NOTAS DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Enrique ARTAL BARTOLO

13 de enero del 2000

Versión 0.3

Resumen. El objetivo de estas notas es dejar constancia escrita de las nociones que complementan lo que aparece en el libro *Riemannian Geometry* de do Carmo y que es la referencia básica de este curso. Estas notas pretenden ser interactivas y las modificaciones se producirán tanto por el añadido de nuevos tópicos como por la mejora de los que ya aparecen.

§1.- Grupos de Lie

Sea G una variedad diferenciable que además es un grupo para una operación $\cdot$. Denotemos e el elemento neutro e introduzcamos las aplicaciones $\mu\colon G \times G \to G$, $\mu(x, y) := x \cdot y$, $\sigma\colon G \to G$, $\sigma(x) := x^{-1}$ y $\eta\colon G \times G \to G$, $\eta(x, y) := x \cdot y^{-1}$.

Definición 1.1. Diremos que G es un grupo de Lie si las aplicaciones μ y σ son diferenciables.

Observemos que G es un grupo de Lie si y solo si η es diferenciable. Dado G un grupo de Lie y $x \in G$ definimos las aplicaciones $L_x\colon G \to G$, $L_x(y) := x \cdot y$, $R_x\colon G \to G$, $R_x(y) := y \cdot x$. Ambas son difeomorfismos y $L_{x^{-1}} = L_x^{-1}$, $R_{x^{-1}} = R_x^{-1}$.

Definición 1.2. Sean G, H grupos de Lie. Un homomorfismo (resp. isomorfismo) de grupos de Lie es una aplicación $\phi\colon G \to H$ que es diferenciable (resp. difeomorfismo) y homomorfismo (resp. isomorfismo) de grupos.

Dado G grupo de Lie y $x \in G$, el automorfismo interno $I_x := L_x \circ R_{x^{-1}} = R_{x^{-1}} \circ L_x$ es un automorfismo de grupos de Lie.

Ejemplo 1.3. El ejemplo más importante de grupo de Lie es $GL(F)$, donde F es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si $F = \mathbb{R}^k$, el grupo es $GL(k, \mathbb{R})$. Es fácil ver que la elección de una base ordenada de F produce un isomorfismo de grupos de Lie entre $GL(F)$ y $GL(k, \mathbb{R})$ (si F es de dimensión k).

Notación 1.4. Los elementos de $\mathbb{R}^k$ los veremos como vectores columna y las matrices de $GL(k, \mathbb{R})$ definen automorfismos de $\mathbb{R}^k$ por multiplicación a izquierda.

Es posible encontrar la última versión de este texto (si ha dado tiempo a actualizar) en `http://zariski.unizar.es`

§2.- Acciones diferenciables

Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Sea $\psi\colon G \times M \to M$ una aplicación diferenciable; denotemos $\psi(x, p) = x \cdot p$. Supongamos que:

– $\forall x, y \in G$, $\forall p \in M$, $x \cdot (y \cdot p) = (x \cdot y) \cdot p$.

– $\forall p \in M$, $e \cdot p = p$.

Definición 2.1. Diremos que ψ es una acción diferenciable si lo es como aplicación. En tal caso se dice que G actúa sobre M mediante ψ.

Dado $x \in G$, tenemos aplicaciones $\psi_x\colon M \to M$, $\psi_x(p) := x \cdot p$, que son difeomorfismos y $\psi_{x\cdot y} = \psi_x \circ \psi_y$, $\psi_e = 1_M$, $\psi_{x^{-1}} = \psi_x^{-1}$.

Ejemplo 2.2. El ejemplo más importante de acción diferenciable viene dado por $\psi\colon GL(F) \times F \to F$, $\psi(g, v) := g(v)$, $g \in GL(F)$, $v \in F$, donde F es un espacio vectorial de dimensión finita.

Sea F es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión k y sea ψ la acción anterior. Consideremos la acción $\varphi\colon GL(k, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ definida mediante producto de matrices donde los elementos de $\mathbb{R}^k$ los vemos como matrices columna. Fijemos una base ordenada de F que produce isomorfismos de F con $\mathbb{R}^k$ y de $GL(F)$ con $GL(k, \mathbb{R})$. En esta situación es fácil ver que las dos acciones conmutan con los isomorfismos.

Definición 2.3. Sea F un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea G un grupo de Lie. Diremos que una acción diferenciable $\psi\colon G \times F \to F$ es lineal si $\forall g \in G$, $\forall u, v \in F$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$ se tiene $g \cdot (tu + sv) = t(g \cdot u) + s(g \cdot v)$.

Observación 2.4. Observemos que es lo mismo darse una acción lineal ψ de G sobre F que un homomorfismo de grupos de Lie $\Psi\colon G \to GL(F)$. Dada ψ construimos Ψ como sigue: sea $g \in G$; para definir $\Psi(g)\colon F \to F$ imponemos $\Psi(g)(v) = g \cdot v$, $\forall v \in F$. Dado Ψ construimos ψ como sigue: dados $g \in G$ y $v \in F$ definimos $\psi(g, v) := \Psi(g)(v)$. A partir de ahora las acciones lineales se determinarán a partir del homomorfismo Ψ.

Por la observación anterior, vemos que una forma de construir nuevas acciones a partir de una dada es, dados dos espacios vectoriales F_1, F_2, considerar homomorfismos de grupos de Lie $GL(F_1) \to GL(F_2)$.

Ejemplo 2.5. Sea F un espacio vectorial de dimensión k. Consideremos el espacio dual F^*. Recordemos que dado un elemento $g \in GL(F)$ podemos considerar su dual $g^* \in GL(F^*)$, dado por: si $\rho \in F^*$ entonces $g^*(\rho) := \rho \circ g$. Como el functor dual es contravariante para conseguir un homomorfismo de grupos de Lie, debemos invertir. Así, la aplicación $GL(F) \to GL(F^*)$, $g \mapsto (g^*)^{-1}$, es un isomorfismo de grupos de Lie. En particular, si un grupo G actúa linealmente sobre un espacio vectorial F, esta acción induce de forma natural otra acción lineal de G sobre F^*.

El ejemplo anterior justifica la siguiente sección.

§3.- Un poco de álgebra lineal

Durante esta sección F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión k. Fijamos dos bases ordenadas $v_1, \ldots, v_k$ y $w_1, \ldots, v_k$. Sea $A \in GL(k, \mathbb{R})$ la matriz de cambio de base, i.e.,

$$(v_1 \ldots v_k) = (w_1 \ldots w_k)A$$

Con esta notación, si $v \in F$, $v = \sum_{i=1}^k t_i v_i = v = \sum_{i=1}^k s_i w_i$, entonces,

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}.$$

Observemos que la elección de la base $v_1, \ldots, v_k$ determina un isomorfismo $\phi_v \colon \mathbb{R}^k \to F$ tal que $\phi_v(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^k t_i v_i$. Definimos ϕ_w de forma similar. La igualdad anterior se expresa ahora diciendo que $\phi_w^{-1} \circ \phi_v \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ es la multiplicación a izquierda por la matriz A.

Como hemos dicho en la sección anterior, la elección de la base $v_1, \ldots, v_k$ determina también un isomorfismo $\psi_v \colon GL(k; \mathbb{R}) \to GL(F)$, donde $\psi_v(P) = \phi_v \circ P \circ \phi_v^{-1}$, $\forall P \in GL(n, \mathbb{R})$. La imagen de P es el automorfismo de F cuya matriz asociada en la base $v_1, \ldots, v_k$ es P.

Consideremos ahora el espacio $l - Lin(F)$ de las l-formas mutilineales sobre F. Es inmediato identificar este espacio con $(F^*)^{\otimes l} := \underbrace{F^* \otimes \cdots \otimes F^*}_{l \text{ veces}}$.

Se trata por tanto de un espacio vectorial de dimensión kl, con una base

$$\{v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_l}^* | 1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq k\}, \qquad (1)$$

donde $v_1^*, \ldots, v_k^*$ es la base dual de $v_1, \ldots, v_k$ en F^*. Observemos que

$$0 - Lin(F) = \mathbb{R}, \quad 1 - Lin(F) = F^*.$$

De forma natural podemos definir el producto de una l_1-forma con una l_2-forma lo que da lugar a una $(l_1 + l_2)$-forma.

