TOPOLOGÍA DE SINGULARIDADES

ENRIQUE ARTAL BARTOLO

Estas notas contienen lo que tengo previsto contar en el curso de doctorado *Topología de Singularidades*. A pesar del nombre, el curso comienza con los requisitos de análisis complejo y álgebra conmutativa necesarios para atacar el problema. La principales referencias seguidas son los libros de Gunning-Rossi, Łojasiewicz, Narasimhan.

1. Funciones holomorfas

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, utilizaremos la notación habitual $z^\alpha := z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$ y $|\alpha| := i_1 + \cdots + i_n$. Dado $z^0 \in \mathbb{C}^n$ y $\varepsilon > 0$ denotaremos

$$\Delta_\varepsilon^n(z^0) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - z_i^0| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

el polidisco abierto de centro z^0 y radio ε. Análogamente, definimos $\overline{\Delta}_\varepsilon^n(z^0)$. Si $z^0 = 0$, los denotaremos Δ_ε^n y $\overline{\Delta}_\varepsilon^n$.

Definición 1.1. Diremos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa o analítica si se cumple una de las dos condiciones siguientes (que son equivalentes):

(i) $\forall z^0 \in U$ existe un entorno V de z^0 tal que $\forall z \in V$

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^0)^\alpha,$$

y la serie converge uniformemente sobre compactos de V.

(ii) Vista como aplicación de un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^2$ es de clase $C^{(1)}$ y las diferenciales son $\mathbb{C}$-lineales (ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Durante la licenciatura se han estudiado funciones holomorfas en una variable. Muchas de las propiedades de estas funciones serán ciertas en el caso general y se deducen del caso en una variable. Por ejemplo, el teorema de Cauchy se obtiene como iteración del correspondiente en una variable.

Teorema 1.2 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea U un entorno abierto de $\overline{\Delta}_\varepsilon^n$, $\varepsilon > 0$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Consideremos el toro*

$$T_\varepsilon^n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - z_i^0| = \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

Entonces $\forall z \in \Delta_\varepsilon^n$ *se cumple:*

$$f(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{T_\varepsilon^n} \frac{f(w)}{(w_1 - z_1)\dots(w_n - z_n)} dw_1 \dots dw_n.$$

Teorema 1.3 (Principio de Prolongación Analítica)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$ y sea $z^0 \in U$. Son equivalentes:*

(I) $f \equiv 0$.

(II) *Todas las derivadas de f se anulan en z^0.*

(III) *Existe un subconjunto abierto V no vacío de U tal que $f_{|V} \equiv 0$.*

Teorema 1.4 (Principio del Máximo)**.** *Sea U un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$ y sea $z^0 \in U$ tal que $|f(z_0)|$ es un máximo relativo de $|f|$. Entonces, f es constante.*

Definición 1.5. Diremos que una aplicación $f : U \to \mathbb{C}^m$ es holomorfa si lo son sus funciones coordenadas.

Teorema 1.6 (Función inversa)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un entorno abierto de $0 \in \mathbb{C}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $df_0 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo lineal. Entonces existen entornos abiertos V, W de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $V \subset U$, $f(V) = W$ y la restricción $f_| : V \to W$ es biholomorfa.*

Demostración. Aplicamos el teorema de la función inversa real. Observemos que como las diferenciales de f son $\mathbb{C}$-complejas, allá donde sean inversibles también lo son sus inversas. $\square$

Igual que en el caso diferenciable se deducen los dos siguientes resultados:

Corolario 1.7 (Función implícita)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^{n+k}$ un entorno abierto de $0 \in \mathbb{C}^{n+k}$ y sea $f : U \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $df_0 : \mathbb{C}^{n+k} \to \mathbb{C}^n$ es sobreyectiva. Entonces existen entornos abiertos V de $0 \in \mathbb{C}^{n+k}$ tal que $V \subset U$, y W de 0 en $\mathbb{C}^n$ con $f(V) = W$ de forma que podemos encontrar nuevas coordenadas analíticas en V y W tales que si $(z_1, \dots, z_{n+k}) \in V$, se tiene $f(z_1, \dots, z_{n+k}) = (z_1, \dots, z_n)$.*

Corolario 1.8. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un entorno abierto de $0 \in \mathbb{C}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{C}^{n+k}$ una aplicación holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $df_0 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+k}$ es inyectiva. Entonces existen entornos abiertos V de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $V \subset U$, y W de 0 en $\mathbb{C}^{n+k}$ con $f(V) \subset W$ de forma que podemos encontrar nuevas coordenadas analíticas en V y W tales que si $(z_1, \dots, z_n) \in V$, se tiene $f(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$.*

El teorema de extensión de Riemann tiene varias versiones en dos variables. La siguiente es una consecuencia inmediata del teorema en una variable y de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 1.9. *Sea U un entorno abierto de $\Delta_\eta^{n-1} \times \overline{\Delta}_\varepsilon^1$, $\eta, \varepsilon > 0$. Sea $Z \subset U$ tal que $\forall z' \in \Delta_\eta^{n-1}$ se tiene que $Z_{z'} = \{w \in \Delta_\varepsilon^1 | (z', w) \in Z\}$ es finito. Supongamos además que $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa localmente acotada en U (o bien $\forall z' \in \Delta_\eta^{n-1}$, la función $f_{z'} : \Delta_\varepsilon^1 \setminus Z_{z'} \to \mathbb{C}$ es localmente acotada).*

Entonces, f admite una única extensión holomorfa a U.

Demostración. Definimos $g : \Delta_\eta^{n-1} \times \Delta_\varepsilon^1 \to \mathbb{C}$ dada por:

$$g(z', z_n) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w - z_n} dw$$

Es claramente holomorfa y coincide en un abierto no vacío de U con f por el correspondiente teorema en una variable. □

Con la mismas ideas se demuestra:

Teorema 1.10 (Teorema de Hartogs)**.** *Sea $U := \Delta_{\eta_1}^n \setminus \overline{\Delta_{\eta_2}^n}$, con $0 < \eta_2 < \eta_1$, $n > 1$. Toda función holomorfa en U se extiende a $\Delta_{\eta_1}^n$.*

Terminamos esta sección con un poco de geometría algebraica fácil.

Proposición 1.11. *Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ un subconjunto algebraico, es decir, el lugar de ceros de un número finito de polinomios. Sea G un grupo finito que actúa linealmente sobre $\mathbb{C}^n$ y que deja X globalmente fijo. Entonces, X se puede expresar como el lugar de ceros de un número finito de polinomios G-invariantes*

Demostración. Sean $f_1, \ldots, f_s$ polinomios que definen X. Sea $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$, con g_1 el elemento neutro. Dado f_j definimos $s_k(f_j)$, $k = 1, \ldots, r$, como sigue. Consideremos f_{j,g_i} los trasladados de f_j por los elementos del grupo. Entonces,

$$s_k(f_j) := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r} \prod_{l=1}^{k} f_{j,g_{i_l}}.$$

Observemos que

$$\prod_{i=1}^{r} (T - f_{j,g_i}) = T^r + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k s_k(f_j) T^k.$$

Sea Y el subconjunto algebraico definido por $s_k(f_j)$, $k = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$.

