1. DEFINICIóN Y PROPIEDADES DE ESPACIOS SIMÉTRICOS

Definición 1.1. Una variedad Riemanniana conexa M se dice *espacio simétrico* si a cada $p \in M$ hay asociada una isometría $\zeta_p : M \longrightarrow M$ que es:

1. Involutiva, es decir $\zeta^2 = id$
2. Tiene a p como punto fijo aislado, es decir, existe un entorno U de p en el cual p es el único punto fijo de ζ_p.

La isometría ζ_p se llama *simetría global de M en p*

EJEMPLOS.

1. $\mathbb{R}^n$ es simétrico ya que para cada punto p, la aplicación $p + x \mapsto p - x$ es una isometría.
2. La esfera S^n es simétrica con la métrica inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$, siendo ζ_p la reflexión en p. Para cada q, $\zeta_p(q) = q'$, donde q y q' son equidistantes de p en una geodésica a traves de p

   En este caso, $\zeta_p(p) = p$ y $\zeta_p(p') = p'$, donde p' denota el punto antipodal a p. Este es un ejemplo en el que ζ_p tiene otros puntos fijos aparte de p.

Notar que el primer ejemplo se trata de una variedad no compacta, mientras que el segundo es una variedad compacta, luego no podemos decir nada sobre la compacidad de los espacios simétricos; sin embargo un espacio simétrico siempre es completo.

Lema 1.2. *Si $p \in M$ (M variedad Riemanniana) y ζ_p es una isometría involutiva con p como punto fijo aislado, entonces $\zeta_{p*}(X_p) = -X_p$ y $\zeta_p(ExpX_p) = Exp(-X_p)$ para todo$X_p \in T_pM$ para el cual ambos términos están definidos.*

Demostración. Como $\zeta_p^2 = id$, lo mismo sucede para ζ_{p*} en T_pM. Esto significa que los valores propios de ζ_{p*} en T_pM son ± 1. Sin embargo, si $+1$ es un valor propio de ζ_{p*}, entonces existe un vector $X_p \neq 0$ tal que $\zeta_{p*}(X_p) = X_p$. Para cualquier isometría $F : M \longrightarrow M$, se tiene que $F \circ Exp = Exp \circ F_*$ ya que se preservan las geodésicas. Esto significa que $\zeta_p(Exp(tX)) = Exp(tX)$, por tanto la geodésica que pasa por p con dirección inicial X_p queda fija y p no es un punto fijo aislado de ζ_p. Así, $+1$ no es un valor propio y $\zeta_{p*} = -id$.
Como ζ_p es una isometría, $\zeta_p(ExpX_p) = Exp\zeta_{p*}(X_p) = Exp(-X_p)$. Esto significa que ζ_p lleva cada geodésica a traves de p en si misma con dirección opuesta, exactamente como en los dos ejemplos citados anteriormente. ☐

Corolario 1.3. *Dada una variedad Riemanniana completa M y un punto $p \in M$, hay al menos una isometría involutiva ζ_p con p como punto fijo aislado.*

Demostración. Este corolario es consecuencia del lema anterior y del siguiente resultado:
Sean $F_1, F_2 : M \longrightarrow M$ isometrías en una variedad riemanniana completa y conexa M. Suponer que $F_1(p) = F_2(p)$ y $F_{1*} = F_{2*}$ en T_pM para algun $p \in M$. Entonces $F_1 = F_2$

□

Lema 1.4. *Un espacio riemanniano simétrico M es completo. Además, si $p, q \in M$, existe una isometría ζ_r tal que $\zeta_r(p) = q$.*

Demostración. Veamos que en efecto, toda geodésica se puede extender.
Sea $\gamma : [0, b) \longrightarrow M$ geodésica. Sea $s_0 = 3/4b$, y sea $\zeta_{\gamma(s_0)}$ la simetría en $\gamma(s_0)$. La curva $\zeta \circ \gamma$ es otra geodésica que pasa por el punto $\gamma(s_0)$, cuyo vector tangente es $-\frac{d\gamma}{ds}_{s_0}$ y cuya longitud es la misma que la de γ. Como tiene en $\gamma(s_0)$ el mismo vector tangente que γ, coincide con $\gamma(s)$ en el intervalo $\frac{1}{2}b < s < b$ y la extiende a una longitud $> \frac{3}{2}b$.
Con esto, basta tomar r el punto medio de la geodésica que une p y q. Entonces la isometría ζ_r manda esta geodésica a si misma y nos lleva p a q. □

Observación 1.5. Otra definición equivalente a la dada para espacios simétricos es la siguiente: Un *espacio simétrico* es una variedad riemanniana conexa M tal que para cada punto $p \in M$ existe una (única) isometría $\zeta_p : M \longrightarrow M$ de modo que su diferencial sea $-id$ en T_pM

Este hecho unido al siguiente teorema

Teorema 1.6. *Sean M y M' variedades riemannianas completas, conexas y localmente simétricas, con M simplemente conexa. Si $L : T_oM \longrightarrow T_{o'}M'$ es una isometría lineal que preserva la curvatura, entonces hay una única aplicación cubridora $\phi : M \longrightarrow M'$ tal que $d\phi_o = L$*

nos permite obtener el siguiente corolario:

Corolario 1.7. *Una variedad Riemanniana completa, simplemente conexa y localmente simétrica es simétrica.*

Demostración. Ver O'Neill pág. 225. □

2. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE GRUPOS DE LIE

Recordaremos en esta sección algunas nociones y resultados sobre grupos de Lie que necesitaremos, sin extendernos, ya que está todo desarrollado en nuestro anterior trabajo sobre grupos de Lie.