Si $g \in GL(F)$ tenemos inducido un automorfismo $g^* \colon l - Lin(F) \to l - Lin(F)$ tal que si $\phi \colon F^l \to \mathbb{R}$ es un elemento de $l - Lin(F)$, entonces:

$$g^*(\phi)(u_1, \ldots, u_l) = \phi(g(u_1), \ldots, g(u_l)), \quad u_1, \ldots, u_l \in F.$$

Como antes se induce un homomorfismo de grupos de Lie,

$$\begin{array}{ccc} GL(F) & \to & GL(l - Lin(F)), \\ g & \mapsto & (g^*)^{-1}. \end{array}$$

Consideremos ahora en F la base $v_1, \ldots, v_k$; recordemos que esta base induce un isomorfismo de grupos de Lie $GL(k, \mathbb{R}) \to GL(F)$; de la misma forma, ordenando de alguna forma la base (1) (por ejemplo, orden léxicográfico), obtenemos un isomorfismo $GL(kl, \mathbb{R}) \to GL(l - Lin(F)$. El homomorfismo de grupos de Lie anterior se puede interpretar matricialmente como un homomorfismo $GL(k, \mathbb{R}) \to GL(kl, \mathbb{R})$. En el caso $l = 1$ el homomorfismo correspondiente es $P \mapsto {}^tP^{-1}$. De la misma forma observemos que si consideramos ahora en $F^* = 1 - Lin(F)$ las bases $\{v_1^*, \ldots, v_k^*\}$ y $\{w_1^*, \ldots, w_k^*\}$, se tiene

$$(v_1^* \ldots v_k^*) = (w_1^* \ldots w_k^*)^t A^{-1}.$$

Es también interesante el espacio vectorial $\bigwedge^l(F^*)$ de las l-formas alternadas. Sean $\phi_j : F^{l_j} \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, dos formas alternadas. Vamos a definir una $(l_1 + l_2)$-forma alternada $\phi_1 \wedge \phi_2$ como sigue. Sean $u_1, \ldots, u_{l_1+l_2} \in F$; entonces:

$$
\begin{aligned}
&\phi_1 \wedge \phi_2(u_1, \ldots, u_{l1+l_2}) := \\
&\quad = \frac{1}{l_1! l_2!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{l_1+l_2}} (-1)^\sigma \phi_1(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(l_1)}) \phi_2(u_{\sigma(l_1+1)}, \ldots, u_{\sigma(l_1+l_2)}) = \\
&\qquad = \sum_{\sigma \in \Sigma_{l_1+l_2}(l_1,l_2)} (-1)^\sigma \phi_1(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(l_1)}) \phi_2(u_{\sigma(l_1+1)}, \ldots, u_{\sigma(l_1+l_2)}),
\end{aligned}
$$

donde $\Sigma_{l_1+l_2}$ es el grupo de permutaciones de $(l_1 + l_2)$ cifras y $\Sigma_{l_1+l_2}(l_1, l_2)$ es el subconjunto de las anteriores que contiene a las permutaciones $(l_1 + l_2)$-*shuffles*, es decir, los elementos $\sigma \in \Sigma_{l_1+l_2}$ tales que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(l_1), \quad \sigma(l_1 + 1) < \cdots < \sigma(l_1 + l_2).$$

Es fácil ver que se trata efectivamente de un elemento de $(l_1+l_2)-Lin(F)$. Consideremos ahora $\bigwedge^*(F^*) := \sum_{l \in \mathbb{N}} \bigwedge^l(F^*) = \sum_{l=0}^k \bigwedge^l(F^*)$. Si extendemos bilinealmente el producto anterior este espacio vectorial se convierte en una $\mathbb{R}$-álgebra con las siguientes propiedades:

- Es *graduada*, es decir, si decimos que un elemento de $\bigwedge^l(F^*)$ es homogéneo de grado l, entonces el producto de elementos homogéneos es homogéneo y su grado es la suma de los grados de los factores.
- Es *asociativa* (hacer las cuentas).
- Es *anticonmutativa*; es decir si ϕ_1 es homogéneo de grado l_1 y ϕ_2 es homogéneo de grado l_2, entonces $\phi_1 \wedge \phi_2 = (-1)^{l_1 l_2} \phi_2 \wedge \phi_1$.

Observemos que una base de $\bigwedge^l(F^*)$ viene dada por

$$\{v_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{j_l}^* | 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k\},$$

por lo que $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^l(F^*) = \binom{k}{l}$ y $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge^*(F^*) = 2^k$. No es difícil interpretar los elementos de esta base como formas:

$$(v_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{j_l}^*)(v_{i_1}, \ldots, v_{i_l}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{j_1, \ldots, j_l\} \neq \{i_1, \ldots, i_l\} \\ (-1)^\sigma & \text{si } i_r = j_{\sigma(r)},\ r = 1, \ldots, l, \sigma \in \Sigma_l. \end{cases}$$

Es particularmente interesante el caso $l = k$. Sean $u_1, \ldots, u_k \in F$ vectores y consideremos la matriz $B \in M(k, \mathbb{R})$ tal que

$$(u_1 \ldots u_k) = (v_1 \ldots v_k)B.$$

Entonces,

$$(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*)(u_1, \ldots, u_k) = \det B.$$

Es decir, la familia $u_1, \ldots, u_k$ es linealmente independiente si y solo si al aplicarle una k-forma lineal no nula el resultado es nulo. Interpretemos estos resultados matricialmente: si consideramos los isomorfismos $GL(k, \mathbb{R}) \to GL(F)$ y $\mathbb{R}^* = GL(1, \mathbb{R}) \to GL(\bigwedge^k(F^*))$ definidos por la bases $\{v_1, \ldots, v_k\}$ y $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*$, entonces el homomorfismo $GL(F) \to GL(\bigwedge^k(F^*))$ se expresa mediante el homomorfismo $GL(k, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ dado por $P \mapsto \det P^{-1}$. Además, tenemos:

$$(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*) = (w_1^* \wedge \cdots \wedge w_k^*) \det A^{-1}.$$

§4.- Fibrados lineales

Sea ahora M una variedad diferenciable de dimensión n y sea F un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $k < \infty$. Fijemos además una acción lineal diferenciable de un grupo de Lie G sobre F, que está determinada por un homomorfismo de grupos de Lie $\Psi\colon G \to GL(F)$.

Definición 4.1. Un G-fibrado vectorial o lineal sobre M de fibra F (y rango k) es una aplicación diferenciable (llamada proyección del fibrado) $\pi\colon E \to M$, donde E es una variedad diferenciable de dimensión $n+k$, junto con un atlas maximal de cartas fibradas, es decir, una familia $\{\Phi_\alpha\colon V_\alpha \times F \to \pi^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ de aplicaciones diferenciables (llamadas cartas fibradas) tales que:

(i) $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento abierto de M;

(ii) $\forall \alpha \in A$ la aplicación Φ_α es un difeomorfismo y además $\forall p \in M$ y $\forall v \in F$ se tiene que $\pi\circ\Phi_\alpha(p,v) = p$;

(iii) dados $\alpha, \beta \in A$, existen aplicaciones diferenciables $g_{\beta\alpha}\colon V_\alpha \cap V_\beta \to G$ (funciones de transición) tales que, si $p \in V_\alpha \cap V_\beta$ y $v \in F$, entonces
$$\Phi_\alpha(p,v) = \Phi_\beta(p, g_{\beta\alpha}(p)\cdot v);$$

(iv) dados $\alpha, \beta, \gamma \in A$ y si $p \in V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma$, se tiene $g_{\gamma\alpha}(p) = g_{\gamma\beta}(p)\cdot g_{\beta\alpha}(p)$;

(v) es una familia maximal de cartas fibradas con respecto a las propiedades (i)-(iv).

Como en el caso de la definición de variedades diferenciables, normalmente construiremos fibrados a partir de atlas de cartas fibradas no necesariamente completos. Si se tiene $F = \mathbb{R}^k$, $G = GL(k,\mathbb{R})$ y la acción es la estándar, diremos simplemente que se trata de un fibrado lineal de rango k.

Observación 4.2. Como localmente la proyección de un fibrado es como la primera proyección de un producto, deducimos que dichas proyecciones son submersiones.

Ejemplo 4.3. La variedad $M \times F$ con la primera proyección. Es lo que se llama fibrado trivial.

Ejemplo 4.4. El fibrado tangente $\pi\colon TM \to M$ a una variedad M es un fibrado de rango n. Podemos construir el siguiente atlas fibrado asociado a un atlas de la variedad. Sea $\mathbf{x}_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset M$ una carta de la variedad M; denotemos $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ las coordenadas de U_α. Consideramos:
$$\Phi_\alpha\colon V_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(V_\alpha),$$
dado por $\Phi_\alpha(p,v) := \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}_{|p}$, donde $p \in V_\alpha$, $v = {}^t(v_1 \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dadas dos cartas $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$ la función de transición es:
$$g_{\beta\alpha}\colon V_\alpha \cap V_\beta \to GL(n,\mathbb{R}), \qquad g_{\beta\alpha}(p) := \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}\right)_{|\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)},$$
donde $\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha}\right)$ es la matriz jacobiana del cambio de cartas
$$\mathbf{x}_\beta^{-1}\circ\mathbf{x}_\alpha\colon \mathbf{x}_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \to \mathbf{x}_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta).$$

Observación 4.5. Si tenemos un fibrado $\pi\colon E \to M$ y $N \subset M$ es una subvariedad (por ejemplo, un abierto), entonces $\pi\colon \pi^{-1}(N) \to N$ también es un fibrado con el mismo espacio vectorial y la misma acción. Denotaremos normalmente $\pi^{-1}(N) = E_{|N}$.