Sea $z \in X$; como X es G-invariante, no solo $f_j(z) = 0$, sino que $f_{j,g_i}(z) = 0$, por lo que $s_k(f_j)(z) = 0$ y $z \in Y$. Supongamos ahora que $z \in Y$; Tenemos que $\prod_{i=1}^{r}(T - f_{j,g_i}(z)) = T^r$, por lo que en particular, $f_j(z) = 0$ y $z \in X$. □

Corolario 1.12. *Consideremos en* $(\mathbb{C}^n)^{d+1}$ *el subconjunto*

$$X := \{(x_1, \ldots, x_d, v) \in (\mathbb{C}^n)^{d+1} | \exists j = 1, \ldots, d \text{ tal que } x_j = v\}.$$

Entonces existe una aplicación polinomial $F : (\mathbb{C}^n)^{d+1} \to \mathbb{C}^r$ *simétrica en las* d *primeras entradas tal que* $F^{-1}(0) = X$.

2. Teoremas de Weierstrass

En esta sección demostraremos algunos teoremas clásicos de Weierstraß que generalizan el siguiente resultado que en dimensión 1 es trivial: ç

> *Sea* $f : U \to \mathbb{C}$ *una función holomorfa no idénticamente nula,* $0 \in U \subset \mathbb{C}$ *abierto, y* $f(0) = 0$. *Entonces, existen únicas* $g : U \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* $g(0) \neq 0$, *y* $n > 0$ *tal que* $f = z^n g$. *Recordemos que* n *es el orden de cero de* f *en el origen.*

En esta sección f es una función holomorfa de un entorno abierto U de 0 en $\mathbb{C}^n$.

Definición 2.1. Diremos que f es regular de orden m (con respecto al sistema de coordenadas $z_1, \ldots, z_n$) si $f(0, \ldots, 0, z_n)$ no es idénticamente nula en un entorno del origen y es de orden m.

Definición 2.2. Sea U_{n-1} un entorno del origen en $\mathbb{C}^{n-1}$. Un polinomio de Weierstraß en $U_{n-1} \times \mathbb{C}$ es una función p tal que:

$$p(z_1, \ldots, z_{n-1})(z_n) = z_n^m + \sum_{j=1}^{m} a_j(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^j,$$

con a_j holomorfas en U_{n-1} y nulas en el origen. Diremos además que $U_{n-1} \times V$ está bien adaptado a p si:

- $U_{n-1} = \Delta_\eta^{n-1}$, $\eta > 0$,
- $V = \Delta_\varepsilon^1$, $\varepsilon > 0$,
- $p(z', z_n) \neq 0$ $\forall z' \in \Delta_\eta^{n-1}$ y $\forall z_n \in \mathbb{C}$ tal que $|z_n| = \varepsilon$.

Teorema 2.3 (Preparación de Weierstraß)**.** *Supongamos que* f *es regular de orden* m. *Entonces existen:*

- *un polinomio de Weierstraß* p;
- *un entorno* $U_{n-1} \times V$ *bien adaptado a* p, *tal que tal que* $U_{n-1} \times \bar{V} \subset U$
- *una función holomorfa* u *en* $U_{n-1} \times V$ *con* $u(0) \neq 0$,

tal que $f = u \cdot p$ *en* $U_{n-1} \times V$. *Es más, si* $(\tilde{U}_{n-1}, \tilde{V}, \tilde{p}, \tilde{u})$ *es otra solución, ambas coinciden en las intersecciones correspondientes.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\{0\}^{n-1} \times \overline{\Delta}^1_\varepsilon \subset U$ y $f(0, \ldots, 0, z_n) \neq 0$ si $|z_n| = \varepsilon$; la existencia está garantizada por la regularidad de f.

Por continuidad, existe $\eta > 0$ tal que $\Delta^{n-1}_\eta \times \overline{\Delta}^1_\varepsilon \subset U$ y $f(z_1, \ldots, z_n - 1, z_n) \neq 0$ si $|z_n| = \varepsilon$ y $|z_j| < \eta$, $j = 1, \ldots, n-1$. Consideremos la función $h : \Delta^{n-1}_\eta \to \mathbb{C}$ dada por:

$$h(z_1, \ldots, z_{n-1}) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{\frac{\partial f(z_1,\ldots,z_{n-1},w)}{\partial z_n}}{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, w)} dw.$$

Por la condición anterior, h está bien definida y es holomorfa. Por el teorema de los ceros de la variable compleja, se tiene que los valores de h son enteros, por lo que h es constante. Además, está constante es m ya que $h(0) = m$.

Deducimos que dado $z' := (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \Delta^{n-1}_\eta$, la ecuación $f(z', z_n) = 0$ tiene exactamente m soluciones (contadas con multiplicidad) en Δ^1_ε. Las denotamos $a_1(z'), \ldots, a_m(z')$, con ordenación arbitraria.

Dado $k \in \{1, \ldots, m\}$, consideremos las funciones holomorfas $\tilde{g}_k : \Delta^{n-1}_\eta \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\tilde{g}_k(z') := \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} w^k \frac{\frac{\partial f(z',w)}{\partial z_n}}{f(z', w)} dw.$$

Gracias al teorema de los ceros generalizado, obtenemos que

$$\tilde{g}_k(z') = a_1(z')^k + \cdots + a_m(z')^k,$$

por lo que el término de la derecha también es holomorfo.

Utilicemos ahora el siguiente resultado algebraico:

Teorema 2.4. *Sea A un anillo de característica cero y consideremos $A[x_1, \ldots, x_m]$. Consideremos los polinomios*

- *$s_j(x_1, \ldots, x_m)$, $j = 1, \ldots, m$, es la suma de todos los monomios de grado j en los que cada variable aparece a lo sumo una vez.*
- *$g_j(x_1, \ldots, x_m) = x_1^j + \cdots + x_m^j$, $j = 1, \ldots, m$.*

Entonces, si $f \in A[x_1, \ldots, x_m]$ es un polinomio simétrico, se tiene:

(a) *f se expresa de forma única como polinomio en $s_1, \ldots, s_m$.*

(b) *Si $\mathbb{Q} \subset A$, f se expresa de forma única como polinomio en $g_1, \ldots, g_m$.*

Consideremos el polinomio

$$p(z', z_n) := \prod_{j=1}^{m} (z_n - a_j(z')) = z_n^m + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \tilde{s}_j(z') z_n^j,$$

con $\tilde{s}_j(z') := s_j(a_1(z'), \ldots, a_m(z'))$. Deducimos del teorema (2.4) que $\tilde{s}_j$ es holomorfa. Como además $s_j(0) = 0$ se tiene que p es un polinomio de Weierstraß y, por construcción, $\Delta^{n-1}_\eta \times \Delta^1_\varepsilon$ está bine adaptado a p.