Si G es un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ denota su álgebra de Lie y e su elemento identidad.
Un *automorfismo de grupos de Lie* es una aplicación $\phi : G \longrightarrow G$ que es una difeomorfismo y un isomorfismo de grupos.
Como los automorfismos preservan las dos estructuras de un grupo de Lie, deben preservar todas las características de la teoría de Lie de G.

Lema 2.1. *Sea $\phi : G \longrightarrow G$ un automorfismo. Si $X \in \mathfrak{g}$, entonces el campo vectorial $d\phi(X)$ está en $\mathfrak{g}$, y $d\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie llamado la* diferencial de ϕ.

La diferencial $d\phi$ contiene la misma información que la aplicación diferencial $d\phi : TG \longrightarrow TG$, y está, de hecho, completamente determinada por la aplicación $d\phi_e : T_eG \longrightarrow T_eG$.
Si $a \in G$, sea $C_a : G \longrightarrow G$ la función que manda a cada g a aga^{-1}. C_a es un automorfismo interno , ya que $C_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$, es un difeomorfismo. Así, C_a es un automorfismo de G.
La diferencial de C_a se denota por Ad_a. Si $a, b \in G$, entonces $C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$ así, $C_{ab} = C_a \circ C_b$. Tomando diferenciales tenemos: $Ad_{ab} = Ad_a \circ Ad_b$.
El homomorfismo resultante: $a \mapsto Ad_a$ se llama *la representación adjunta de G.*

Corolario 2.2. *Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces*
$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\{Ad_{\alpha(t)}Y - Y\}$$
donde $\alpha(t) = exp(tX)$ es el subgrupo uni-paramétrico de X.

Este corolario nos muestra que la operación corchete nos mide el error de la conmutatividad en G. Por ejemplo, si G es abeliano, entonces $C_a = id$, de aquí $Ad_a = id$, para todo $a \in G$. Así, por el corolario, $[X, Y] = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ es abeliano. El recíproco es cierto cuando G es conexo.
Sea H un subgrupo de G (puede ser el mismo G). Un objeto definido en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es *Ad(H)-invariante* si es preservado por $Ad_h : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ para todos los $h \in H$.
Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de H.

Lema 2.3. *Si una forma bilineal simétrica F en $\mathfrak{g}$ es Ad(H)-invariante, entonces $F([X, W], Y) = F(X, [W, Y])$ para todos los $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $W \in \mathfrak{h}$. El recíproco es cierto cuando H es conexo.*

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$, sea $ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la aplicación que manda cada Y a $[X, Y]$. Evidentemente ad_X es un operador lineal y, por la identidad de Jacobi, es una derivación de Lie, es decir:
$$ad_Z[X, Y] = [ad_Z X, Y] + [X, ad_Z Y]$$

La identidad de Jacobi también nos muestra que:

$$ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$$

Definición 2.4. La *killing form* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la función $B : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $B(X,Y) = \mathrm{tr}(ad_X ad_Y)$

Lema 2.5. *La killing form B de $\mathfrak{g}$ es una forma bilineal simétrica que es invariante bajo todos los automorfismos de $\mathfrak{g}$ y satisface $B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$ para todos los $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.*

Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G, entonces la Killing form de $\mathfrak{g}$ está también atribuida a G y es en particular $\mathrm{Ad}(G)$-invariante.
Nuestras aplicaciones tratarán con grupos de Lie de matrices, es decir, subgrupos de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$, con sus álgebras de Lie también en forma matricial como subálgebras de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.
Utilizaremos la notación $XY = \sum X_{ij}Y_{ij}$.
Notemos que ${}^tX{}^tY = XY = YX$ y $\overline{XY} = \bar{X}\bar{Y}$. En $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, XY es realmente el producto puntual, mientras que en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $X\bar{Y}$ es el producto hermitiano natural.

Lema 2.6. *Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$.*

1. $Ad_a(X) = aXA^{-1}$ *para todo* $a \in G$, $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$
2. *Sea* $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow {}^t\bar{X} \in \mathfrak{g}$. *Entonces* $B(X,Y) =$*Re(traza* $(XY)) =$*Re*${}^tXY$ *es un producto escalar Ad(G)-invariante en* $\mathfrak{g}$ *llamado* forma traza.

Observación 2.7. Consideremos las álgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$, entonces:

1. $X \in \mathfrak{g} \Rightarrow^t \bar{X} \in \mathfrak{g}$
2. traza (XY) es real para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Así la forma traza es no degenerada en estos casos y viene dada simplemente por traza (XY).
3. La Killing form B de $\mathfrak{g}$ es proporcional a la forma traza. De hecho, $B(X,Y) = c\,\mathrm{tr}(XY)$ con $c \neq 0$ si dim $\mathfrak{g} > 1$

Estos resultados se sabe son ciertos también para $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p,q), \mathfrak{u}(p,q)$ y $\mathfrak{sp}(p,q)$.

EJEMPLOS FORMAS TRAZA.