Lema 4.6. *Sea $\pi\colon E \to M$ un G-fibrado lineal de fibra F. Denotemos $E_p := \pi^{-1}(p)$, $p \in M$. Entonces, E_p admite una estructura de espacio vectorial de dimensión k de forma que si $\Phi_\alpha\colon V_\alpha \times F \to \pi^{-1}(V_\alpha)$ es una carta fibrada tal que $p \in V_\alpha$, entonces la aplicación $\varphi_\alpha^p\colon F \to E_p$ dada por $\varphi_\alpha^p(v) := \Phi_\alpha(p, v)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Dado un atlas fibrado parametrizado por A, fijemos $\alpha \in A$ tal que $p \in V_\alpha$. Así, dados $e_1, e_2 \in E_p$ y $t, s \in \mathbb{R}$, definimos:

$$te_1 + se_2 := \varphi_\alpha^p(t(\varphi_\alpha^p)^{-1}(e_1) + s(\varphi_\alpha^p)^{-1}(e_2)).$$

Es inmediato que estas operaciones definen una estructura de espacio vectorial en E_p para las que φ_α^p es un isomorfismo. Sea ahora $\beta \in A$ tal que $p \in V_\beta$. La acción de G sobre F viene dada por un homomorfismo $\Psi\colon G \to GL(F)$. Observemos que $\varphi_\alpha^p = \varphi_\beta^p \circ \Psi(g_{\beta\alpha}(p))$, por lo que φ_β^p también es un isomorfismo lineal. $\square$

Gracias a este lema podemos considerar un fibrado como una familia de espacios vectoriales parametrizada por M y que varía *diferenciablemente*. Además va a permitir definir los morfismos de esta categoría.

Definición 4.7. Sea M una variedad diferenciable y sean $\pi_i\colon E^i \to M$, $i = 1, 2$, dos fibrados lineales. Diremos que una aplicación diferenciable $h\colon E^1 \to E^2$ es un homomorfismo de G-fibrados si $\pi_2 \circ h = \pi_1$ y si $\forall p \in M$ la aplicación $h_p\colon E_p^1 \to E_p^2$, $h_p(e_1) := h(e_1)$, es una aplicación lineal. Si h es biyectiva y h^{-1} también es homomorfismo diremos que h es un isomorfismo.

Definición 4.8. Sea M una variedad diferenciable y sean $\pi_i\colon E^i \to M$, $i = 1, 2$, dos fibrados lineales tales que E^1 es una subvariedad de E^2 y $\pi_1 = \pi_{2|E^1}$. Diremos que E^1 es un subfibrado de E^2 si la inclusión es un homomorfismo inyectivo de fibrados.

Ejemplo 4.9. Un fibrado es trivial (o mejor, trivializable) si es isomorfo al fibrado trivial. Un tal isomorfismo es una trivialización.

§5.- Secciones de un fibrado

Fijemos un G-fibrado $\pi\colon E \to M$ de fibra F, $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión k, definido mediante $\Psi\colon G \to GL(F)$. Para ordenar las ideas, fijemos una base $v_1, \ldots, v_k$ de F. Esta base define un isomorfismo natural $\mathbb{R}^k \to F$, que nos permite identificar ambos espacios, y la acción de G está determinada por esta identificación por un homomorfismo de grupos de Lie $\tilde{\Psi}\colon G \to GL(k, \mathbb{R})$. La identificación asocia a una k-tupla ${}^t(t_1 \ldots t_k)$ el vector $\sum_{i=1}^k t_i v_i$ y a un vector $v \in F$ la k-tupla de las coordenadas de v en la base $v_1, \ldots, v_k$.

Expresemos de manera adecuada estas identificaciones. La base define un isomorfismo lineal $\phi_v\colon \mathbb{R}^k \to F$ que induce a su vez un isomorfismo de grupos de Lie $\psi_v\colon GL(k, \mathbb{R}) \to GL(k, F)$; recordemos que si $P \in GL(k, \mathbb{R})$, $\psi_v(P)$ es el automorfismo de F cuya matriz en la base $v_1, \ldots, v_k$ es P. De esta forma, $\Psi = \psi_v \circ \tilde{\Psi}$. Las cartas fibradas $\Phi_\alpha\colon V_\alpha \times F \to E_{V_\alpha}$ inducen cartas fibradas modeladas en $\mathbb{R}^k$ denotadas $\tilde{\Phi}_\alpha\colon V_\alpha \times \mathbb{R}^k \to E_{V_\alpha}$, de forma que $\Phi_\alpha = \tilde{\Phi}_\alpha \circ (1_{V_\alpha} \times \psi_v)$. Si componemos las funciones de transición con $\tilde{\Psi}$ obtenemos para $\alpha, \beta \in A$ aplicaciones $\tilde{\Psi} \circ g_{\beta\alpha} : V_\alpha \cap V_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ que pueden verse como matrices (no degeneradas) de funciones reales $u_{\beta\alpha}^{ij}$, $i, j = 1, \ldots, k$.

Definición 5.1. Una aplicación diferenciable $s\colon M \to E$ tal que $\pi\circ s = 1_M$ se llama sección del fibrado. Si $V \subset M$ es un abierto, a las secciones de $E_{|V}$ se les llama secciones locales de E sobre V. El espacio $\Gamma(E)$ de todas las secciones es claramente un $C^\infty(M)$-módulo.

Fijemos una carta fibrada $\Phi_\alpha : V_\alpha \times F \to \pi^{-1}(V_\alpha)$. Cada elemento v_i de la base induce una sección local $s_i^\alpha\colon V_\alpha \to \pi^{-1}(V_\alpha)$ dada por $s_i^\alpha(p) := \Phi_\alpha(p, v_i)$. Obtenemos así una familia $s_1^\alpha, \dots, s_k^\alpha$ de secciones locales que cumplen que al evaluarlas en cada $p \in V_\alpha$ obtenemos una base de E_p.

Observación 5.2. Observemos que dado $p \in V_\alpha$ la matriz de la aplicación lineal $\varphi_\alpha^p\colon F \to E_p$ en las bases $v_1, \dots, v_k$ para F y $s_1^\alpha(p), \dots, s_k^\alpha(p)$ para E_p es la matriz identidad.

Definición 5.3. Dado V un abierto de M, diremos que $s_1, \dots, s_k$ secciones locales sobre V forman una base de secciones si $\forall p \in V$, $s_1(p), \dots, s_k(p)$ es una base de E_p.

Observación 5.4. Un fibrado es trivializable si y solo si admite una base de secciones global (es decir sobre M) y cada base define una trivialización. En un fibrado trivial $\Gamma(E)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre de rango la dimensión de la fibra.

Proposición 5.5. *Dadas dos cartas fibradas Φ_α, Φ_β, consideremos las bases locales $s_1^\alpha, \dots, s_k^\alpha$ y $s_1^\beta, \dots, s_k^\beta$ obtenidas mediante las cartas. En $V_\alpha \cap V_\beta$, el cambio de base se produce de la forma:*

$$(s_1^\alpha \dots s_k^\alpha) = (s_1^\beta \dots s_k^\beta)(u_{\beta\alpha}^{ij})_{i,j=1,\dots,k}.$$

Demostración. Sea $p \in V_\alpha \cap V_\beta$. Consideremos $s_j^\alpha(p) = \varphi_\alpha^p(v_j) = \Phi_\alpha(p, v_j)$. Por tanto,

$$s_j^\alpha(p) = \Phi_\beta(p, g_{\beta\alpha}(p) \cdot v_j) = \varphi_\beta^p(g_{\beta\alpha}(p) \cdot v_j) = \varphi_\beta^p(\Psi(g_{\beta\alpha}(p))(v_j)).$$

Como $(g_{\beta\alpha}^{ij}(p))_{i,j}$ es la matriz de $\Psi(g_{\beta\alpha}(p))$ en la base $v_1, \dots, v_k$, nos debemos interesar por la j-ésima columna de esta matriz y deducimos que:

$$s_j^\alpha(p) = \varphi_\beta^p(\sum_{i=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij}(p) v_i) = \sum_{i=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij}(p)\varphi_\beta^p(v_i) = \sum_{i=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij}(p) s_i^\beta(p),$$

lo que nos da la fórmula. $\square$

Consideremos ahora una sección $s\colon M \to E$. Vamos a interpretar esta sección en términos de cartas fibradas modeladas tanto en F como en $\mathbb{R}^k$. Consideremos una carta fibrada Φ_α.