La función $u := f/p$ está bien definida en se $\Delta_\eta^{n-1} \times \Delta_\varepsilon^1 \setminus \{p = 0\}$. La construcción de p nos garantiza que $\forall z' \in \Delta_\eta^{n-1}$ las funciones $f(z', -)$ y $p(z', -)$ tienen los mismos ceros, con los mismos órdenes, en Δ_ε^1, con lo que su cociente es localmente acotado y no se anula nunca. Estamos en las hipótesis de (1.9), por lo que u se extiende a $\Delta_\eta^{n-1} \times \Delta_\varepsilon^1$ y $u(0) \neq 0$. Con esto terminamos la primera parte del enunciado.

Para la unicidad, observemos que, por construcción, las raíces de p sobre cada z' están determinadas, luego p lo está y u también. $\square$

Teorema 2.5 (División de Weierstraß). *Sean f una función holomorfa, p un polinomio de Weierstraß de grado m, $U_{n-1} \times V$ entorno bien adaptado a p tal que $U_{n-1} \times \bar{V} \subset U$.*

Entonces, existen únicas funciones q y r holomorfas en $U_{n-1} \times V$ tal que $f = qp + r$ y r es un polinomio en z_n de grado menor que m.

Demostración. Definimos una función $q : U_{n-1} \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

$$q(z', z_n) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{f(z', w)}{p(z, w)(w - z_n)} dw.$$

Recordemos que

$$f(z', z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{f(z', w)}{w - z_n} dw.$$

Por tanto,

$$f(z', z_n) - q(z', z_n)p(z', z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{f(z', w)}{p(z', w)} \frac{p(z', w) - p(z', z_n)}{w - z_n} dw.$$

Por otra parte

$$p(z', w) - p(z', z_n) = (w - z_n) \sum_{j=0}^{m-1} g_j(z', w) z_n^j$$

con g_j holomorfas en un entorno de $U_{n-1} \times \bar{V}$. Por tanto, si definimos

$$a_j(z') := \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{f(z', w) g_j(z', w)}{p(z', w)} dw,$$

y $r := \sum_{0 \leq j < m} a_j z_n^j$, tenemos el resultado sobre la existencia.

Para la unicidad, supongamos que $qp + r = 0$ en $U_{n-1} \times V$. Por tanto, si $z' \in U_{n-1}$ se tiene que $p(z', -)$ posee m ceros (contados con multiplicidades) en V. Por tanto, $r(z', -)$ tiene al menos esos ceros; como es de grado $< m$, se tiene que $r(z', z_n) \equiv 0$; como $p \neq 0$, por el principio de prolongación analítica deducimos que $q \equiv 0$. $\square$

Corolario 2.6. *Supongamos que tenemos una igualdad $f = qp$ con p polinomio de Weierstrass de grado m y f polinomio en z_n. Entonces q también es polinomio en z_n.*

Demostración. Con las hipótesis tenemos, gracias al algoritmo de la división, una igualdad $f = \tilde{q}p + \tilde{r}$, con $\tilde{q}, \tilde{r}$ polinomios en z_n tales que el grado de $\tilde{r}$ es menor que m. La unicidad del teorema de división de Weierstraß nos da el resultado. $\square$

3. Gérmenes de funciones

Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Consideremos en el conjunto

$$Hol(a) := \{f : U \to \mathbb{C} | a \in U \subset \mathbb{C}^n \text{ abierto, } f \text{ holomorfa}\}$$

la siguiente relación de equivalencia:

$$f : U \to \mathbb{C} \ \sim \ g : V \to \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists W \text{ abierto, } a \in W \subset U \cap V \text{ y } f_{|W} = g_{|W}.$$

Al conjunto cociente se le denota $\mathscr{O}_{a,n}$ y sus elementos son gérmenes de funciones holomorfas en a; el representante de f se denotará f_a (y en ocasiones f si no hay posibilidad de confusión). $\mathscr{O}_{a,n}$ es de forma natural un anillo; de hecho es una $\mathbb{C}$-álgebra (identificando $\mathbb{C}$ con los gérmenes de funciones constantes). Observemos que cada elemento de $\mathscr{O}_{a,n}$ determina y es determinado por una serie convergente en $z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n$. Denotamos $\mathbb{C}\{z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n\}$ el anillo de dichas series convergentes que es naturalmente isomorfo a $\mathscr{O}_{a,n}$. Es claro que todos estos anillos son isomorfos a $\mathscr{O}_n := \mathscr{O}_{0,n} = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Observemos que no podemos evaluar un germen en un punto vecino de a pero si tenemos un epimorfismo natural $ev_a : \mathscr{O}_{a,n} \to \mathbb{C}$ tal que $ev_a(f_a) = f(a)$.

Lema 3.1. *$\mathscr{O}_n$ es es un dominio de integridad y una $\mathbb{C}$-álgebra local de ideal maximal $\mathfrak{m}$, el conjunto de los gérmenes que se anulan en el origen, i.e,* $\ker ev_a$.

Demostración. La condición de dominio de integridad es consecuencia del principio de prolongación analítica. Observemos que si $f_0 \notin \mathfrak{m}$, entonces hay un representante f que no se anula en un entorno de 0 y su inversa es una función analítica g cuyo germen cumple $f_0 g_0 = 1$. $\square$

Fijemos las coordenadas; obtenemos así una cadena de anillos

$$\mathbb{C} = \mathscr{O}_0 \subset \mathscr{O}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{O}_{n-1} \subset \mathscr{O}_n$$

que será muy útil. Muchas de las propiedades las probaremos por inducción, aprovechando que serán trivialmente ciertas en $\mathbb{C}$; el paso $\mathscr{O}_{k-1} \subset \mathscr{O}_k$ vendrá facilitado por $\mathscr{O}_{k-1}[z_k]$ y los teoremas de Weierstraß.

Ejemplo 3.2. Observemos que $\mathbb{C} = \mathscr{O}_0$ es un cuerpo. Por otra parte, $\mathscr{O}_1 = \mathbb{C}\{z\}$ es un dominio de ideales principales. Sus ideales propios son (z^m), $m \geq 1$. En particular, es noetheriano y factorial.