1. *El álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ del grupo ortogonal $O(n)$*
   Como $\mathfrak{o}(n)$ consiste en todas las matrices antisimétricas, traza$(XY) = -XY$.
2. *El álgebra de Lie $\mathfrak{o}(p,q)$ del grupo semiortogonal $O(p,q)$*
   $\mathfrak{o}(p,q)$ consiste en todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & {}^tx \\ x & b \end{pmatrix}$ donde

$a \in \mathfrak{o}(p)$, $b \in \mathfrak{o}(q)$y x es una matriz arbitraria real $q \times p$. El espacio de tales X lo podemos denotar por $\mathbb{R}^{pq}$.

Si $Y = \begin{pmatrix} c & {}^t y \\ y & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(p,q)$, entonces

$$\text{traza } XY = X^tY = \begin{pmatrix} a & {}^t x \\ x & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & {}^t y \\ y & -d \end{pmatrix} = -ac - bd + 2xy$$

Evidentemente el espacio vectorial $\mathfrak{o}(p,q)$ puede escribirse como suma directa ortogonal $\mathfrak{o}(p) + \mathfrak{o}(q) + \mathbb{R}^{pq}$.

La forma traza es así definida negativa en $\mathfrak{o}(p) + \mathfrak{o}(q)$ y definida positiva en $\mathbb{R}^{pq}$.

3. *El álgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$ del grupo unitario $U(n)$*

   $\mathfrak{u}(n)$ consiste en todas las matrices $n \times n$ complejas tales que son antihermitianas: ${}^t\bar{X} = -X$

   Así traza $XY = X^tY = -X\bar{Y}$. La forma traza es definida negativa ya que $-X\bar{X} = -\sum(X_{ij})^2$. Así, -traza XY es un producto interno en $\mathfrak{u}(n)$. (Notar que $\mathfrak{u}(n)$, a pesar de estar construida de números complejos, es un espacio vectorial real).

Proposición 2.8. *Sea G un grupo de Lie conexo dotado con un tensor métrico invariante a izquierda $<,>$. Entonces son equivalentes:*

1. $<,>$ *es invariante a derecha (es decir, es bi-invariante)*
2. $<,>$ *es Ad(G)-invariante*
3. *La aplicación $\psi : G \longrightarrow G$ definida por $G \mapsto g^{-1}$ es una isometría de G.*
4. $< X,[Y,Z] >=< [X,Y],Z >$ *para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$*
5. $D_XY = \frac{1}{2}[X,Y]$ *para todos $X,Y \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 2.9. *Todo grupo de Lie compacto y conexo es un espacio simétrico respecto la métrica bi-invariante.*

Demostración. Sea $\psi : G \longrightarrow G$ el difeomorfismo $\psi(g) = g^{-1}$. Esta aplicación es claramente involutiva y por la proposición anterior es una isometría en G cuyo único punto fijo es e. Ahora dado $g \in G$, definimos la simetría global $\theta_g : G \longrightarrow G$, como $\zeta_g = L_g \circ R_g \circ \phi$, es decir, $\zeta_g(x) = gx^{-1}g$. Es una isometría por serlo R_g, L_g y ϕ y es fácil comprobar que es involutiva y tiene a g como punto fijo aislado. $\square$

Teorema 2.10. *Sea $\gamma(t) - \infty < t < \infty$ una geodésica en un espacio simétrico M. Sea ζ la simetría global de M y sea $\tau_c = \zeta_{\gamma(c)} \circ \zeta_{\gamma(c/2)}$ isometría asociada a cada punto $c \in \mathbb{R}$. Entonces $\tau_c(\gamma(t)) = \gamma(t+c)$. Si $X_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}M$, entonces $X_{\gamma(t)} = \tau_{t*}X_{\gamma(0)}$ es el campo vectorial paralelo (constante) asociado a lo largo de*

$\gamma(t)$, es decir, cuando t varia $\tau_{t*} : T_{\gamma(0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t)}M$ es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica.

Demostración. τ_c aplica la geodésica γ en si misma y en cierto sentido la "preserva"(ya que ζ la "invierte"). Luego τ_c debe ser de la forma $\tau_c(\gamma(t)) = \gamma(t+\text{constante})$ y esta constante es precisamente c ya que

$$\tau_c(\gamma(0)) = \zeta_{\gamma(c)} \circ \zeta_{\gamma(c/2)}(\gamma(0)) = \zeta_{\gamma(c)}(\gamma(c)) = \gamma(c)$$

Suponer $X_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}$ y definir un campo vectorial $X_{\gamma(t)}$ a lo largo de $\gamma(t)$ mediante la fórmula $X_{\gamma(t)} = \tau_{t*}X_{\gamma(0)}$. Sea $X'_{\gamma(t)}$ el único campo vectorial tal que $X'_{\gamma(0)} = X_{\gamma(0)}$ que es constante a lo largo de $\gamma(t)$. Veamos que ambos campos coinciden:
Para cada número real t_0, $\zeta_{\gamma(t_0)*}X'_{\gamma(t)}$ es el campo vectorial paralelo a lo largo de $\gamma(t)$ ya que $\zeta_{\gamma(t_0)}$ es una isometría. Por otro lado, $\zeta_{\gamma(t_0)*}X'_{\gamma(t_0)} = -X'_{\gamma(t_0)}$. Como $-X'_{\gamma(t_0)}$ es también un campo vectorial constante a lo largo de $\gamma(t)$ y coincide con $\zeta_{\gamma(t_0)*}X'_{\gamma(t)}$ en un punto, deben coincidir en todo punto. Aplicando este argumento de nuevo, obtentemos que $\tau_{c*}X'_{\gamma(t)} = X'_{\gamma(t+c)}$ para todo t y para cada constante c. Tomando $t = 0$ y $c = t$ probamos lo que queriamos. $\square$