Cartas sobre F. Es fácil ver que dado $p \in V_\alpha$, existe un único elemento $s_\alpha(p) \in F$ tal que $s(p) = \Phi_\alpha(p, s_\alpha(p))$ y que la función vectorial $s_\alpha\colon V_\alpha \to F$ es diferenciable. Por tanto la sección s nos permite construir una familia de funciones vectoriales $\{s_\alpha\colon V_\alpha \to F\}_{\alpha\in A}$. Si $p \in V_\alpha \cap V_\beta$, como se tiene:

$$\Phi_\alpha(p, s_\alpha(p)) = s(p) = \Phi_\beta(p, s_\beta(p)),$$

deducimos que $s_\beta(p) = g_{\beta\alpha}(p) \cdot s_\alpha(p)$. Recíprocamente, si tenemos una familia $\{s_\alpha\colon V_\alpha \to F\}_{\alpha\in A}$ verificando la condición anterior, podemos construir una sección global s.

Cartas sobre $\mathbb{R}^k$. De la misma forma que antes, dado $p \in V_\alpha$, existe un único elemento $\tilde{s}_\alpha(p) = {}^t(v_\alpha^1(p) \dots v_\alpha^k(p)) \in F$ tal que $s(p) = \tilde{\Phi}_\alpha(p, \tilde{s}_\alpha(p))$ y que las funciones $v_\alpha^j \colon V_\alpha \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, son diferenciables. Por tanto la sección s nos permite construir una familia de k-tuplas de funciones reales $\{(v_\alpha^j \colon V_\alpha \to \mathbb{R})_{j=1}^k\}_{\alpha \in A}$. La relación con el apartado anterior viene dada por:

$$s_{|V_\alpha} = \sum_{j=1}^k v_\alpha^j s_j^\alpha.$$

Si $p \in V_\alpha \cap V_\beta$, se tiene como antes:

$$\begin{pmatrix} v_\beta^1(p) \\ \vdots \\ v_\beta^k(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\beta\alpha}^{11}(p) & \cdots & u_{\beta\alpha}^{1k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{\beta\alpha}^{k1}(p) & \cdots & u_{\beta\alpha}^{kk}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\alpha^1(p) \\ \vdots \\ v_\alpha^k(p) \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad se deduce de la anterior y de (5.5) teniendo en cuenta que los números reales $v_\alpha^1(p), \cdots, v_\alpha^k(p)$ son las coordenadas de $s_\alpha(p)$ en la base $v_1, \dots, v_k$ y por tanto las de $s(p)$ en la base $s_1^\alpha(p), \dots, s_k^\alpha(p)$ (y lo mismo en la carta asociada a β).

§6.- Fibrados asociados

Consideremos como antes un G-fibrado $\pi \colon E \to M$ de fibra F y acción determinada por $\Psi \colon G \to GL(F)$. Dado un atlas fibrado parametrizado por un conjunto A obtenemos una familia de funciones G-valoradas (las funciones de transición) $\{g_{\beta\alpha} \colon V_\alpha \cap V_\beta \to G\}_{\alpha,\beta \in A}$ que cumplen que si $\alpha, \beta, \gamma \in A$ entonces $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \cdot g_{\beta\alpha}$ en $V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma$, donde $\cdot$ es el producto en G. En particular, $g_{\alpha\alpha}$ es la aplicación constante sobre el elemento neutro de G y $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$, donde ${}^{-1}$ significa tomar el inverso en el grupo de Lie.

La siguiente demostración prueba que a partir de una tal familia obtenemos el fibrado.

Teorema 6.1. *Sea M una variedad diferenciable, F un espacio vectorial de dimensión finita, G un grupo de Lie que actúa sobre F mediante $\Psi \colon G \to GL(F)$. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recubrimiento abierto de M de tal forma que existe una familia $\{g_{\beta\alpha} \colon V_\alpha \cap V_\beta \to G\}_{\alpha,\beta \in A}$ que cumple que si $\alpha, \beta, \gamma \in A$ entonces $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \cdot g_{\beta\alpha}$ en $V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma$, donde $\cdot$ es el producto en G. Entonces, existe un único G-fibrado (salvo isomorfismo) $\pi \colon E \to M$ de fibra F y acción G donde la familia anterior sirve de funciones de transición.*

Recordemos la construcción de dicho fibrado: Sea

$$\tilde{E} \colon = \coprod_{\alpha \in A} V_\alpha \times F,$$

con la topología de la unión disjunta. Consideramos en E la siguiente relación: dados $p \in V_\alpha$, $q \in V_\beta$, $v, w \in F$,

$$(p, v)_\alpha \sim (q, w)_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} p = q & \text{y} \\ w = g_{\beta\alpha}(p) \cdot v \end{cases}$$

Se demuestra que esta relación es de equivalencia y denotemos E el espacio cociente y $\rho \colon \tilde{E} \to E$ la proyección. Definimos $\pi \colon E \to M$ de forma natural y demostramos que es el fibrado que nos piden.

El teorema anterior es el paso esencial en la construcción de fibrados asociados.

Definición 6.2. Dos G-fibrados $\pi_i\colon E_i \to M$ de fibra F_i, $i = 1, 2$, se dice que son asociados si poseen atlas fibrados asociados a los mismos recubrimientos de forma que coincidan las cartas de transición.

Observemos que dado un G-fibrado π y una acción lineal de G sobre un espacio vectorial $\hat{F}$, hay un único (salvo isomorfismo) G-fibrado asociado a π de fibra $\hat{F}$ y con la acción dada.

Corolario 6.3. *Sea $\pi\colon E \to M$ un G-fibrado de fibra F y acción $\Psi\colon G \to GL(F)$. Sea $\hat{F}$ otro espacio vectorial de dimensión finita, y sea $\rho\colon GL(F) \to GL(\hat{F})$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces existe un único fibrado $\hat{\pi}\colon \hat{E} \to M$ de fibra $\hat{F}$ y acción $\hat{\Psi} := \rho\circ\Psi$.*

§7.- Fibrados duales

Fijemos como en las secciones anteriores un G-fibrado $\pi\colon E \to M$ de fibra F y acción $\Psi\colon G \to GL(F)$. Además fijamos también una base $v_1, \dots, v_k$ de F.

Consideremos el espacio vectorial dual F^*. Sea $\rho\colon GL(F) \to GL(F^*)$ el isomorfismo de grupos de Lie definido de forma más general en §2. Recordemos que si $g \in GL(F)$ definimos $\rho(g) := (g^*)^{-1}$, donde g^* es el automorfismo dual de g: si $v^* \in F^*$, entonces $g^*(v^*) := v^*\circ g$.

Denotemos $\Psi^*\colon G \to GL(F^*)$ la composición $\rho\circ\Psi$. El fibrado asociado correspondiente lo denotaremos $\pi^*\colon E^* \to M$. Vamos a ver que de forma natural la fibra $E^*_p := (\pi^*)^{-1}(p)$ (espacio vectorial isomorfo a F^*) se puede identificar con el dual de E_p, $\forall p \in M$.

Sea $p \in M$, $e^* \in E^*_p$; el primer paso es definir adecuadamente $e^*(e)$, $\forall e \in E_p$. Fijemos un tal $e \in E_p$. Sea $\alpha \in A$ tal que $p \in V_\alpha$. Sabemos que existe un único $v_\alpha \in F$ tal que $e = \Phi_\alpha(p, v_\alpha)$.

Consideremos ahora la correspondiente carta en E^*, que denotaremos

$$\Phi^*_\alpha\colon V_\alpha \times F^* \to E^*_{|V_\alpha}.$$

Entonces, existe un único $v^*_\alpha \in F^*$ tal que $e^* = \Phi^*_\alpha(p, v^*_\alpha)$.

De esta forma, podemos construir el número $v^*_\alpha(v_\alpha) \in \mathbb{R}$ que, a priori, depende de α. Supongamos que para otro $\beta \in A$ también ocurre que $p \in V_\beta$. De manera análoga construimos $v_\beta \in F$, $v^*_\beta \in F^*$ y $v^*_\beta(v_\beta) \in \mathbb{R}$. Estos elementos están relacionados mediante la función de transición $g := g_{\beta\alpha}(p)$, como sigue:

$$v_\beta = g\cdot v_\alpha = \Psi(g)(v_\alpha), \qquad v^*_\beta = g\cdot v^*_\alpha = \Psi^*(g)(v^*_\alpha) = (\Psi(g)^{-1})^*(v^*_\alpha) = v^*_\alpha\circ\Psi(g^{-1}).$$

Por tanto,

$$v^*_\beta(v_\beta) = (v^*_\alpha\circ\Psi(g^{-1}))(\Psi(g)(v_\alpha)) = v^*_\alpha(v_\alpha).$$

A este valor, cuya independencia de la elección de la carta acabamos de verificar, lo denotaremos $e^*(e)$. La dependencia de $e \in E_p$ es claramente lineal. Hemos construido una aplicación $E^*_p \to (E_p)^*$. Es fácil ver que es un isomorfismo lineal que no depende de ninguna elección, por lo que podemos identificar ambos espacios.

Definición 7.1. Al fibrado E^* se le llama fibrado dual de E.

