Tema 2. Compacidad y sucesiones

Se ha perseguido desde hace tiempo el correcto concepto de compacidad. Una definición proveniente del análisis es la de compacidad numerable.

DEFINICIÓN 8.2.1. Un espacio topológico X es **numerablemente compacto** si toda sucesión en X tiene un punto de aglomeración en X.

PROPOSICIÓN 8.2.2. *Sea X E.T. compacto. Entonces, X es numerablemente compacto.*

PROPOSICIÓN 8.2.3. *Sean X e Y E.T. numerablemente compactos. Entonces, $X \times Y$ es numerablemente compacto.*

Otra definición muy usada en análisis es la de compacidad secuencial.

DEFINICIÓN 8.2.4. Un espacio topológico X es **secuencialmente compacto** si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

PROPOSICIÓN 8.2.5. *Sea X E.T. Entonces:*

- *Si X es secuencialmente compacto, entonces es numerablemente compacto.*
- *Si X es numerablemente compacto (o compacto) y primero numerable, entonces X es secuencialmente compacto.*

OBSERVACIÓN 8.2.6. Por tanto compacidad secuencial implica compacidad numerable; en cambio existen espacios compactos que no son secuencialmente compactos y espacios secuencialmente compactos (y por tanto numerablemente compactos) que no son compactos.

Vamos a terminar esta primera sección estudiando la compacidad en los espacios métricos (o pseudométricos).

DEFINICIÓN 8.2.7 (ver Definición 2.2.16). Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Diremos que X es **acotado** si $\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$ es un conjunto acotado de números reales.

PROPOSICIÓN 8.2.8. *Si (X, d) es un espacio seudométrico compacto, entonces X es acotado.*

DEFINICIÓN 8.2.9. Un espacio pseudométrico está **totalmente acotado** si se puede recubrir por un número finito de bolas de radio ε para cualquier $\varepsilon > 0$.

PROPOSICIÓN 8.2.10. *Si (X, d) es un espacio pseudométrico compacto (resp. secuencialmente compacto), entonces X es totalmente acotado.*

Para ver la recíproca, necesitamos alguna noción ya conocida del análisis.

DEFINICIÓN 8.2.11. Sea X un espacio seudométrico. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *de Cauchy* si y solo si $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \in \mathbb{N} \geq n_0$ se tiene $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

EJERCICIO 8.4. *Sea X un espacio seudométrico.*

1. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*
2. *Si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente a un punto $x \in X$ entonces la propia sucesión converge a x.*

DEFINICIÓN 8.2.12. Un espacio seudométrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

EJEMPLO 8.2.13. $\mathbb{R}$ con la métrica usual es completo. Los mismo ocurre con $\mathbb{R}^n$ con las métricas d_2, d_1, d_∞. Sin embargo, $(0, 1)$ no es completo.

En la siguiente sección completaremos el recorrido que hacen los dos siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 8.2.14. *Un espacio seudométrico compacto es completo y totalmente acotado.*

PROPOSICIÓN 8.2.15. *Un espacio seudométrico completo y totalmente acotado es secuencialmente compacto.*