Este resultado se utiliza para probar algo que vimos en nuestro anterior trabajo:

Teorema 2.11. *Sea G un grupo de Lie con la metrica bi-invariante y sea $X_e \in T_eG$. Entonces la única geodésica $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = e$ y $\gamma'(0) = X_e$ es precisamente el subgrupo uniparamétrico determinado por X_e.*

Y a partir de este teorema, obtenemos el siguiente resultado para el cual aprovecharemos otro resultado ya visto.

Teorema 2.12. *Sea G un grupo de Lie que actua transitivamente sobre una variedad M. Entonces M tiene una métrica Riemanniana tal que la transformación determinada por cada elemento $g \in G$ es una isometría si el grupo de isotropía H en un punto $p \in M$ es un subrgupo (de Lie) compacto y conexo de G.*

Demostración. En el anterior trabajo probamos que si el subgrupo de isotropía era cerrado en un punto $p \in M$, entonces M tenía una única estructura de variedad topológica y diferenciable tal que la acción dada era diferenciable.
Definamos un producto interior: Por ser el subgrupo de isotropía compacto y conexo, existe un producto interior invariante en T_pM que denotaremos por $\phi_p(X_p, Y_p)$. Dado $q \in M$ existe $g \in G$ tal que $\theta(q) = p$. Definimos

$$\phi_q(X_q, Y_q) = \theta_g * \phi_p(X_q, Y_q) = \phi_p(\theta_{g*}X_q, \theta_{g*}Y_q)$$

Si $\theta_{g_1}(q) = p$ también, entonces $gg_1^{-1} \in H$, luego $\theta^*_{gg_1^{-1}}\phi_p = \phi_p$ y

$$\theta_{g_1} * \phi_p = \theta_{g_1} * \theta_{gg_1^{-1}}\phi_p = \theta_{g_1} * \circ\theta_{g_1^{-1}} * \circ\theta_g * \phi_p = \theta_g * \phi_p$$

Luego, ϕ_q esta bien definida, es definida positiva ya que θ_g es difeomorfismo y fácilmente se ve que es $\mathcal{C}^\infty$ y G-invariante en M. Asi ϕ define una métrica Riemanniana en M respecto de la cual θ_g es una isometría en M. □

Proposición 2.13. *Para un grupo de Lie dotado con la métrica bi-invariante:*

1. $R_{XY}Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$ *para* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$
2. *Si* X, Y *generan un plano no degenerado en* $\mathfrak{g}$*, entonces:*

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\frac{<[X,Y],[X,Y]>}{<X,X><Y,Y>-<X,Y>^2}$$

$K(X,Y)$ es un número que, para cada $g \in G$ nos da la curvatura seccional del plano generado por X_g e Y_g. Algunas consecuencias de las fórmulas de curvatura son:

1. Si G es abeliano, entonces $K = 0$.
2. Si la métrica es Riemanniana, entonces $K \geq 0$.
3. $Ric|_{\mathfrak{g}} = -B/4$ donde B es la Killing form de G.

Un grupo de Lie G es *semisimple* si y sólo si su Killing form B es no degenerada. Como la Killing form de G es $\mathrm{Ad}(G)$-invariante, para un grupo de Lie G semisimple, la Killing form nos da una métrica bi-invariante.

Para dar algunas conexiones más profundas entre el álgebra y la geometría de los grupos de Lie necesitamos: "Si G es un grupo compacto de operadores lineales en un espacio vectorial real V, entonces hay un producto interno G-invariante en V (cada $g : V \longrightarrow V$ es una isometría lineal)".

Proposición 2.14. *Sea* B *la Killing form de un grupo de Lie conexo* G.

1. *Si* G *es compacto, entonces* B *es semidefinida negativa.*
2. *Si* B *es definida negativa, entonces* G *es compacto y tiene un grupo fundamental finito.*
3. G *es compacto y semisimple si y sólo si* B *es definida negativa.*

2.1. VARIEDADES COCIENTES. Recordaremos ahora un modo simple de construir variedades diferenciales a partir de grupos de Lie (esta desarrollado más ampliamente en el trabajo sobre grupos de Lie) porque es una parte esencial en la descripción de variedades riemannianas homogéneas y espacios simétricos.

Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G, sea G/H el conjunto de todos los gH. El origen o de G/H es el subgrupo H considerado como un elemento de G/H. La proyección $\pi : G \longrightarrow G/H$ manda cada $g \in G$ a gH. Para cada $a \in G$

la traslación $\tau_a : G/H \longrightarrow G/H$ manda cada gH sobre agH.
Para $a, b \in G$, $\pi \circ L_a = \tau_a \circ \pi$ y $\tau_{ab} = \tau_a \circ \tau_b$

Proposición 2.15. *Si H es un subgrupo cerrado de G, hay una única manera de hacer que G/H sea una variedad de modo que la proyección $\pi : G \longrightarrow G/H$ sea una submersión.*

La variedad así construida se llama *variedad cociente*. Como $\pi : G \longrightarrow G/H$ es una submersión, una aplicación $\phi : G/H \longrightarrow N$ es diferenciable si y sólo si $\phi \circ \pi : G \longrightarrow N$ es diferenciable.
Por ejemplo, $\tau_a \circ \pi = \pi \circ L_a$ nos dice que τ_a es diferenciable ya que tiene inversa ${\tau_a}^{-1}$.
Recordando la noción de acción $G \times M \longrightarrow M$ de un grupo de Lie en una variedad M, para una variedad cociente G/H la aplicación $G \times G/H \longrightarrow G/H$ tal que $(a, gH) \mapsto agH$ se llama la *acción natural de G en G/H*. Obviamente la acción es transitiva; ahora veremos que toda acción transitiva se puede representar así:
Si $G \times M \longrightarrow M$ es una acción y $o \in M$, el subgrupo de isotropía $H = \{g \in G; go = o\}$ es un subgrupo cerrado de G. Hay una aplicación natural j de la variedad cociente G/H en M que envía cada aH al punto ao. Esta aplicación está bien definida ya que:

$$aH = bH \Rightarrow b^{-1}aH = H \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow b^{-1}ao = o \Rightarrow ao = Bo$$

Proposición 2.16. *Sea $G \times M \longrightarrow M$ una acción transitiva y sea H su grupo de isotropía en un punto $o \in M$. Entonces la aplicación natural $j : G/H \longrightarrow M$ es un difeomorfismo. En particular, la proyección $g \mapsto go$ es una submersión $\pi : G \longrightarrow M$.*

Ejemplos: Esferas como variedades cocientes.

1. $S^n = SO(n+1)/SO(n) = O(n+1)/O(n)$
   $SO(n+1)$ actua en la esfera unidad S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ como una restricción de la acción usual de $GL(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esta acción de $SO(n+1)$ es transitiva en S^n
   El subgrupo de isotropía de $(1, 0 \cdots 0) \in S^n$ consiste en todos los elementos de $SO(n+1)$ de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, donde $b \in SO(n)$. Escribiendo este subgrupo como $SO(n)$ e ignorando el difeomorfismo natural j nos da $S^n = SO(n+1)/SO(n)$
2. $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n) = U(n+1)/U(n)$
   Es el caso complejo análogo al anterior, usando el producto Hermitiano natural en $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$.

Ignorando la diferenciabilidad por un momento, supongamos que un grupo de Lie G actua transitivamente en un conjunto σ. Si H es el grupo de isotropía de un elemento o de σ, entonces aún tenemos la función inyectiva natural de G/H en σ. Si el subgrupo H es cerrado, σ será una variedad si requerimos que j sea un difeomorfismo. Entonces, la acción es diferenciables, y la proyección $g \mapsto go$ es una submersión.
Usaremos esta construcción cuando veamos el ejemplo de las variedades Grassmanianas reales.

Lema 2.17. *Sea $M = g/H$. Si la proyección $\pi : G \longrightarrow M$ tiene una sección $\lambda : M \longrightarrow G$, entonces $\phi(m,h) = \lambda(m)h$ define un difeomorfismo $\phi : M \times H \longrightarrow G$.*

Las propiedades topológicas de H, G y G/H están intimamente relacionadas. En particular, información considerable sobre la conexión y los grupos fundamentales de estas tres variedades está concentrada en la siguiente proposicón.
Notemos primero que el conjunto $\pi_0(G)$ de las componentes conexas de un grupo de Lie G tiene una estructura de grupo natural. De hecho, la componente identidad G_0 de G es un subgrupo normal, y sus cocientes son las componentes de G, así $\pi_0(G)$ puede definirse como el grupo cociente G/G_0. Si $\phi : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo continuo, entonces $\phi(G_0) \subset G'_0$ y el homomorfismo resultante $\phi_0 : \pi_0(G) \longrightarrow \pi_0(G')$ nos dice como ϕ actua sobre las componentes.

Proposición 2.18. *Para una variedad cociente $M = G/H$ hay una sucesión exacta de grupos y homomorfismos:*

$$0 \longrightarrow \pi_2(M) \xrightarrow{\partial} \pi_1(H) \xrightarrow{i_*} \pi_1(G) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(M) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(H) \xrightarrow{i_0} \pi_0(G)$$

Más aún, i_0 es sobre si M es conexo.

Lema 2.19. *Si G/H y H son conexos (compactos), entonces G es conexo (compacto).*

Corolario 2.20.

1. *Los grupos clásicos $O(n), SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ son compactos y todos son conexos excepto $O(n)$, que tiene componentes $SO(n) = O^+(n)$ y $O^-(n)$.*
2. *$SU(n)$ y $Sp(n)$ son simplemente conexos, mientras que $\pi_1 U(n) \approx \mathbb{Z}$ y $\pi_1 SO(n) \approx$*

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & si\ n = 2, \\ \mathbb{Z}_2 & si\ n \geq 3 \end{cases}$$

3. ESPACIOS HOMOGÉNEOS REDUCTIVOS

Si un grupo de Lie G actua en una variedad M, un tensor métrico en M es G-invariante con la condición de que, para cada $g \in G$, el difeomorfismo $p \mapsto gp$ sea una isometría. Cuando la acción es transitiva, una tal métrica hace que obviamente M sea un espacio homogéneo riemanniano. No es difícil ver que cada espacio homogéneo riemanniano se puede expresar como una variedad cociente $M = G/H$ con una métrica G-invariante. La geometría de M puede describirse en términos de Lie.