Sean ahora $s \in \Gamma(E)$ y $s^* \in \Gamma(E^*)$. Vamos a ver que la función $s^*(s) \colon M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable. En efecto, sea $\alpha \in A$ y consideremos las cartas Φ_α y Φ^*_α. Recordemos que existen $s_\alpha \colon V_\alpha \to F$ y $s^*_\alpha \colon V_\alpha \to F^*$ (diferenciables) tales que $\forall p \in V_\alpha$, se tiene que $s(p) = \Phi_\alpha(p, s_\alpha(p)$ y $s^*(p) = \Phi_\alpha(p, s^*_\alpha(p)$. Por lo hecho anteriormente, deducimos que si $p \in V_\alpha$,

$$(s^*(s))(p) = (s^*_\alpha(p))(s_\alpha(p)).$$

Si llamamos $ev \colon F^* \times F \to \mathbb{R}$ a la función evaluación (bilineal y por tanto diferenciable), vemos que $s^*(s)_{|V_\alpha} = ev \circ (s^*_\alpha \times s_\alpha)$.

Propiedades 7.2. *Las siguientes propiedades son inmediatas:*

- *Una sección conjuntista s^* de E^* es diferenciable si y solo si al evaluarla con cualquier sección de E obtenemos una función diferenciable.*
- *Una sección conjuntista s^* de E^* es diferenciable si y solo si para todo $p \in M$ existe una base local de secciones de E en un entorno de p de forma que al evaluarlas en s^* obtenemos funciones diferenciables.*
- *Dado $\alpha \in A$ consideremos la base local en V_α $s^\alpha_1, \dots, s^\alpha_k$. De la misma forma podemos considerar la base local para E^* denotada $(s^\alpha_1)^*, \dots, (s^\alpha_k)^*$ y obtenida a partir de la base dual $v^*_1, \dots, v^*_k$ de la base fijada en F. En cada $p \in V_\alpha$, estas bases de secciones definen bases duales.*
- *Dada una base local de secciones de E sobre un abierto V de M es posible construir la base dual de secciones de E^* sobre V.*

Ejemplo 7.3. El fibrado dual del fibrado tangente TM se llama fibrado cotangente TM^*. Identificando el espacio dual de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ (utilizando la base dual de la base canónica), las funciones de transición de este fibrado se escriben:

$$\begin{array}{rccc} g_{\beta\alpha} \colon & V_\alpha \cap V_\beta & \to & GL(n, \mathbb{R}) \\ & p & \mapsto & {}^t\left(\dfrac{\partial \mathbf{x}_\beta}{\partial \mathbf{x}_\alpha}\right)^{-1}_{|\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)} = {}^t\left(\dfrac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial \mathbf{x}_\beta}\right)_{|\mathbf{x}_\beta^{-1}(p)} \end{array}.$$

Sea $f \colon M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado $p \in M$ mediante la identificación natural $T_{f(t)}\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$, podemos ver df como una sección de TM^*.

Dada una carta fibrada Φ_α de TM (asociada a una carta de M), tenemos una base de secciones locales $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha_i}\}_{i=1}^n$ de TM sobre V_α. Consideremos las *funciones coordenadas* $x^\alpha_i \colon V_\alpha \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Observemos que la familia de secciones $\{dx^\alpha_i\}_{i=1}^n$ es una base local de secciones de TM^* sobre V_α, de hecho es la base dual de la anterior ya que $\forall p \in V_\alpha$, $(dx^\alpha_i)_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha_j}{}_{|p}) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha_j}{}_{|p}(x^\alpha_i) = \delta_{ij}$.

Consideremos otra vez $f \colon M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Es fácil ver que

$$df_{|V_\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\alpha_i} f \; dx^\alpha_i.$$

§8.- Fibrados de formas

Consideremos un G-fibrado $\pi\colon E \to M$ de fibra F y acción $\Psi\colon G \to GL(F)$. Fijemos además una base $v_1, \ldots, v_k$ de F.

Consideremos el espacio vectorial $l - Lin(F)$. Como en la sección anterior consideremos $\rho\colon GL(F) \to GL(l-Lin(F))$ el homomorfismo definido en §2. Recordemos que si $g \in GL(F)$ definimos $\rho(g) := (g^*)^{-1}$, donde si $\varphi \in l-Lin(F)$ y $u_1, \ldots, u_l \in F$, entonces $(g^*(\varphi))(u_1, \ldots, u_l) := \varphi(g(u_1), \ldots, g(u_l))$.

Denotemos $\Psi^*\colon G \to GL(l - Lin(F))$ la composición $\rho\circ\Psi$. El fibrado asociado correspondiente lo denotaremos $l - Lin(\pi)\colon l - Lin(E) \to M$. Como en la sección anterior la fibra de este fibrado se identifica a $l - Lin(E_p)$.

En el caso $l = 0$, tenemos el fibrado trivial $M \times \mathbb{R}$; en el caso $l = 1$, tenemos el fibrado dual.

Dada una carta de Φ_α de E, obtenemos una base local de secciones de E sobre el abierto V_α que habíamos denotado $\{s_i^\alpha\}_{i=1}^k$. Como antes, podemos definir una base dual de secciones de E^* sobre V_α denotada $\{(s_i^\alpha)^*\}_{i=1}^k$. Observemos que

$$\{(s_{i_1}^\alpha)^* \otimes \cdots \otimes (s_{i_l}^\alpha)^* | 1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq k\}$$

es una base local de secciones de $l - Lin(E)$ sobre V_α. Además dadas dos secciones de $l_1 - Lin(E)$ y $l_2 - Lin(E)$ su producto tensorial da lugar a una sección de $(l_1 + l_2) - Lin(E)$. Por otra parte, una sección conjuntista s de $l - Lin(E)$ es diferenciable si y solo si lo es la función obtenida al evaluar esta sección en cualquier l-upla de secciones de E.

Definición 8.1. Al fibrado $l - Lin(E)$ se le llama fibrado de las l-formas de E. De manera análoga se definen $Sim^l(E)$, fibrado de las l-formas simétricas de E y $\bigwedge^l(E^*)$, fibrado de las l-formas alternadas de E.

En el caso de las l-formas alternadas, tiene sentido hacer el producto exterior de secciones.

Ejemplo 8.2. El fibrado de las l-formas alternadas del fibrado tangente TM se denota $\bigwedge^l TM^*$. El espacio de secciones se denota $\mathcal{E}^l(M)$ y las secciones se llaman l-formas diferenciales.

Dada una carta fibrada Φ_α de TM (asociada a una carta de M), consideramos las bases $\{\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\}_{i=1}^n$ de TM y $\{dx_i^\alpha\}_{i=1}^n$ de TM^* sobre V_α. Una base local de secciones de $\bigwedge^l TM^*$ sobre V_α es

$$\{dx_{i_1}^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}^\alpha | 1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n\}.$$

En el caso $l = n$, la base tiene un solo elemento $dx_1^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_n^\alpha$. Si tenemos otra carta Φ_β de TM en $p \in V_\alpha \cap V_\beta$ tenemos una relación:

$$(dx_1^\alpha)_p \wedge \cdots \wedge (dx_n^\alpha)_p = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}_\beta}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \right)^{-1}_{|\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)} (dx_1^\beta)_p \wedge \ldots (\wedge dx_n^\alpha)_p.$$

§9.- Operaciones sobre las formas diferenciales

Sea M una variedad diferenciable. Vamos a definir algunas operaciones que se realizan habitualmente sobre las formas. En primer lugar, sea $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$ y sean $X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, como ya hemos visto tenemos una función diferenciable

$$\begin{array}{rccl} \omega(X_1, \ldots, X_l)\colon & M & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_l)_p). \end{array}$$

De hecho, estas funciones determinan la forma ω. De esta forma, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos el producto interior por X como una aplicación $i_X\colon \mathcal{E}^l(M) \to \mathcal{E}^{l-1}(M)$, donde si $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$, determinamos su imagen como sigue. Dados $X_2, \ldots, X_l \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene la igualdad $(i_X\omega)(X_2, \ldots, X_l) := \omega(X, X_2, \ldots, X_l)$. No es difícil ver que i_X es un homomorfismo de C^∞)-módulos; si $\omega_i \in \mathcal{E}^{l_i}(M)$, $i = 1, 2$, entonces $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_X\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{l_1}\omega_1 \wedge (i_X\omega_2)$.

Observación 9.1. Las 0-formas sobre una variedad se identifican de forma natural con las funciones diferenciables con valores en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$, entonces $i_X(\omega) = \omega(X)$.

Una de las propiedades esenciales de las formas diferenciales es que se comportan bien con respecto a las aplicaciones diferenciales.