Con estos resultados y con los teoremas de Weierstraß, vamos a probar que $\mathscr{O}_n$ es siempre noetheriano y factorial.

Proposición 3.3. *$\mathscr{O}_n$ es noetheriano.*

Demostración. Sea I un ideal no nulo de $\mathscr{O}_n$. Sea $0 \neq f \in I$. Podemos suponer, tras un cambio lineal de coordenadas, que f es regular y utilizando el teorema de preparación de Weierstrass, podemos suponer que f es un polinomio de Weierstraß.

Sea $J := I \cap \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Por hipótesis de inducción, $\mathscr{O}_{n-1}$ es noetheriano y por el teorema de la base de Hilbert, también lo es $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Por tanto, J tiene un sistema finito de generadores, que podemos suponer incluye f. Sea $g \in I$. Por el teorema de división de Weierstrass, $g = qf + r$, con $r \in J$; por tanto, el sistema de generadores de J lo es de I. $\square$

Vamos a preparar el terreno para ver que $\mathscr{O}_n$ es un dominio de factorización única.

Lema 3.4. *Sea $p(z_n) \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ mónico de grado m. Entonces:*

(a) *Si p es un polinomio de Weierstraß, p es irreducible en $\mathscr{O}_n$ si y solo si lo es en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$.*
(b) *Supongamos que p es irreducible en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Si p no es inversible en $\mathscr{O}_n$, entonces es de Weierstraß.*

Demostración. Empecemos por (a). Supongamos que p es irreducible en $\mathscr{O}_n$ y sea $p = qr$ una descomposición en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Por hipótesis, uno de los dos debe ser inversible en $\mathscr{O}_n$, por ejemplo q. Evaluando en $z' = 0$, obtenemos que r debe ser regular del mismo orden que p, lo que implica que q es de grado cero en z_n y, por tanto, inversible también en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$.

Supongamos ahora que p es irreducible en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ y sea $p = fg$, con $f, g \in \mathscr{O}_n$. Como p es regular, también lo deben ser f y g, por lo que $f = up_1$, $g = vp_2$ con u, v unidades en $\mathscr{O}_n$ y p_1, p_2 de Weierstraß. Por tanto, $f = (uv)(p_1 p_2)$; por (2.6), se tiene que $uv \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Como p es irreducible en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, podemos suponer que p_1 o p_2 es una unidad en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ (y también en $\mathscr{O}_n$), luego f o g es unidad en $\mathscr{O}_n$.

Veamos ahora (b). Si p es mónico y no inversible, entonces p es k-regular con $0 < k \leq m$. Podemos escribir $p = uq$, con u unidad en $\mathscr{O}_n$ y q de Weierstraß no inversible en $\mathscr{O}_n$. Por (2.6), $u \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, por lo que u también es unidad en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, luego es de grado cero, i.e., $u = 1$. □

Proposición 3.5. *$\mathscr{O}_n$ es dominio de factorización única.*

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{m}$ no nulo. Tras un cambio lineal de coordenadas, suponemos que f es regular, luego $f = up$, u unidad, p de Weierstraß. Por hipótesis de inducción, $\mathscr{O}_{n-1}$ es dominio de factorización única y por el lema de Gauß, también lo es $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Por tanto, $p = (q_1 \dots q_r)(q_{r+1} \dots q_{r+s})$, siendo todos los factores irreducibles en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$, mientras que de ellos, $q_1, \dots, q_r$ son inversibles en $\mathscr{O}_n$. Por (3.4)(b), sabemos que $q_{r+1}, \dots, q_{r+s}$ son de Weierstraß. Sea $v := u(q_1 \dots q_r)$, inversible en $\mathscr{O}_n$. Por (3.4)(a), $f = v \cdot (q_{r+1} \dots q_{r+s})$ es una descomposición irreducible de f.

Veamos la unicidad; como antes suponemos f no nulo ni inversible y además regular; sea $f = up_1 \dots p_r = vq_1 \dots q_s$ donde ambas son descomposiciones en unidad e irreducibles en $\mathscr{O}_n$. Como f es regular también lo son todos sus factores. Aplicando el teorema de preparación de Weierstraß, podemos suponer que p_i, q_j son polinomios de Weierstraß. Como son irreducibles en $\mathscr{O}_n$, lo son en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. La igualdad $p_1 \dots p_r = (u^{-1}v)q_1 \dots q_s$, implica que $u^{-1}v \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$. Sus factores irreducibles se deberáin encontrar entre los p_i, pero esto no es posible ya que son de Weierstraß y $u^{-1}v$ es inversible en $\mathscr{O}_n$. Deducimos que $u^{-1}v$ es inversible en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ y como es mónico, $u = v$. La unicidad de la descomposición en $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ nos permite concluir. □

4. Conjuntos analíticos

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto.

Definición 4.1. Diremos que $A \subset U$ es un subconjunto analítico de A si $\forall a \in U$ existe un entorno abierto $V \subset U$ de a, y funciones holomorfas $f_1, \dots, f_r : V \to \mathbb{C}$ tales que $A \cap V = \bigcap_{j=1}^r f_j^{-1}(0)$.

Observemos que un subconjunto analítico de U es cerrado en U. Del teorema de preparación de Weierstraß y de (1.9) deducimos:

Proposición 4.2. *Sea A un subconjunto analítico de U. Entonces:*

(1) *A es denso en ninguna parte en U (es decir el interior de su clausura es vacío).*
(2) *Si f es una función holomorfa en $U \setminus A$ localmente acotada en U, entonces f se extiende holomórficamente a U.*

Dado $a \in U$ definimos los gérmenes de espacios analíticos en a de la forma evidente. Dado A analítico en U denotaremos A_a (o A simplemente) el correspondiente germen.

Definición 4.3. Sea $A = A_a$ un germen de conjunto analítico en a. Diremos que $f \in \mathscr{O}_{a,n}$ se anula en A_a si así ocurre para representantes adecuados. Llamaremos $I(A)$ al conjunto de gérmenes que se anulan en A; es fácil ver que se trata de un ideal de $\mathscr{O}_{a,n}$ llamado el ideal de A_a.

