

Una introducción al cálculo real y a L^AT_EX



Autor/a

Trabajo de fin de grado
Universidad de Zaragoza

Director/a del trabajo:

Fecha:

Resumen

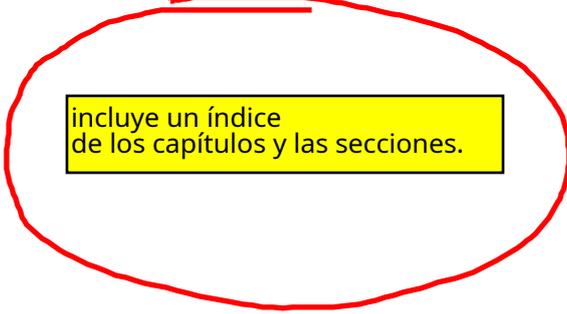
Preparamos este trabajo para presentar el Cálculo moderno y para poder practicar un poco de \LaTeX . Más información sobre los fundadores del Cálculo moderno puede encontrarse en Wikipedia sobre [Gottfried Wilhelm \(von\) Leibniz](#) y sobre [Sir Isaac Newton](#).

Lo hemos escrito en tres capítulos en los que presentaremos: las definiciones, propiedades y donde resolvemos algunos ejercicios.

En el **capítulo primero** daremos las definiciones de función diferenciable y veremos los primeros ejemplos. En el **capítulo segundo** vamos a presentar las definiciones más importantes de la derivación de funciones. Por último, en el **tercer capítulo** vamos a proponer algunos ejercicios para resolver.



cambia esto por citas a los capítulos correspondientes



incluye un índice
de los capítulos y las secciones.

Capítulo 1

Definición y primeros ejemplos

En esta sección daremos una definición y describiremos algunos ejemplos del concepto de derivada de una función de una variable.

1.1. Definición

Definición 1.1. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ donde $D \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto y $x_0 \in D$. La aplicación f se dice diferenciable en x_0 si el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. El valor de este límite se llama la derivada de f en x_0 y normalmente se denota como $f'(x_0)$. Una notación alternativa de $f'(x_0)$ que especifica la variable tomada es $\frac{df}{dx}(x_0)$.

1.2. Ejemplos

pon número a la ecuación y cítala abajo!!

Una lista de ejemplos.

Ejemplo 1.2.1. Comprobemos si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \text{sen}(x)$, es diferenciable en $x_0 = 0$. Para este propósito, y de acuerdo con la definición de arriba hay que calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Como este límite existe, se puede afirmar que $f(x) = \text{sen}(x)$ es diferenciable en 0 y que $f'(0) = 1$.

Ejemplo 1.2.2. Comprobemos si la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x|$ es diferenciable en $x_0 = 0$. Para eso, y de acuerdo con la definición de arriba hay que calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

En cambio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe y así la función g no es diferenciable en 0 de acuerdo con la definición del principio. Se puede ver que g es diferenciable en cualquier otro punto de su dominio.

ponlo en negrita

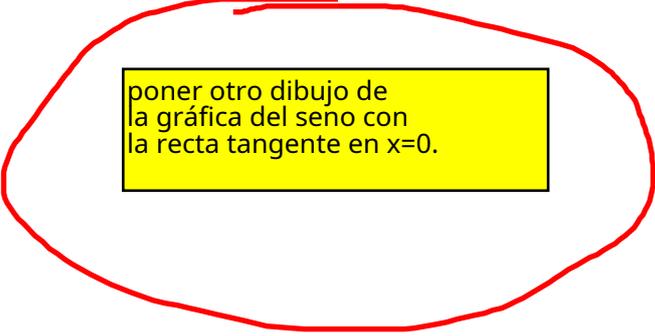
incluye un dibujo de la gráfica del seno al final del ejemplo.

1.3. Una interpretación geométrica de derivada. La recta tangente

Una interpretación de la derivada $f'(x_0)$ viene dada como la pendiente del grafo de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto la ecuación de la recta tangente al grafo de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ tiene la siguiente forma

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$



poner otro dibujo de
la gráfica del seno con
la recta tangente en $x=0$.

Capítulo 2

Propiedades de la derivada

En este capítulo vamos a presentar las propiedades más importantes del operador derivada, así como una lista con las derivadas de funciones elementales.

2.1. Regla de la Cadena

La propiedad más útil del operador derivada es su comportamiento con respecto a la composición. Esta propiedad se conoce como la **Regla de la Cadena** y dice así.

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena). Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de una variable con $f(A) \subset B$. Si f es diferenciable en $x_0 \in A$ y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A$ y

$$(g \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

2.2. Derivadas de las funciones más frecuentes

Una lista de las derivadas de las funciones más frecuentes.

1. $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
2. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = k \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
5. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
6. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
7. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
8. $f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
9. $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
10. $f(x) = \log u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
11. $f(x) = \log_b x \Rightarrow f'(x) = \frac{\log_b e}{x}$

incluir en una tabla de términos al final

12. $f(x) = \log_b u(x) \Rightarrow f'(x) = \log_b e \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$
13. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
14. $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
15. $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^x$
16. $f(x) = b^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^{u(x)} \cdot u'(x)$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
18. $f(x) = \operatorname{sen} u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$
19. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
20. $f(x) = \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} u(x) \cdot u'(x)$
21. $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
22. $f(x) = \operatorname{tg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = (1 + \operatorname{tg}^2 u(x))u'(x)$
23. $f(x) = \operatorname{cot} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cot}^2 x$
24. $f(x) = \operatorname{cot} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)} = -(1 + \operatorname{cot}^2 u(x))u'(x)$
25. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
26. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
27. $f(x) = \operatorname{arc} \cos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
28. $f(x) = \operatorname{arc} \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$
29. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
30. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$
31. $f(x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{cosh} x$
32. $f(x) = \operatorname{arg} \operatorname{senh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
33. $f(x) = \operatorname{cosh} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x$
34. $f(x) = \operatorname{arg} \operatorname{cosh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
35. $f(x) = \operatorname{tgh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$
36. $f(x) = \operatorname{arg} \operatorname{tgh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \frac{2^x}{\pi + \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}.$$

Calcula $f'(x)$.

Ejercicio 3.2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = e^{x+1} \operatorname{arctg}(\operatorname{cosh}(x^2)).$$

Calcula $f'(x)$.

Demostración.

□

Ejercicio 3.3. Prueba que $g'(x) = \frac{1}{x}$ para $g(x) = \log(x)$ solo usando que g es la función inversa de $g(x) = e^x$.

Ejercicio 3.4. Si $f(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x + 2)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de la curva cuya coordenada x es -1 .

Ejercicio 3.5. Explica paso a paso cómo encontrar la curva que pasa por el punto $(2, 3)$ con la siguiente propiedad: el segmento de cualquier recta tangente a la curva contenido entre los ejes coordenados (positivos) está bisecada en el punto de tangencia.

resuelve alguno de estos haciendo referencias a las propiedades que usas.

Añade una lista de figuras

Añade una tabla de términos