Proposición-Definición 9.2. *Sea $\varphi\colon M \to N$ una aplicación diferenciable. Sea $\omega \in \mathcal{E}^l(N)$. Dado $p \in M$ consideremos la l-forma alternada*

$$\begin{array}{rccl} (\varphi^*\omega)_p\colon & (T_pM)^l & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_l) & \mapsto & \omega_{f(p)}(d\varphi_p(v_1), \ldots, d\varphi_p(v_l)) \end{array}$$

Esta asignación define un elemento $\varphi^*\omega \in \mathcal{E}^l(M)$ llamado pull-back *de ω por φ. Se cumple además:*

- *La aplicación así definida $\varphi^*\colon \mathcal{E}^l(N) \to \mathcal{E}^l(M)$ es lineal y respeta el producto escalar.*
- *El pull-back es funtorial (contravariante), es decir, $(1_M)^*$ es la identidad y si $\psi\colon N \to R$ es diferenciable, entonces, $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$.*
- *Sea $f\colon N \to \mathbb{R}$ diferenciable, i.e., $f \in \mathcal{E}^0(N)$. Entonces $\varphi^*(f) = f\circ\varphi \in \mathcal{E}^0(M)$.*
- *Sea $f \in \mathcal{E}^0(N)$; recordemos que $df \in \mathcal{E}^1(N)$ Entonces $d(\varphi^*(f)) = \varphi^*(df) \in \mathcal{E}^1(M)$.*

La demostración es sencilla y este resultado sugiere la introducción de un concepto esencial en la topología y geometría diferencial.

Teorema 9.3. *Existe una única manera de construir una aplicación $d\colon \mathcal{E}^l(M) \to \mathcal{E}^{l+1}(M)$ (llamada diferencial) para cualquier $l \geq 0$ y cualquier variedad diferenciable M verificando las propiedades:*

(i) *d es $\mathbb{R}$-lineal;*

(ii) *Si $\varphi\colon M \to N$ es diferenciable, entonces $\varphi^*\circ d = d\circ\varphi^*$;*

(iii) *Para $l = 0$, d coincide con la diferencial de funciones;*

(iv) *$d\circ d = 0$;*

(v) *si* $\omega_i \in \mathcal{E}^{l_1}(M)$ *y* $\omega_2 \in \mathcal{E}^{l_2}(M)$*, entonces* $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{l_1}\omega_1 \wedge d\omega_2$*;*

Observación. La unicidad se deduce de las siguientes cuentas. Sea $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$ y sea $\mathbf{x}\colon U \to V \subset M$ una carta. Consideremos la base dual $dx_1, \ldots, dx_n$. Podemos desarrollar,

$$\omega_{|V} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} f_{i_1,\ldots,i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.$$

Por la propiedad (ii) aplicada a la inclusión $V \hookrightarrow M$, podemos calcular la diferencial de ω en V utilizando esta expresión. Por el apartado (i) basta que estudiemos $d(f_{i_1,\ldots,i_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l})$. Utilizando (iii) y (iv) obtenemos que este término es $(df_{i_1,\ldots,i_l}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}$. Utilizando la expresión local de la diferencial, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{i_1,\ldots,i_l} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}.$$

Si i coincide con alguno de los siguientes el sumando es nulo, y si no se puede normalizar colocando ordenadamente y cambiando el signo si es necesario. Reordenando todos los términos, tenemos la unicidad.

Proposición 9.4. *Sea* $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$ *y sean* $X_0, X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{X}(M)$*. Entonces:*

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_l) = &\sum_{i=0}^{l} (-1)^i X_i \left(\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_l)\right) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq l} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_l). \end{aligned}$$

§10.- Teoría de integración

En esta sección M es una variedad diferenciable **orientada** conexa de dimensión n (la conexión no es esencial). El objetivo es darle un sentido a la integral de las n-formas con soporte compacto.

Definición 10.1. *Sea* $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$*; el soporte de* ω *es*

$$supp(\omega) := \overline{\{p \in M | \omega_p \neq 0\}}.$$

Sea $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$ una n-forma de soporte compacto cuyo soporte está además contenido en la imagen de una carta $\mathbf{x}_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset M$; podemos suponer que la carta es compatible con la orientación. En V_α tenemos una igualdad $\omega = f_\alpha dx_1^\alpha \wedge \cdots \wedge dx_n^\alpha$, donde $f_\alpha\colon V_\alpha \subset \mathbb{R}$ es una función diferenciable de soporte compacto. Consideremos ahora $\tilde{f}_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_\alpha := f_\alpha \circ \mathbf{x}_\alpha$. También es una función de soporte compacto, por lo que la podemos considerar como una función $\tilde{f}_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, extendiéndola por la función nula (no hay problema con la diferenciabilidad por la condición de soporte compacto). Nuestro objetivo es definir

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_\alpha. \qquad (*)$$

Para comprobar si está bien definida supongamos que $supp(\omega)$ está contenido en la imagen de otra carta $\mathbf{x}_\beta\colon U_\beta \to V_\beta \subset M$ también compatible con la orientación. Observemos que en particular $supp(\omega) \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

Sea $f_\beta\colon V_\beta \to \mathbb{R}$ función diferenciable de soporte compacto tal que en V_β se tiene $\omega = f_\beta dx_1^\beta \wedge \cdots \wedge dx_n^\beta$. Como antes definimos $\tilde{f}_\beta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que en U_β tenemos $\tilde{f}_\beta = f_\beta \circ \mathbf{x}_\beta$ y fuera tenemos la función nula. Para que la definición anterior sea consistente necesitamos comprobar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_\beta.$$

Consideremos el cambio de cartas

$$h_{\beta\alpha} := \mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha \colon \mathbf{x}_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \to \mathbf{x}_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta).$$

Se trata de un difeomorfismo cuyo jacobiano es positivo. Por la condición de soporte compacto, podemos construir un compacto $K_\alpha \subset \mathbf{x}_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$ de interior no vacío y frontera regular tal que $supp(\omega) \subset \mathbf{x}_\alpha(K_\alpha)$. Sea $K_\beta := h_{\beta\alpha}(K_\alpha)$; se trata de otro compacto con las mismas propiedades. Observemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_\alpha = \int_{K_\alpha} \tilde{f}_\alpha, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_\beta = \int_{K_\beta} \tilde{f}_\beta.$$

Como f_α y f_β se han obtenido a partir de ω, deducimos que $\forall p \in V_\alpha \cap V_\beta$ se tiene la igualdad:

$$f_\beta(p) = (J_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)))^{-1} f_\alpha(p),$$

donde $J_{\beta\alpha}$ es el jacobiano (i.e, el determinante de la matriz jacobiana) del difeomorfismo $h_{\beta\alpha}$. Pasando a las funciones $\tilde{}$ obtenemos que en $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$ se tiene la igualdad:

$$\tilde{f}_\beta \circ h_{\beta\alpha} = J_{\beta\alpha}^{-1} \cdot \tilde{f}_\alpha.$$

La igualdad buscada se deduce del teorema de cambio de variable:

$$\int_{K_\beta} \tilde{f}_\beta = \int_{h_{\beta\alpha}(K_\alpha)} \tilde{f}_\beta = \int_{K_\alpha} (\tilde{f}_\beta \circ h_{\beta\alpha}) J_{\beta\alpha} = \int_{K_\alpha} \tilde{f}_\alpha.$$

Definición 10.2. Sea ω una n-forma de soporte compacto cuyo soporte está contenido en la imagen de una carta. Entonces la fórmula $(*)$ no depende de la carta elegida y sirve como definición de $\int_M \omega$.

Sea ahora una n-forma ω de soporte compacto. Elijamos un recubrimiento abierto por imágenes de cartas $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Supongamos que $supp\omega \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_r}$. Denotemos $V_0 := M \setminus supp\omega$ y $V_i := V_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Sea $\{\varphi_i\}_{i=0}^r$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{V_0, V_1, \ldots, V_n\}$, es decir, es una familia de funciones reales con valores no negativos tal que $supp\varphi_i \subset V_i$, $\forall i = 0, 1, \ldots, r$ y $\sum_{i=0}^r \varphi_i \equiv 1$. Nuestro objetivo es definir:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^n \int_M \varphi_i \omega. \qquad (**)$$

Los sumandos están bien definidos ya que los soportes de esas formas son compactos y contenidos en imágenes de cartas. Es un ejercicio sencillo comprobar que la suma no depende del recubrimiento y la partición de la unidad elegidas.

Definición 10.3. Sea ω una n-forma de soporte compacto. Entonces la fórmula $(**)$ no depende de la carta elegida y sirve como definición de $\int_M \omega$.