Proposición 4.4. *Sea $I \subset \mathscr{O}_{a,n}$ un ideal. Sea $f_1, \dots, f_r$ un sistema generador de I; escogemos representantes en un abierto U común. Sea A el subconjunto analítico de U definido por estas funciones. El germen A_a no depende de las elecciones, se denota $A(I)$ y se llama el germen analítico definido por I.*

Demostración. Basta tomar dos sistemas generadores de I, las expresiones de cada uno de los sistemas en función del otro y escoger representantes en un abierto donde todos estén definidos (generadores y coeficientes). □

Proposición 4.5. *Las operaciones $A(I)$ e $I(A)$ verifican:*

(a) *Si A, B son gérmenes de conjuntos analíticos, entonces $A \cup B$ es germen de conjunto analítico e $I(A \cup B) = I(A) \cap I(B)$. En particular, si $A \subset B$, entonces $I(A) \supset I(B)$.*
(b) *Si I, J son ideales, entonces $A(IJ) = A(I \cap J) = A(I) \cup A(J)$, $A(I + J) = A(I) \cap I(J)$. En particular, si $I \subset J$, entonces $A(I) \supset A(J)$.*
(c) *Si A es un germen de conjunto analítico, $A = A(I(A))$.*
(d) *Si I es un ideal, $I \subset I(A(I))$.*
(e) *Si I es un ideal, $A(I) = A(\sqrt{I})$.*

Demostración. Las demostraciones de (a), (b) y (d) son triviales.

Si A es un germen de conjunto analítico, hay un ideal I tal que $A = A(I)$. Claramente $I \subset I(A)$, por lo que por (b), $A = A(I) \supset A(I(A))$. Por otra parte, si $g_1, \dots g_r$ engendran $I(A)$, por definición $A \subset A(g_j)$. Por tanto, aplicando (a), $A(I(A)) = \bigcap_{j=1}^{r} A(g_j) \supset A$, por lo que tenemos (c).

Si I es un ideal, como $I \subset \sqrt{I}$, se tiene $A(I) \supset A(\sqrt{I})$. Sea $f_1, \dots, f_r$ un sistema generador de $\sqrt{I}$; sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_j^m \in I$ $\forall j$. Entonces, $A(\sqrt{I}) = A(f_1, \dots, f_r) = A(f_1^n, \dots, f_r^n) \supset A(I)$, lo que da (e). □

Recordemos que en el caso polinomial el teorema de los ceros de Hilbert nos dice que $I(A(I)) = \sqrt{I}$. Demostraremos este resultado más adelante en el caso de la geometría analítica.

Definición 4.6. Diremos que un germen A de conjunto analítico es irreducible si $A = B \cup C$ con B, C gérmenes de conjunto analítico, implica $A = B$ o $A = C$.

Proposición 4.7. *Todo germen de conjunto analítico se descompone de forma única como unión finita de gérmenes de subconjuntos analíticos irreducibles. Además, A es irreducible si y solo si $I(A)$ es primo.*

Demostración. Si la primera afirmación no es cierta, podemos construir una cadena descendente estricta $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de gérmenes de subconjuntos analíticos. Como $A_m = A(I(A_m))$, se tiene que $\{I(A_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una cadena ascendente estricta de ideales, lo que es imposible por ser $\mathscr{O}_{a,n}$ noetheriano.

Para la segunda afirmación, si A es irreducible, sean $f, g \in \mathscr{O}_{a,n}$ tales que $fg \in I(A)$. Sean $I_1 = I(A) + (f)$, $I_2 = I(A) + (g)$. Como $I(A) \subset I_j$, se tiene que $A = A(I(A)) \supset A(I_j)$, por lo que $A \supset A(I_1) \cup A(I_2)$. Pero $I_1 I_2 \subset I(A)$, por lo que $A = A(I(A)) \subset A(I_1 I_2) = A(I_1) \cup A(I_2)$. Por tanto, $A = A(I_1) \cup A(I_2)$. Podemos suponer que $A = A(I_1)$, por lo que $I(A) = I(A(I_1) \supset I_1$ y $f \in I(A)$.

Supongamos que A es reducible; entonces, $A = B \cup C$, $A \neq B, C$. Por tanto $I(A) \subset I(B), I(C)$, con inclusiones estrictas. Sean $f \in I(B) \setminus I(A)$, $g \in I(C) \setminus I(A)$; entonces $fg \in I(A)$ e $I(A)$ no es primo. $\square$

5. Ideales en posición k-regular

El objetivo es estudiar los gérmenes de conjuntos analíticos pero eso pasa por una mejor comprensión de los ideales. En esta sección trabajaremos en $\mathscr{O}_n$, es decir, $a = 0$.

Definición 5.1. Sea I un ideal de $\mathscr{O}_n$; diremos que I está en posición k-regular con respecto a las coordenadas $z_1, \dots, z_n$ si $\mathscr{O}_k \cap I = \{0\}$ y el monomorfismo inducido $\mathscr{O}_k \hookrightarrow \bar{\mathscr{O}}_n := \mathscr{O}_n / I$ induce en $\bar{\mathscr{O}}_n$ una estructura de $\mathscr{O}_k$-módulo de generación finita.

Observación 5.2. Recordemos que si $A \subset B$ es una inclusión de anillos, se dice que B es entero sobre A si todo elemento de B es solución de una ecuación mónica con coeficientes en A. Si B es una A-álgebra finitamente generada entonces B es entero sobre A si y solo si B es un A-módulo finitamente generado. Además, en esta situación $\dim A = \dim B$, donde dim es la dimensión de Krull

En particular, en nuestro caso tenemos que $\mathscr{O}_k \hookrightarrow \bar{\mathscr{O}}_n$ es una extensión entera de anillos. Como $\dim \mathscr{O}_k = k$, observamos que k es un invariante del ideal si este se encuentra en k-posición regular.

Lema 5.3. *Sea I un ideal de $\mathscr{O}_n$. Se puede hacer un cambio lineal de coordenadas de forma que I esté en posición regular.*

Demostración. Si $I=0$, está obviamente en posición n-regular. Si no, sea $0\neq f\in I$. Haciendo un cambio lineal de coordenadas, podemos suponer que es regular de grado m, y multiplicando por una unidad, podemos suponer que f es un polinomio de Weierstraß de grado m.

Denotemos $J:=I\cap\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ y $L:=I\cap\mathscr{O}_{n-1}$. El teorema de división de Weierstraß aplicado a f implica dos cosas: por una parte, la inclusión $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]/J\hookrightarrow\mathscr{O}_n/I$ resulta ser un isomorfismo, y por otra $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]/J$ es un $\mathscr{O}_{n-1}/L$-módulo de generación finita.

Por hipótesis de inducción, tras un cambio lineal de coordenadas (que no afecta a z_n), L está en posición k-regular: $L\cap\mathscr{O}_k=\{0\}$ y $\mathscr{O}_k\hookrightarrow\mathscr{O}_{n-1}/L$ induce una estructura de $\mathscr{O}_k$-módulo finito en $\mathscr{O}_{n-1}/L$. Combinando ambos resultados, obtenemos el lema. □

Supongamos ahora que I está en posición k-regular. Sea z_j con $j=k+1,\dots,n$. Como la extensión $\mathscr{O}_k\hookrightarrow\bar{\mathscr{O}}_n$ es entera y $\mathscr{O}_k$ es dominio de factorización única, deducimos que existe un único polinomio mónico $p_j(x)\in\mathscr{O}_k[x]$ de grado mínimo y tal que $p_j(z_j)\mod I$ es nulo. Este polinomio está caracterizado por ser mónico, cumplir que $p_j(z_j)\in I$ y que si $p(x)\in\mathscr{O}_k[x]$ cumple que $p(z_j)\in I$, entonces, $p_j(x)$ divide a $p(x)$.