Definición 3.1. Una variedad cociente $M = G/H$ es *reductiva* si hay un subespacio $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ $\mathrm{Ad}(H)$-invariante que es complementario a $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. Llamamos a $\mathfrak{m}$ *subespacio de Lie de G/H.*

Así $\mathfrak{g}$ es suma directa $\mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ de espacios vectoriales, $\mathfrak{m}$ no necesita ser cerrado bajo los corchetes como lo es $\mathfrak{h}$. La invarianza de $\mathfrak{m}$ bajo $\mathrm{Ad}(H)$ implica $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ Para $X \in \mathfrak{g}$, denotemos $X_{\mathfrak{h}}$ y $X_{\mathfrak{m}}$ las componentes de X en $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{m}$ respectivamente. La aplicación diferencial $d\pi$ de la proyección $\pi : G \longrightarrow M = G/H$ nos da un isomorfismo lineal de $\mathfrak{m}$ en $T_0(M)$. De hecho, identificando $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ como siempre con $T_e(H) \subset T_e(G)$, tenemos $d\pi(\mathfrak{h}) = 0$. Como π es una submersión, $d\pi$ es sobre y $d\pi|_{\mathfrak{m}}$ es un isomorfismo. En efecto, $\mathfrak{m}$ se convierte en el espacio tangente a M en o.

Proposición 3.2. *Sea $M = G/H$ reductiva, con subespacio de Lie $\mathfrak{m}$*

1. *El grupo de isotropía lineal $\{d\tau_b; b \in H\}$ actuando en $T_0(M)$ se corresponde bajo $d\pi$ con Ad(H) en $\mathfrak{m}$.*
2. *Imponer que $d\pi : \mathfrak{m} \approx T_0(M)$ sea una isometría lineal establece una correspondencia biyectiva entre los productos escalares Ad(H)-invariantes en $\mathfrak{m}$ y las métricas G-invariantes en M.*

Demostración. 1. La afirmación es que $d\pi_h \circ d\pi = d\pi \circ Ad_h$ en $\mathfrak{m}$ para todos los $h \in H$. Esto es claro ya que

$$\tau_h \circ \pi = \pi \circ C_h \text{ para } h \in H \text{ y } \mathrm{Ad}(H)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$$

2. Supongamos que $<,>$ es un producto escalar $\mathrm{Ad}(H)$-invariante en $\mathfrak{m}$. Com $d\pi : \mathfrak{m} \approx T_0(M)$ debe ser una isometría lineal, el producto escalar $<,>_0$ en $T_0(M)$ queda determinado. Pero entonces por el apartado anterior, $d\tau_h : T_0(M) \longrightarrow T_0(M)$ es una isometría lineal para todos los $h \in H$. Este hecho permitirá extender $<,>_0$ de un modo G-invariante a lo largo de todo M. Si $p = \tau_a(0) = \tau_b(0)$, entonces los isomorfismos lineales $d\tau_{a^{-1}}, d\tau_{b^{-1}} : T_p(M) \rightarrow$

$T_0(M)$ llevan $<,>_0$ al mismo producto escalar $<,>_p$ en $T_p(M)$. De hecho $\tau_a(0) = \tau_b(0)$ significa que $aH = bH$, de aquí $b^{-1}a = h \in H$. Entonces $\tau_h = \tau_{b^{-1}} \circ \tau_a$ y entonces, para $x, y \in T_pM$

$$< d\tau_{a^{-1}}(x), d\tau_{a^{-1}}(y) >=< d\tau_h d\tau_{a^{-1}}(x), d\tau_h d\tau_{a^{-1}}(y) >=< d\tau_{b^{-1}}(x), d\tau_{b^{-1}}(y) >$$

El tensor resultante $<,>$ en M es fácil ver que es G-invariante y su diferenciabilidad deriva en la existencia de secciones locales.

Recíprocamente, si $<,>$ es una métrica G-invariante en M, el grupo de isotropía lineal $\{d\tau_h|_0; h \in H\}$ consiste en isometrías lineales. como $d\pi|_{\mathfrak{m}}$ se requiere que sea una isometría lineal, el primer apartado nos dice que $d\pi$ lleva $<,>_0$ a un producto escalar $\mathrm{Ad}(H)$-invariante en $\mathfrak{m}$. □

La segunda afirmación de la proposición se generaliza para dar una correspondencia entre los tensores $\mathrm{Ad}(H)$-invariantes (r, s) en el espacio vectorial $\mathfrak{m}$ y los campos vectoriales G-invariantes (r, s) en M.
La idea es tratar la geometría de las variedades cociente como una generalización de la geometría de los grupos de Lie G (ya que G/H se reduce a G cuando $H = \{e\}$).
Desde ese punto de vista, el isomorfismo $\mathfrak{m} \approx T_0(G/H)$ generaliza el isomorfismo canónico $\mathfrak{g} \approx T_e(G)$, y una métrica G-invariante en G/H generaliza una métrica invariante a izquierda en G. La noción de métrica bi-invariante en G se generaliza como sigue:

Definición 3.3. Un *espacio homogéneo naturalmente reductivo* es una variedad cociente $M = G/H$ dotado con una métrica G-invariante tal que, para el correspondiente producto escalar en el subespacio de Lie $\mathfrak{m}$,

$$< [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z >=< X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}} > \text{ para } X, Y, Z \in \mathfrak{m}$$

.

