INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

PROF. GOTTFRIED WILHELM (VON) LEIBNIZ AND PROF. SIR ISAAC NEWTON

Resumen. En este trabajo conjunto presentamos nuestros recientes avances en Cálculo moderno para estudiantes que quieran practicar LaTeX

1. Definión y primeros ejemplos

En esta sección daremos una definición y describiremos algunos ejemplos del concepto de derivada de una función de una variable.

1.1. Definición.

Definición 1.1. *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$. *La aplicación* f *se dice diferenciable en* x_0 *si el límite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. El valor de este límitese llama la derivada de f *en* x_0 *y normalmente se denota como* $f'(x_0)$. *Una notación alternativa de* $f'(x_0)$ *que especifica la variable tomada es* $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

1.2. Ejemplos.

Una lista de ejemplos.

Ejemplo 1.2. *Calculemos la derivada de la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(x) = \sin(x)$ *en* $x_0 = 0$. *Para este propósito, hay que calcular*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Como este límite existe, se puede afirmar que $f(x) = \sin(x)$ *es diferenciable en* 0 *y que* $f'(0) = 1$.

Ejemplo 1.3. *Calculemos la derivada de la función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como* $g(x) = |x|$ *en* $x_0 = 0$. *Para eso, hay que calcular*

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

En cambio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Date: 6 de abril, 1675.

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ *no existe y así la función* g *no es diferenciable en* 0*. Se puede ver que* g *es diferenciable en cualquier otro punto de su dominio.*

1.3. Una interpretación geométrica de derivada. La recta tangente. Una interpretación de la derivada $f'(x_0)$ viene dada como la pendiente del grafo de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto la ecuación de la recta tangente al grafo de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ tiene la siguiente forma

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Propiedades de la derivada

La propiedad más útil del operador derivada es su comportamiento con respecto a la composición. Esta propiedad se conoce como la ***Regla de la Cadena*** y dice así.

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean* $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $g : B \to \mathbb{R}$ *dos funciones reales de una variable con* $f(A) \subset B$*. Si* f *es diferenciable en* $x_0 \in A$ *y* g *es diferenciable en* $f(x_0)$*, entonces* $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $x_0 \in A$ *y*

$$(g \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

2.1. Derivadas de las funciones más frecuentes. Una lista de las derivadas de las funciones más frecuentes.

1. $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
2. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = k \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
5. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
6. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u^2(x)}$
7. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
8. $f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
9. $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
10. $f(x) = \log u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
11. $f(x) = \log_b x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\log_b e}{x}$
12. $f(x) = \log_b u(x) \Rightarrow f'(x) = \log_b e \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
13. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
14. $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
15. $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^x$
16. $f(x) = b^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^{u(x)} \cdot u'(x)$
17. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
18. $f(x) = \sin u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$
19. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
20. $f(x) = \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin u(x) \cdot u'(x)$
21. $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
22. $f(x) = \tan u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = (1 + \tan^2 u(x))u'(x)$
23. $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
24. $f(x) = \cot u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sin^2 u(x)} = -(1 + \cot^2 u(x))u'(x)$
25. $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
26. $f(x) = \arcsin u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
27. $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
28. $f(x) = \arccos u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$
29. $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

30. $f(x) = \arctan u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$
31. $f(x) = \sinh x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$
32. $f(x) = \arg\sinh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
33. $f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \sinh x$
34. $f(x) = \arg\cosh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
35. $f(x) = \tanh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
36. $f(x) = \arg\tanh x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

3. Exercises

Ejercicio 3.1. *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como*

$$f(x) = \frac{2^x}{\pi + \sqrt[3]{\sin(x)}}.$$

Calcula $f'(x)$*.*

Ejercicio 3.2. *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como*

$$f(x) = e^{x+1} \arctan(\cosh(x^2)).$$

Calcula $f'(x)$*.*

Demostración. $\square$

Ejercicio 3.3. *Prueba que* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *para* $g(x) = \log(x)$ *solo usando que* g *es la función inversa de* $g(x) = e^x$*.*

Ejercicio 3.4. *Si* $f(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x + 2)$*. Calcula la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto de la curva cuya coordenada* x *es* -1*.*

Ejercicio 3.5. *Explica con cuidad cómo encontrar la curva que pasa por el punto* $(2, 3)$ *con la siguiente propiedad: el segmento de cualquier recta tangente a la curva contenido entre los ejes coordenados (positivos) está bisecada en el punto de tangencia.*

Leipzig University, Germany
Email address: `leibniz@calculus.de`

University of Cambridge, UK
Email address: `inewton@calculus.uk`