Definición 5.4. Sea $I\neq 0$ un ideal en posición k-regular. Dado $j=k+1,\dots,n$ llamaremos a $p_j(x)$ el polinomio mínimo de z_j con respecto a I y a $p_j(z_j)$ la ecuación mínima de z_j en I.

Proposición 5.5. *Sea $I\neq 0$ un ideal en posición k-regular y dado $j=k+1,\dots,n$, sea $p_j(z_j)$ la ecuación mínima de de z_j en I. Entonces $p_j(z_j)$ es un polinomio de Weierstraß en $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_k,z_j\}$. El grado d_j de p_j se llama el grado de z_j con respecto a I.*

Demostración. Es claro que $p_j(z_j)$ es z_j-regular de grado $e\leq d_j$. Escribimos $p_j(z_j)=u_jq_j(z_j)$, con $u_j\in\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_k,z_j\}$ unidad y $q_j(z_j)\in\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_k,\}[z_j]$ de Weierstraß. Como u_j es inversible, si ahora trabajamos en $\mathscr{O}_n$, se tiene que $q_j(z_j)\in I$, por lo que $e=d_j$ y $p_j=q_j$. □

6. Ideales primos en posición fuertemente k-regular

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathscr{O}_n$, que supondremos en posición k-regular; en este caso la extensión $\mathscr{O}_k\hookrightarrow\bar{\mathscr{O}}_n$ es una extensión entera de dominios de integridad con $\mathscr{O}_k$ dominio de factorización única.

Sean $\mathscr{F}_l$ y $\mathscr{F}_n$ los cuerpos de fracciones de $\mathscr{O}_k$ y $\bar{\mathscr{O}}_n$. La extensión de cuerpos de $\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}_n$ es finita y está engendrada por las clases de $z_{k+1},\dots,z_n\mod I$.

Recordemos que el teorema del elemento primitivo garantiza que esta extensión (que es separable) posee un elemento ζ primitivo, es decir, $\zeta \in \mathscr{F}_n$ y se cumple $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_k[\zeta]$. Es más, este elemento primitivo se puede encontrar como sigue: si $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]$ y $S_1, \ldots, S_r$ son subconjuntos infinitos de $\mathscr{F}_k$, entonces, existen $s_j \in S_j$ tal que se puede escoger $\zeta = \sum_{j=1}^{r} s_j \zeta_j$. En nuestro caso, tomando como sistema generador las clases de $z_{k+1}, \ldots, z_n \mod I$ y $S_{k+1} = \cdots = S_n = \mathbb{C}$, podemos suponer que tras un cambio lineal de coordenadas $z_{k+1} \mod I$ es elemento primitivo de la extensión.

Definición 6.1. Sea $\{0\} \neq \mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathscr{O}_n$. Diremos que $\mathfrak{p}$ está en posición fuertemente k-regular si está en posición k-regular y además $z_{k+1} \mod I$ es elemento primitivo de la extensión $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n$.

A partir de ahora supondremos que $\mathfrak{p}$ está en posición fuertemente k-regular. Necesitaremos el siguiente resultado algebraico que nos habla de la existencia de un denominador común:

Proposición 6.2. *Sea $A \subset B$ una extensión finita (luego entera) de dominios de integridad tal que A es dominio de factorización única. Sea $\zeta \in B$ un elemento primitivo de la correspondiente extensión de cuerpos y sea $p(x) \in A[x]$ el polinomio mínimo de x. Denotemos $\delta \in A$ el discriminante de este polinomio. Entonces, $\forall b \in B$, se tiene que $\delta b \in A[\zeta]$.*

En nuestro caso, consideremos las ecuaciones mínimas $p_j(z_j)$ de z_j con respecto a $\mathfrak{p}$. Ya sabemos que son de Weierstraß en $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_k, z_j\}$. Además, por ser el ideal primo el siguiente resultado es inmediato.

Lema 6.3. *El polinomio $p_j(x) \in \mathscr{O}_k[x]$ es irreducible y no posee factores múltiples; en particular, su discriminante en $\mathscr{O}_k$ es no nulo.*

Definición 6.4. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo en posición fuertemente regular, $k = \dim \bar{\mathscr{O}}_n$. Llamaremos discriminante de $\mathfrak{p}$ con respecto al sistema de coordenadas y lo denotaremos δ al discriminante de $p_{k+1}(x)$. Llamaremos grado de $\mathfrak{p}$ con respecto al sistema de coordenadas a d_{k+1} y lo denotaremos d.

Observemos que $\delta \in \mathscr{O}_k \setminus \{0\}$. En particular $\delta \notin \mathfrak{p}$. Sea $j = k+2, \ldots, n$. Sabemos que existe un único polinomio $q_j(x) \in \mathscr{O}_k[x]$ de grado $< d$ tal que

$$\delta z_j \equiv q_j(z_{k+1}) \mod \mathfrak{p}.$$

Denotaremos $R_j := \delta z_j - q_j(z_{k+1}) \in \mathfrak{p}$. Denotemos $\mathfrak{q}$ el ideal de $\mathscr{O}_n$ engendrado por $p_j(z_j)$, $j = k+1, \ldots, n$, y R_j, $j = k+2, \ldots, n$. Es claro que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

Proposición 6.5. *Existe $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $\forall f \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\delta^N f \in \mathfrak{q}$.*

Demostración. Tomar $N = \sum_{j=k+2}^{n} d_j$. Denotemos $g_n := f$; utilizando el algoritmo de la división con respecto a $p_n(z_n)$ tenemos que $g_n \equiv f_n(z_n) \mod \mathfrak{q}$, con $f_n(z_n) \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ de grado $< d_n$.

Utilizando R_n, existe $g_{n-1} \in \mathscr{O}_{n-1}$ tal que $\delta^{d_n} f_n(z_n) \equiv g_{n-1} \mod \mathfrak{q}$. De esta forma construimos una familia $\{(g_j, f_j(z_j))\}_{j=k+1}^{n}$ tal que:

- $g_n = f$, $g_j \in \mathscr{O}_j$ si $k+1 \leq j \leq n$.
- $f_j(z_j) \in \mathscr{O}_{j-1}[z_j]$ de grado menor que d_j si $k+1 \leq j \leq n$.
- $g_j \equiv f_j(z_j) \mod \mathfrak{q}$ si $k+1 \leq j \leq n$.
- $\delta^{d_j} f_j(z_j) \equiv g_{j-1} \mod \mathfrak{q}$ si $k+2 \leq j \leq n$.