De hecho, cuando $H = \{e\}, \mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ esta fórmula se reduce a la que ya vimos.
Para determinar las geodésicas y la curvatura:

Lema 3.4. *$\pi : G \longrightarrow M$ es una submersión Riemanniana.*

Demostración. Ver O'Neill Cap. 11, pág.312. □

Proposición 3.5. *Si $M = G/H$ es naturalmente reductiva, sus geodésicas partiendo de o vienen dadas por:*

$$\gamma_{d\pi X}(t) = \alpha(t)o = \pi\alpha(t) \text{ para todos los } t \in \mathbb{R}.$$

donde α es el subgrupo uniparamétrico de X en $\mathfrak{m}$.

Demostración. Ver O'Neill Cap.11, pág.313. □

"Los espacios homogéneos naturalmente reductivos son completos" De hecho, los subgrupos uni-paramétricos están definidos en toda la recta real; por lo anterior es cierto para las geodésicas que pasan por o y por homogeneidad, para todas las geodésicas.
Ahora encontraremos una fórmula para la curvatura:

Proposición 3.6. *Sea $M = G/H$ un espacio homogéneo naturalmente reductivo. Si X e Y generan un plano no degenerado en $\mathfrak{m}$, entonces:*
$$K(d\pi X, d\pi Y)_0 = \frac{\frac{1}{4}<[X,Y]_{\mathfrak{m}},[X,Y]_{\mathfrak{m}}> + <[[X,Y]_{\mathfrak{h}},X],Y>}{Q(X,Y)}$$

Demostración. Ver O'Neill Cap.11, pág.313 □

Un punto p de una variedad riemanniana es un *polo* si la aplicación exponencial $\exp_p$ es un difeomorfismo. Para un espacio homogéneo, si un punto es un polo, cada punto lo es.

Lema 3.7. *Si $M = G/H$ es un espacio homogéneo naturalmente reductivo para el que o es un polo, entonces la aplicación:*
$$(X, h) \mapsto (expX)h$$
es un difeomorfismo de $\mathfrak{m} \times H$ en G.

Demostración. Ver O'Neill Cap.11, pág.314. □

4. ESPACIOS SIMÉTRICOS

Primero veamos como expresar un espacio simétrico M en términos de grupos de Lie. Como M es homogéneo, $I(M)$ (el grupo de todas las isometrías de M bajo la composición de aplicaciones) es transitivo en M; de aquí se puede ver que la componente identidad $G = I_0(M)$ es transitiva. Así M se puede identificar con una variedad cociente G/H, donde H es el grupo de isotropía en un punto o de M.

Lema 4.1. *Con la notación anterior, si ζ es la simetría global de $M = G/H$ en o, la aplicación σ que lleva g a $\zeta g \zeta$ es un automorfismo involutivo de G. El conjunto $F = F(\sigma) = \{g \in G; \sigma(g) = g\}$ de puntos fijos de σ es un subgrupo cerrado de G tal que $F_0 \subset H \subset F$.*

Demostración. Ver O'Neill Cap.11 pág.315 □

Lo anterior nos da una idea clara sobre cómo construir espacios simétricos a partir de un grupo de Lie dado.

Teorema 4.2. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie conexo G. Sea σ un automorfismo involutivo de G tal que $F_0 \subset H \subset F = F(\sigma)$. Entonces cualquier tensor métrico G-invariante en $M = G/H$ hace a M un espacio simétrico Riemanniano tal que $\zeta \circ \pi = \pi \circ \sigma$ donde ζ es la simetría global de M en o y π es la proyección $G \longrightarrow M$.*

Demostración.

1. *Hay una única función $\zeta : M \longrightarrow M$ tal que $\zeta \circ \pi = \pi \circ \sigma$.* Si $g \in G$,entonces $\zeta(\pi g) = \pi(\sigma g)$ es una definición consistente porque $\pi g_1 = \pi g_2$ significa que $g_1 H = g_2 H$, y como σ fija H, entonces $\sigma(g_1)H = \sigma(g_2)H$, es decir, $\pi\sigma g_1 = \pi\sigma g_2$.
2. *ζ es un difeomorfismo.* Que ζ sea derivable se debe a la existencia de secciones locales de la submersión π. Como σ es involutiva, se sigue que ζ es involutiva, de ahí, $\zeta^{-1} = \zeta$.
3. *$d\zeta_o = -id$.* Claramente $\zeta(o) = o$. Si $y \in T_0(M)$, anticipamos el segundo resultado del siguiente lema, que implica que existe un $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $d\sigma(Y) = -Y$ y $d\pi(Y) = y$. Así,
$$d\zeta(y) = d\zeta(d\pi Y) = d\pi(d\sigma Y) = d\pi(-Y) = -y$$
4. *$\tau_{\sigma g} = \zeta\tau_g\zeta$ para cada $g \in G$.* De hecho, para cada $a \in G$,
$$\zeta\tau_g\pi a = \zeta\pi(ga) = \pi\sigma(ga) = \pi(\sigma g \cdot \sigma a) = \tau_{\sigma g}\pi(\sigma a) = \tau_{\sigma g}\zeta\pi a$$
5. *Relativo a cualquier tensor métrico G-invariante en M, ζ es una isometría.* Si $v \in T_g(M)$, sea $v_0 = d\tau_{g^{-1}}(v) \in T_0(M)$. Entonces usando los dos apartados anteriores:
$$\begin{aligned} < d\zeta v, d\zeta v > &=< d\zeta d\tau_g(v_0), d\zeta d\tau_g(v_0) > \\ &=< d\tau_{\sigma g} d\zeta(v_0), d\tau_{\sigma g} d\zeta(v_0) > \\ &=< d\zeta(v_0), d\zeta(v_0) >=< -v_0, -v_0 >=< v, v > \end{aligned}$$