Propiedades 10.4. *La integral así definida satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Define una función $\mathbb{R}$-lineal $\int_M : \mathcal{E}^n(M) \to \mathbb{R}$.*

(2) *Si ω es una n-forma de soporte compacto no nula y tal que $\forall p \in M$ al evaluar ω_p sobre las bases positivas de T_pM obtenemos un valor no negativo, entonces $\int_M \omega > 0$.*

(3) *Si denotamos $-M$ la misma variedad M con la orientación opuesta, entonces $\int_{-M} = -\int_M$.*

(4) *Sean M, N variedades orientadas de dimensión n y sea $\varphi\colon M \to N$ un difeomorfismo que conserva la orientación. Sea $\omega \in \mathcal{E}^n(N)$ una forma de soporte compacto. Entonces, la lectura de la fórmula de cambio de variable da en este caso: $\int_N \omega = \int_M f^*\omega$.*

Si ω una l-forma diferenciable, es inmediato comprobar que $supp(d\omega) \subset supp(\omega)$. Por tanto si ω es de soporte compacto, también lo es su diferencial.

Teorema de Stokes (versión débil) 10.5. *Sea ω una $(n-1)$-forma diferenciable de soporte compacto. Entonces,*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Demostración. Como la integral en M se define a partir de particiones de la unidad de forma que los soportes de las formas queden contenidos en imágenes de cartas, el teorema quedará demostrado si lo vemos para $(n-1)$-forma diferenciable de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Por la linealidad de la integral podemos suponer que $\omega = f dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, donde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y de soporte compacto. Observemos que

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Aplicando el teorema de Fubini, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h,$$

donde $h\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ es la función que a cada $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ les asocia la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(-, x_2, \dots, x_n).$$

Como f es de soporte compacto existe $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$, tal que $f(t, x_2, \dots, x_n) = 0$ si $|t| \geq t_0$ y $\forall x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$h(x_2, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(-, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= \int_{[-t_0, t_0]} \frac{\partial f}{\partial x_1}(-, x_2, \dots, x_n) = f(t_0, x_2, \dots, x_n) - f(-t_0, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Como la función h es idénticamente nula ya tenemos el resultado. $\square$

§11.- Más comentarios sobre fibrados lineales

La filosofía a seguir en el estudio de los fibrados lineales es la siguiente. Toda operación *natural* en espacios vectoriales se puede transportar a fibrados lineales. Veamos algunos ejemplos:

Suma de Whitney 11.1. Es la traducción de la suma directa. Si tenemos dos fibrados $\pi^i \colon E^i \to M$ de fibra F_i y grupo de Lie G_i, $i = 1, 2$, llamamos suma de Whitney $E := E^1 \oplus E^2$ a un fibrado de fibra $F^1 \oplus F^2$ y grupo $G = G^1 \times G^2$ de forma que si elegimos atlas fibrados basados en el mismo recubrimiento obtenemos un atlas fibrado de E cuyas funciones de transición son la suma de ambas. La fibra E_p en un punto $p \in M$ se identifica de forma natural a $E^1_p \oplus E^2_p$. La suma de Whitney se generaliza al caso de un número finito de sumandos.

Observemos que cualquier sección en E da lugar a secciones en los sumandos.

Estructuras métricas 11.2. Sea $\pi \colon E \to M$ un fibrado. Una estructura métrica o riemanniana sobre un fibrado es una sección $\langle\ ,\ \rangle$ del fibrado de 2-formas simétricas de E de forma que $\forall p \in M$ se tiene que $\langle\ ,\ \rangle_p$ es un producto escalar de E_p. Es decir, asignamos un producto escalar a cada fibra E_p de forma que si $s^1, s^2 \in \Gamma(E)$, la función $\langle s^1, s^2\rangle \colon M \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

Observemos que si E es un fibrado de rango k podemos hacer que el grupo de Lie sea el grupo ortogonal.

Orientaciones 11.3. Sea $\pi \colon E \to M$ un fibrado. Diremos que E es orientable si es posible orientar E_p $\forall p \in M$ de forma que si $s_1, \ldots, s_k$ es una trivialización sobre un abierto conexo que es positiva en un punto, entonces lo es en todos. Observemos que si E es un fibrado de rango k podemos hacer que el grupo de Lie sea $GL^+(k, \mathbb{R})$.

Subfibrado ortogonal 11.4. Sea $\pi \colon E \to M$ un fibrado con una métrica riemanniana y sea $\pi^1 \colon E^1 \to M$ un subfibrado. Es claro que E^1 posee de forma natural una métrica heredada de E. Dado $p \in M$ consideremos $(E^1_p)^\perp$. Sea $(E^1)^\perp := \coprod_{p\in M}(E^1_p)^\perp$. Es fácil introducir en $(E^1)^\perp$ una estructura de fibrado de forma que las inclusiones inducen un isomorfismo de $E^1 \oplus (E^1)^\perp$ en E. Cada sección de E da lugar a una sección de E^1 y a otra de su ortogonal.

Producto tensorial 11.5. Como para la suma de Whitney definimos un fibrado tensorial $E := E^1 \otimes E^2$ de forma que $E_p = E^1_p \otimes E^2_p$. Esto se extiende al caso de un número finito de factores.

Fibrados de formas valoradas 11.6. Recordemos que si F_1, F_2 son espacios vectoriales, hay un isomorfismo natural de $Hom(F_1, F_2)$ con $F_1^* \otimes F_2$, y de forma más general entre el espacio de las aplicaciones l-multilineales (resp. simétricas, resp. alternadas) de F_1 en F_2 y $l{-}Lin(F_1) \otimes F_2$ (resp. $S^l(F_1) \otimes F_2$, resp. $bigwedge^l((F_1)^* \otimes F_2)$.

De esta forma podemos definir dado $\pi \colon E \to M$ los fibrados $l{-}Lin(TM; E)$ (resp. $S^l(TM; E)$, resp. $\bigwedge(TM^*; E)$) cuyos elementos son las aplicaciones l-multlineales (resp. simétricas, resp. alternadas) de T_pM en E_p, $p \in M$. La secciones de estos fibrados son aplicaciones $C^\infty(M)$-multilineales (resp. simétricas, resp. alternadas) de $\mathfrak{X}(M)$ en $\Gamma(E)$.

El espacio de secciones de $\bigwedge(TM^*; E)$ se denota $\mathcal{E}^l(M; E)$ y sus elementos se llaman l-formas diferenciables con valores en E. Sea V es un abierto donde hay una paralelización $X_1, \ldots, X_n$ y una base de secciones locales $s_1, \ldots, s_k$. Denotemos

$\omega_1, \ldots, \omega_n$ la base dual de 1-formas diferenciables con valores en $\mathbb{R}$. Entonces, las l-formas diferenciables locales en V con valores en E son de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} f^j_{i_1 \ldots i_l} (\omega_{i_1} \wedge \ldots \omega_{i_l}) \otimes s_j,$$

con $f^j_{i_1 \ldots i_l} \colon V \to \mathbb{R}$ diferenciables. Observemos que si ademas $\omega \in \mathcal{E}^{l_1}(M)$ y $\eta \in \mathcal{E}^{l_2}(M; E)$ entonces podemos hablar de $\omega \wedge \eta \in \mathcal{E}^{l_1+l_2}(M; E)$.

Isomorfismos 11.7. Sabemos que si F es un espacio vectorial con un producto escalar, hay un isomorfismo natural $\Phi \colon F \to F^*$ donde si $v \in F$, la forma lineal $\Phi(v) \colon V \to \mathbb{R}$ está definida por $\Phi(v)(w) := \langle v, w \rangle$, $\forall v \in w$. Si $v_1, \ldots, v_k$ es una base de V y $v_1^*, \ldots, v_k^*$ es la base dual, entonces la matriz de Φ en estas bases coincide con la matriz de $\langle\ ,\ \rangle$ en la base $v_1, \ldots, v_k$. Si E es un fibrado lineal con una métrica riemanniana construimos de la manera anterior un isomorfismo de fibrados de E a E^*.

Fibrados triviales 11.8. Si M es una variedad y F un espacio vectorial de dimensión real finita, decimos que $M \times F$ es un fibrado trivial de fibra F. En este caso hay una identificación natural de $\Gamma(M \times F)$ con el conjunto $C^\infty(M; F)$ de las funciones diferenciables en M con valores en F.

Hemos señalado antes que si E es un fibrado lineal sobre M, una sección de $l - Lin(TM; E)$ define una aplicación $C^\infty(M)$-multilineal $\chi(M)^l \to \Gamma(E)$ (como antes, si $E = M \times \mathbb{R}$ identificamos $\Gamma(E) = C^\infty(M)$). Hay una recíproca.

Proposición 11.9. *Una aplicación $C^\infty(M)$-multilineal (resp. simétrica, resp. alternada) $\omega \colon \chi(M)^l \to \Gamma(E)$ define una sección del fibrado $l - Lin(TM; E)$ (resp. $S^l(TM; E)$, resp. $\bigwedge(TM^*; E)$) como sigue. Dado $p \in M$, definimos $\omega_p \colon (T_pM)^l \to E_p$ tal que si $v_1, \ldots, v_l \in T_pM$,*

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_l) := \omega(X_1, \ldots, X_l)(p),$$

donde $(X_i)_p = v_i$.