Deducimos que $\delta^N f \equiv f_{k+1}(z_{k+1}) \mod \mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ y $f \in \mathfrak{p}$ tenemos que $f_{k+1}(z_{k+1}) \in \mathfrak{p}$. Por definición de p_{k+1} tenemos que $p_{k+1}(x)$ divide $f_{k+1}(x)$, por lo que $f_{k+1}(z_{k+1}) \in \mathfrak{q}$. □

Consideremos ahora el ideal $\mathfrak{r}$ engendrado por $p_{k+1}(z_{k+1})$, $R_{k+2}, \ldots, R_n$.

Lema 6.6. *$\forall j = k+2, \ldots, n$ se tiene que $\delta^{d_j} p_j(z_j) \in \mathfrak{r}$.*

Demostración. Se siguen las mismas ideas que en la demostración de (6.5). □

7. Gérmenes de conjuntos analíticos de ideales primos

En esta sección $\mathfrak{p}$ es un ideal primo en posición fuertemente k-regular y conservamos las notaciones de la sección anterior.

Fijemos ahora un $\varepsilon, \eta > 0$ tal que $\forall j = k+1, \ldots, n$, $\Delta_\eta^k \times \Delta_\varepsilon^1$ está bien adaptado a $p_j(z_j)$ en las coordenadas $z_1, \ldots, z_k, z_j$. Sea $U := \Delta_\eta^k \times \Delta_\varepsilon^{n-k}$. Con estos datos podemos formar una base de entornos de $0 \in \mathbb{C}^n$.

Podemos suponer que en U se cumple:

- Están definidos los elementos de un sistema de generadores $h_1, \ldots, h_r$ de $\mathfrak{p}$.
- $p_{k+1}(z_{k+1}), \ldots, p_n(z_n)$ forman parte de este sistema.
- El germen de h_j está en $\mathscr{O}_k[z_{k+1}, \ldots, z_n]$.
- Están definidos $R_{k+2}, \ldots, R_n$ y también sus coeficientes cuando se escriben en función de los h_j.
- Están definidos los coeficientes para escribir el producto de $\delta^N h_j$ en función de los generadores de $\mathfrak{q}$.
- Están definidos los coeficientes para escribir el producto de $\delta^{d_j} p_j(z_j)$ en función de los generadores de $\mathfrak{r}$.

Por la elección de U, sabemos que $\forall z' \in \Delta^k_\eta$, las d_j raíces de $p_j(z_j)$ se encuentran en Δ^1_ε. Denotemos $A(\mathfrak{p})$ el subconjunto analítico de U determinado por estos generadores, $A(\mathfrak{q})$ el determinado por los generadores de $\mathfrak{q}$, $A(\mathfrak{r})$ el determinado por los generadores de $\mathfrak{r}$ y $A(\delta)$ el asociado a $\delta = 0$.

Lema 7.1. *La aplicación continua $\pi : A(\mathfrak{p}) \to \Delta^k_\eta$ es propia.*

Demostración. Dado $z \in A(\mathfrak{p})$ denotemos $z' = \pi(z)$. Basta probar que si $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $A(\mathfrak{p})$ tal que $(z')^m \to z' \in \Delta^k_\eta$, entonces existe una subsucesión que converge en $A(\mathfrak{p})$; como $A(\mathfrak{p})$ es cerrado, basta ver que converge en U.

Tomando sucesivas subsucesiones, podemos suponer que $z^m_j \to z_j$, $\forall j = k+1, \dots, n$. A priori, $z_j \in \overline{\Delta}^1_\varepsilon$, pero por continuidad, $p_j(z_j)_{|z'} = 0$, con lo que $z_j \in \Delta^1_\varepsilon$ y $z = (z', z_{k+1}, \dots, z_n) \in U$ y es el límite de una subsucesión de $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$. □

Lema 7.2. $A(\mathfrak{p}) \setminus A(\delta) = A(\mathfrak{q}) \setminus A(\delta) = A(\mathfrak{r}) \setminus A(\delta)$*; además, $\forall z' \in \Delta^k_\delta \setminus A(\delta)$, se tiene $\#\pi^{-1}(z') = d$ si el abierto U es lo suficientemente pequeño.*

Demostración. Probemos primero $A(\mathfrak{p})\setminus A(\delta) = A(\mathfrak{q})\setminus A(\delta)$. Como $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, tenemos $A(\mathfrak{p}) \subset A(\mathfrak{q})$, por lo que tenemos $\subset$.

Sea ahora $z \in A(\mathfrak{q})\setminus A(\delta)$. Consideremos h uno de los generadores de $\mathfrak{p}$. Sabemos que $\delta^N h \in \mathfrak{q}$, por lo que $\delta(z)^N h(z) = 0$. Como $\delta(z) \neq 0$, tenemos que $h(z) = 0$, por lo que $z \in A(\mathfrak{p})$ y ya está. El razonamiento para probar $A(\mathfrak{q}) \setminus A(\delta) = A(\mathfrak{r}) \setminus A(\delta)$ es similar.

Fijemos ahora $z' \in \Delta^k_\eta \setminus A(\delta)$. Sea $z = (z', z_{k+1}, \dots, z_n) \in \pi^{-1}(z')$. Sabemos:

- z_{k+1} es una raíz de $p_{k+1}(x)_{|z'}$.
- $z_j = q_j(z_{k+1})/\delta(z')$, $j = k+2, \dots, n$.

Por tanto, $\#\pi^{-1}(z') \leq d$, que es el grado de p_{k+1}. Para comprobar la igualdad hay que ver que si $z = (z', z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n) \in \Delta^k_\eta \times \mathbb{C}$ cumple las dos propiedades anteriores, entonces $z \in U$, es decir, $|z_j| < \varepsilon$, $\forall j = k+1, \dots, n$.

Comencemos por $j = k+1$. Por la elección de U, $\Delta^k_\eta \times \Delta^1_\varepsilon$ está adaptado a $p_{k+1}(z_{k+1})$, por lo que, al ser z_{k+1} raíz de p_{k+1}, se tiene $|z_{k+1}| < \varepsilon$.

