Tema 2. Conexión local

Definición 10.2.1. Diremos que un espacio topológico X es **localmente conexo** si todo punto posee una base de entornos conexos.

Observación 10.2.2. Veamos que X es localmente conexo si y sólo si los entornos conexos de un punto forman una base de entornos. Para ello, denotemos por $\mathcal{E}_{\text{con}}(x) := \{V^x \mid V^x \text{ es entorno conexo de } x\}$. Supongamos que X es localmente conexo y consideremos $x \in X$ un punto cualquiera de X, entonces existe $\mathcal{B}^x$ base de entornos conexos de x. Así pues $\mathcal{B}^x \subseteq \mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ y por tanto $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ es también base de entornos de x (Observación 4.1.4). Recíprocamente, si $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ es base de entornos de x, entonces $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ es base de entornos conexos de x, luego X es localmente conexo.

Ejemplos 10.2.3.

1. Si X es discreto y $x \in X$, entonces $\mathbb{B}^x := \{\{x\}\}$ es base de entornos (Ejemplo 4.1.2(4)) y por tanto X es localmente conexo.
2. Todos los intervalos son también localmente conexos ya que tienen bases de entornos formadas por intervalos.
3. Consideremos ahora $\mathbb{R}^n$ con la topología usual $\mathcal{T}_u$. Dado que $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_{d_\infty}$, para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, basta utilizar una base de entornos formada por bolas para la métrica d_∞. Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, sabemos que $\mathcal{B}^x := \{\mathbb{B}^n_{d_\infty}(x;\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ forman una base de entornos de x en $\mathbb{R}^n$ (Ejemplo 4.1.2(3a)). Ahora bien, $\mathbb{B}^n_{d_\infty}(x;\varepsilon) = \mathbb{B}^1_{d_2}(x_1;\varepsilon) \times ... \times \mathbb{B}^1_{d_2}(x_n;\varepsilon)$. Como $\mathbb{B}^1_{d_2}(x_i;\varepsilon) = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ es conexo por el apartado anterior, enonces $\mathbb{B}^n_{d_\infty}(x;\varepsilon)$ es conexo (Proposición 10.1.10(2)).
4. Por ser espacios totalmente desconectados pero no discretos, ni $\mathbb{Q}$ ni el discontinuo de Cantor pueden ser localmente conexos. El motivo es el siguiente: si X fuera localmente conexo, por la Observación 10.2.2 la familia $\mathcal{E}_{\text{con}}(x)$ debería ser base de entornos de x $\forall x \in X$, pero por ser X totalmente desconectado, el único conexo que contiene a x es el propio $\{x\}$, que no es base de entornos de x a no ser que $\{x\}$ sea abierto y por tanto X se trate de la topología discreta (Ejemplo 4.1.2(4)).

Daremos la siguiente caracterización de conexión local.

Proposición 10.2.4. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$(X,\mathcal{T})$ es localmente conexo.*

2. $\forall U \subset \mathcal{T}$ *toda componente conexa de* $(U, \mathcal{T}|_U)$ *es abierta.*
3. *Existe base de* $\mathcal{T}$ *formada por conjuntos conexos.*

COROLARIO 10.2.5. *Sea* X *un espacio topológico localmente conexo, entonces:*

1. *Si* $U \subset X$ *es abierto, entonces* U *es localmente conexo.*
2. *Sus componentes conexas son abiertas y cerradas.*

EJEMPLO 10.2.6. Existen espacios localmente conexos no conexos, por ejemplo, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

EJEMPLO 10.2.7. Sea $X := \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}$. Como la topología que hereda X de $\mathbb{R}$ es la discreta (Ejercicio 3.14), entonces X es localmente conexo (Ejemplo 10.2.3(1)).

Consideremos ahora $Y := X \cup \{0\}$. Como 0 no es punto aislado de Y, entonces $\{0\}$ no es abierto en Y. Así pues, como $\{0\}$ es componente conexa de Y, aplicando el Corolario 10.2.5(2) tenemos que Y no es localmente conexo.

El siguiente resultado es sencillo.

PROPOSICIÓN 10.2.8. *Sea* $f : X \to Y$ *una aplicación continua sobreyectiva y abierta. Si* X *es localmente conexo, también lo es* Y.

PROPOSICIÓN 10.2.9. *Sean* X, Y E.T. *y* $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *con* $X_\lambda \subset X$ *una familia no vacía de espacios topológicos, entonces:*

(1) Si $X_\lambda \subset X$ *son subespacios abiertos localmente conexos de* X*, entonces* $\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *es localmente conexo.*
(2) $X \times Y$ *es localmente conexo si y sólo si* X *e* Y *son localmente conexos.*

EJEMPLO 10.2.10. Utilizando proyecciones estereográficas desde el polo norte y el polo sur, se tiene que $U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ y $U_2 := \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ son abiertos locamente conexos que recubren $\mathbb{S}^n$. Así pues, usando la Proposición 10.2.9(1), se obtiene que $\mathbb{S}^n$ es localmente conexo.

EJEMPLOS 10.2.11. Sea $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x = \frac{1}{n}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que $X = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \times \mathbb{R}$. Por el Ejercicio 10.2.7, X es el producto de dos espacios localmente conexos, así pues localmente conexo (Proposición 10.2.9(2)).

Sea ahora $Y := X \overset{\emptyset}{\cup} \{x = 0\}$ de nuevo considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que $Y = \left(\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}\right) \times \mathbb{R}$. Por el Ejercicio 10.2.7, el primer factor de Y no es localmente conexo, y por tanto Y no es locamente conexo como consecuencia de la Proposición 10.2.9(2). Las componentes conexas de Y son de la forma $\left\{x = \frac{1}{n}\right\} \times \mathbb{R}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}$. Esta última es la única que no es abierta en Y.

Ejemplo 10.2.12. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$X_1 := \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0,1] \right\}, \quad X_2 := \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}.$$

El espacio $X := X_1 \cup X_2$ considerado como subespacio de $\mathbb{R}^2$ se denomina el **seno del topólogo**.

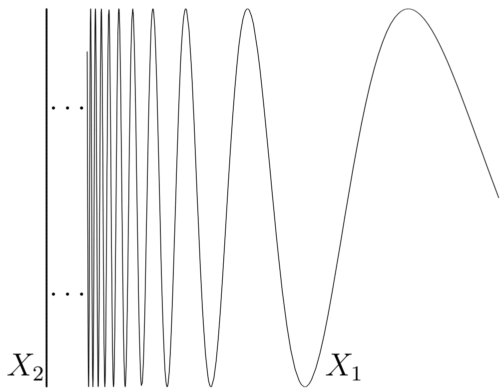

Figura 1. Seno del topólogo

Como X_1 es el grafo de la aplicación continua $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ donde $(0,1]$ es conexo se tiene que X_1 es conexo (Ejercicio 10.2). Como $X = \overline{X_1}$, tenemos que X es conexo. Sin embargo X no es localmente conexo. En efecto, Sea $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < 1)$ una bola cualquiera para d_∞ centrada en $(0,0) \in X_2$. Es fácil ver que $U \cap X_2$ es una componente conexa no abierta de $U \cap X$.

Ejercicio 10.4. *Demostrar que si X es compacto y localmente conexo, entonces tiene un número finito de componentes conexas.*