Cambridge, UK
Email address: `inewton@calculus.uk`

Escribe la resolución de algunos ejercicios haciendo referencia a

Añade lista de figuras y también lista alfabe