Sea ahora $j = k+2, \dots, n$. Por (6.6), podemos expresar $\delta^{d_j} p_j(z_j)$ en función de los generadores de $\mathfrak{q}$, de hecho, en función de $p_{k+1}(z_{k+1})$ y $R_j = \delta z_j - q_j(z_{k+1})$, con coeficientes holomorfos en U. De hecho, dichos coeficientes son holomorfos en $\Delta^k_\eta \times \mathbb{C}^{n-k}$ ya que son polinomiales en las últimas variables. Por tanto, como $\delta(z') \neq 0$, deducimos que z_j es raíz de $p_j(x)$ y como antes concluímos que $|z_j| < \varepsilon$. □

Proposición 7.3. *Denotemos $B := A(\mathfrak{p})\setminus A(\delta)$. Entonces $\bar{B} \cap U$ es un subconjunto analítico de U.*

Demostración. Sea $z' \in \Delta_\eta^k \setminus A(\delta)$; consideremos un pequeño disco abierto $V_{z'}$ de z' en $\Delta_\eta^k \setminus A(\delta)$. Es fácil ver que existen d aplicaciones holomorfas

$$a_l : V_{z'} \to \Delta_\varepsilon^{n-k}, \quad l = 1, \dots, d,$$

tales que $\forall w' \in V_{z'}$ se tiene que

$$\pi^{-1}(w') = \{a_1(w'), \dots, a_d(w')\}.$$

La elección de los índices es puramente arbitraria y no permite una definición global de estas funciones en $\Delta_\eta^k \setminus A(\delta)$.

Consideremos como en el corolario (1.12) el espacio $(\mathbb{C}^{n-k})^{d+1}$, con coordenadas $(x_1, \dots, x_d, v)$, y la aplicación holomorfa $F : (\mathbb{C}^{n-k})^{d+1} \to \mathbb{C}^r$ tal que $F^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^d \{v = x_j\}$ y F es simétrico en las d primeras variables. Esto nos permite construir una aplicación holomorfa

$$G : \Delta_\eta^k \setminus A(\delta) \times \Delta_\varepsilon^{n-k} \to \mathbb{C}^r$$

tal que si $w' \in V_{z'}$ se tiene $G(w', v) = F(a_1(w'), \dots, a_d(w'), v)$. Para ello basta tomar esta propiedad como definición local y utilizar la simetría para ver que todas las definiciones locales se pegan bien. Además, por construcción, $G^{-1}(0) = B$.

Como G es una aplicación polinomial en v, los coeficientes de sus coordenadas son funciones holomorfas en $\Delta_\eta^k \setminus A(\delta)$ y por construcción son acotadas. Por tanto, aplicando (4.2), deducimos que se pueden extender y de esta forma definimos una extensión $\tilde{G} : U = \Delta_\eta^k \times \Delta_\varepsilon^{n-k} \to \mathbb{C}$ de G.

La proposición quedará demostrada si probamos que $\bar{B} \cap U = \tilde{G}^{-1}(0)$. Como $B \subset \tilde{G}^{-1}(0)$ es obvio que $\bar{B} \cap U \subset \tilde{G}^{-1}(0)$.

Veamos el otro contenido. Sea $(z', v) \in \tilde{G}^{-1}(0)$. Si $\delta(z') \neq 0$, entonces $(z', v) \in B \subset \bar{B} \cap U$. Supongamos pues que $\delta(z') = 0$.

Consideremos una sucesión $\{(z')^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ en $\Delta_\eta^k \setminus A(\delta)$ tal que $(z')^m \to z'$. Dado $m \in \mathbb{N}$ consideremos $x_1^m, \dots, x_d^m \in \Delta_\varepsilon^{n-k}$, dos a dos distintos, tales que $((z')^m, x_j^m) \in B$. Recordemos que $\forall v \in \Delta_\varepsilon^{n-k}$ se tiene

$$\tilde{G}(((z')^m, v) = G(((z')^m, v) = F(x_1^m, \dots, x_d^m, v).$$

Tomando sucesivamente subsucesiones, y teniendo en cuenta que estamos ante conjuntos acotados, podemos suponer que $x_j^m \to x_j \in \overline{\Delta}_\varepsilon^{n-k}$. Por tanto, se tiene que:

$$0 = \tilde{G}(z', v) = \lim_{m \to \infty} \tilde{G}((z')^m, v) = \lim_{m \to \infty} F(x_1^m, \dots, x_d^m, v) = F(x_1, \dots, x_d, v).$$

Este resultado implica que alguno de los x_j es igual a v, por lo que tenemos que para algún j se cumple$((z')^m, x_j^m) \to (z', v)$, con lo que $(z', v) \in \bar{B} \cap U$. Por tanto, $\tilde{G}^{-1}(0) \subset \bar{B} \cap U$ y ya tenemos el resultado. □

Corolario 7.4. *$A(\mathfrak{p}) = \bar{B} \cap U$.*

Demostración. Sea S el germen de $\bar{B} \cap U$ en 0 y sea T el germen de $A(\mathfrak{p}) \cap A(\delta)$. Hemos visto que $A_0(\mathfrak{p}) = S \cup T$. Por irreducibilidad, tenemos que $A_0(\mathfrak{p})$ es igual a uno de los dos. Por la última afirmación de (7.2), $A_0(\mathfrak{p}) \neq T$, por lo que es igual a S. □

Teorema 7.5 (*Nustellensatz* para primos)**.** *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathscr{O}_n$; entonces, $I(A(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$.*

Demostración. Sea $0 \neq f \in I(A(\mathfrak{p}))$ un generador en un abierto U como en esta sección. Consideremos $\delta^N f$. Aplicando el teorema de división de Weierstraß y el algoritmo de la división como en (6.5), vemos que $\delta^N f \equiv g \mod \mathfrak{q}$ (más bien, módulo sus generadores), donde $g = g(z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}) \in \mathscr{O}_k[z_{k+1}]$ de grado menor que d. Si $z' \in \Delta_\eta^k \setminus A(\delta)$, tenemos que $g(z', z_{k+1}) = 0$ si también lo hace p_{k+1}. Por cuestión de grados g se anula en $\Delta_\eta^k \setminus A(\delta) \times \Delta_\varepsilon^1$ y por densidad, en U. Por tanto, $\delta^N f \in \mathfrak{p}$; como $\delta \notin \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}$ es primo, se tiene que $f \in \mathfrak{p}$. □

Corolario 7.6 (*Nustellensatz* de Rücket)**.** *Sea I un ideal de $\mathscr{O}_n$; entonces, se tiene $I(A(I)) = \sqrt{I}$.*

Demostración. Sea I un ideal. Es un resultado conocido de álgebra conmutativa, que hay un número finito de primos minimales $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de entre los que contienen a I y que $\sqrt{I} = \bigcap_{j=1}^r \mathfrak{p}_j$. Se tiene:

$$I(A(I) = I(A(\sqrt{I})) = I(A(\bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{p}_j)) = I(\bigcup_{j=1}^{r} A(\mathfrak{p}_j)) = \bigcap_{j=1}^{r} I(A(\mathfrak{p}_j)) = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{p}_j = \sqrt{I}.$$

□