La demostración del teorema se completa observando que si un espacio homogéneo tiene una simetría global, tiene una en cada punto $p = \tau(o)$, $\tau\zeta\tau^{-1}$. □

Lema 4.3. *Sea $H \subset G$ y σ como en el anterior teorema, con $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ las álgebras de Lie de $H \subset G$. Entonces:*

1. $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}; d\sigma(X) = X\}$
2. $\mathfrak{g}$ *es la suma directa de* $\mathfrak{h}$ *y el subespacio* $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}; d\sigma(X) = -X\}$.
3. Ad_h ($\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ *para todos los* $h \in H$.
4. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Demostración. Ver O'Neill Cap. 11, pág. 316. □

$(G/H, \sigma, B)$ decimos que es una estructura simétrica si cumple las condiciones siguientes:

1. H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie conexo G
2. σ es un automorfismo involutivo de G tal que $F_0 \subset H \subset F = F(\sigma)$.
3. B es un producto escalar $\mathrm{Ad}(H)$-invariante en $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}; d\sigma X = -X\}$.

Así pues, lo que nos muestra el teorema anterior es que G/H adquiere una estructura simétrica con la métrica G-invariante correspondiente a B. Esta estructura se da por supuesta cuando decimos que $M = G/H$ es un espacio simétrico G/H es entonces un espacio homogéneo naturalmente reductivo con $\mathfrak{m} = \{X; d\sigma X = -X\}$ como subespacio de Lie. De hecho por el lema anterior, $\mathfrak{m}$ es un complemento de $\mathfrak{h}$ $\mathrm{Ad}(H)$-invariante y la otra condición de la definición es trivial ya que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. En este contexto, $\mathfrak{m}$ siempre denotará el subespacio de valor propio -1 de $d\sigma$.

Proposición 4.4. *Sea $M = G/H$ un espacio simétrico riemanniano.*

1. *Las geodésicas que parten de o vienen dadas por:*
$$\gamma_{d\pi X}(t) = \alpha(t)o = \pi\alpha(t) \text{ para todos los } t$$
donde α es el subgrupo uni-paramétrico de $X \in \mathfrak{m}$.
2. *El tensor curvatura de o está dado por $R_{xy}z = d\pi[[X, Y], Z]$, donde $x, y, z \in T_0(M)$ se corresponden bajo $d\pi$ con $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. Si x e y generan un plano no-degenerado, entonces*
$$K(x, y) =< [[X, Y], X], Y > /Q(X, Y)$$

Demostración. Ver O'Neill Cap.11 pág.317 □

Observación 4.5. Hasta ahora todos los resultados que hemos visto no sólo eran válidos para variedades riemannianas, sino también para variedades semi-riemannianas. Sin embargo en el caso riemanniano, el estudio de espacios simétricos está concentrado en los siguientes tipos extremos.

Definición 4.6. Un espacio simétrico Riemanniano $M = G/H$ es del *tipo compacto* si la Killing form B de G es definida negativa. Por otro lado, decimos que es del *tipo no compacto* si B es definida negativa en $\mathfrak{h}$ y definida positiva en $\mathfrak{m}$.

De hecho, cualquier espacio simétrico Riemanniano simplemente conexo se puede expresar como un producto cuyos factores son compactos, no compactos o euclideos. Las propiedades topológicas y geométricas de estos tipos son bastante distintas.

Teorema 4.7. *Sea $M = G/H$ un espacio simétrico Riemanniano.*

1. *Si M es del tipo compacto, entonces $K \geq 0$ y $Ric > 0$, de ahí M es compacto y $\pi_1(M)$ es finito.*
2. *Si M es del tipo no compacto, entonces $K \leq 0$ y $Ric < 0$, de aquí M es difeomorfo al espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ (no compacto, simplemente conexo). Más aún, G es difeomorfo a $H \times \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ver O'Neill Cap.11 pág. 320 □

Proposición 4.8. *(S. Kobayashi) Una variedad Riemanniana homogénea con $K \leq 0$ y $Ric < 0$ es simplemente conexa. El rtesultado se sigue de estos tres factores sobre una variedad homogénea Riemanniana M:*

1. *Cada geodésica maximal de M es o inyectiva o periódica.*
2. *Si M no es simplemente conexa, contiene una geodésica periódica.*
3. *Si $K \leq 0$ y $Ric < 0$, entonces M contiene geodésicas no periódicas.*