Demostración. Basta ver que la definición del enunciado no depende de la elección de los campos. Es consecuencia de los dos resultados siguientes:

Paso 1. Si para un campo X_i se tiene que $(X_i)_{|V}$ es nulo, $V \subset M$ abierto, entonces $\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_l)_{|V}$ es nula.

Basta tener en cuenta que $\forall p \in V$ existe una función $f \colon M \to \mathbb{R}$ que es idénticamente nula en un entorno de p y constante igual a 1 en $M \setminus V$. Por tanto $X_i = f X_i$ y la multilinealidad da el resultado.

Como consecuencia, tenemos que si $X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{X}(V)$, $V \subset M$ abierto, entonces tiene sentido hablar de $\omega(X_1, \ldots, X_l)$.

Paso 2. Si $V \subset M$ abierto, que admite paralelizaciones, entonces si $(X_i)_p) = 0$, $\omega(X_1, \ldots, X_l)(p) = 0$.

Este último resultado es inmediato por la multilnealidad. $\square$

Fibrado vertical 11.10. Si tenemos un fibrado lineal $\pi\colon E \to M$, podemos considerar también su fibrado tangente $\pi_E\colon TE \to E$. La diferencial $d\pi\colon TE \to TM$ es una aplicación diferenciable. Dado $e \in E$, con $p := \pi(e)$, esta diferencial es una sobreyección $d\pi_e\colon T_eE \to T_pM$; denotemos $V_e := \ker d\pi_e$. Es fácil ver que $\mathcal{V} := \coprod_{e\in E} V_e$ es un subfibrado de TE de rango k. Además V_e resulta ser el espacio tangente en E a la subvariedad $E_p := \pi^{-1}(p)$ y como se trata de un espacio vectorial tenemos un isomorfismo canónico $i_e\colon E_p \to V_e$ que asocia a cada $e' \in E_p$ el vector tangente en $t = 0$ a la curva $t \mapsto e + te'$. A los elementos de $\mathcal{V}$ se les llama vectores verticales.

§12.- Conexiones sobre fibrados

Fijemos $\pi\colon E \to M$ fibrado lineal de rango k.

Defincíón 12.1. Una conexión sobre E es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, tal que $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\forall s \in \Gamma(E)$, si denotamos $\nabla(X, s) := \nabla_X s$, se tiene:

(i) $\nabla_{fX} s = f\nabla_X s$;

(ii) $\nabla_X fs = X(f)\ s + f\nabla_X s = df(X)\ s + f\nabla_X s$.

Si $E = TM$, ∇ se llama conexión afín.

Observación 12.2. Con las mismas técnicas que en la demostración de (11.9) se demuestra que tiene sentido calcular la conexión sobre campos y secciones locales. Es más, dado $p \in M$, $v \in T_pM$ y s sección de E definida en un entorno de p, tiene sentido hablar de $\nabla_v s \in E_p$.

Observación 12.3. Una conexión define y está definida por una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\Gamma(E) \to \mathcal{E}^1(M; E)$ que denotaremos también ∇, que cumple que $\forall f \in C^\infty(M)$ y $\forall s \in \Gamma(E)$ se tiene $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$.

El siguiente resultado lo enunciamos sin demostración:

Teorema 12.4. *Sea $\pi\colon E \to M$ un fibrado lineal y ∇ una conexión. Existe una única manera de extender ∇ a una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\nabla\colon \mathcal{E}^l(M; E) \to \mathcal{E}^{l+1}(M; E)$, $l \geq 0$, que cumple que $\forall \omega \in \mathcal{E}^{l_1}(M)$ y $\forall \eta \in \mathcal{E}^{l_2}(M; E)$ se tiene $\nabla(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{l_1}\omega \wedge \nabla(\eta)$.*

Estudiemos ahora la expresión local de una conexión. Sea $V \subset M$ un abierto en el que podemos encontrar una paralelización $X_1, \ldots, X_n$ de M y una base local $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_k$ de secciones de E. Sea $X \in \chi(V)$ y sea $\tilde{s} \in \Gamma(E_{|V})$. Sabemos que

$$X = \sum_{i=1}^n f_i X_i, \quad \tilde{s} = \sum_{j=1}^k g_j \tilde{s}_j,$$

donde $f_i, g_j\colon V \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Entonces:

$$\nabla_X(\tilde{s}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \nabla_{f_iX_i}(g_j\tilde{s}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f_i\nabla_{X_i}(g_j\tilde{s}_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (f_iX_i(g_j)\ \tilde{s}_j + f_ig_j\nabla_{X_i}(\tilde{s}_j)).$$

Los términos $\nabla_{X_i}(\tilde{s}_j) \in \Gamma(E_{|V})$ dependen de las bases y de la conexión. Se pueden expresar de forma única:

$$\nabla_{X_i}(\tilde{s}_j) = \sum_{l=1}^{k} \Gamma_{ij}^{l} \tilde{s}_l,$$

donde las funciones Γ_{ij}^{l} se llaman los símbolos de Christoffel de la conexión relativos a la paralelización y a la base. La siguiente fórmula nos dice que determinan la conexión:

$$\nabla_X(\tilde{s}) = \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i X_i(g_l) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f_i g_j \Gamma_{ij}^{l} \right) \tilde{s}_l.$$

Si vemos la conexión como en (12.3), podemos escribir

$$\nabla(\tilde{s}_j) = \sum_{l=1}^{k} \theta_{lj} \otimes \tilde{s}_l, \quad \theta_{lj} \in \mathcal{E}^1(V).$$

Por tanto

$$\nabla(\tilde{s}) = \sum_{j=1}^{k} \nabla(f_j \tilde{s}_j) = \sum_{j=1}^{k} (df_j \otimes \tilde{s}_j + f_j \nabla(\tilde{s}_j)) = \sum_{l=1}^{k} (df_l + \sum_{j=1}^{k} \theta_{lj} f_j) \otimes \tilde{s}_l.$$

Es decir, la conexión está determinada por una matriz $k \times k$ de 1-formas.

Para relacionar estas formas con los símbolos de Christoffel consideremos la base dual de 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sobre V de la paralelización anterior. Por dualidad, tenemos $\theta_{lj} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{lj}(X_i)\omega_i$. Por otra parte,

$$\nabla_{X_i}(\tilde{s}_j) = \sum_{l=1}^{k} \theta_{lj}(X_i)\ \tilde{s}_l.$$

Por tanto,

$$\theta_{lj} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \omega_i.$$

Observación 12.5. Cuando se trata de conexiones afines basta tomar la paralelización y obtenemos los símbolos de Christoffel habituales.

§13.- Derivación covariante a lo largo de curvas

Fijemos un fibrado lineal $\pi\colon E \to M$ de rango k.

Definición. Sea $\gamma\colon (a,b) \to M$ una curva. Una sección de E a lo largo de γ es una curva $s\colon (a,b) \to E$ tal que $\pi \circ s = \gamma$. Diremos que k secciones $s_1, \ldots, s_k$ de E a lo largo de γ forman una base de secciones a lo largo de γ si $\forall t \in (a,b)$, los vectores $(s_1)_t, \ldots, (s_k)_t$ forman una base de $E_{\gamma(t)}$.

Fijemos una conexión ∇ del fibrado. Sabemos que podemos definir la derivada covariante de una sección s a lo largo de una curva γ y el resultado es una sección a lo largo de γ que denotamos $\frac{Ds}{dt}$.

Conservemos la notación del apartado anterior y supongamos que $\gamma(a,b) \subset V$. Denotemos $s_i := \pi\circ\tilde{s}_i$. Es claro que $s_1,\ldots,s_k$ forman una base de secciones a lo largo de γ. En particular, si s es una sección a lo largo de γ, existen funciones $g_j\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que

$$s = \sum_{j=1}^{k} g_j s_j.$$

Vamos a suponer que la paralelización $X_i,\ldots,X_n$ proviene de una carta. Es decir que existe una carta $\mathbf{x}\colon U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, con coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ tal que $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Con estas hipótesis, tenemos que existen n funciones diferenciables $x_i\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) = \mathbf{x}(x_1(t),\ldots,x_n(t))$. Es fácil ver en este caso que:

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)(X_i)_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M.$$

Por las propiedades de la derivación covariante deducimos que:

$$\frac{Ds}{dt} = \sum_{l=1}^{k} \left(g_l' + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_i' g_j (\Gamma_{ij}^l\circ\gamma) \right) s_l.$$

La carta $\mathbf{x}$ y la base local permiten construir una carta de E con imagen en $E_{|V}$:

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\mathbf{x}}\colon & U \times \mathbb{R}^k & \to & E_{|V} \\ & (x, {}^t(v_1,\ldots,v_k)) & \mapsto & \sum_{j=1}^{k} v_j \ \ (s_j)_{\mathbf{x}(x)}. \end{array}$$

Esta carta determina una paralelización de E en el abierto $E_{|V}$. Denotemos a esta paralelización $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$, $i = 1,\ldots,n$, $\frac{\partial}{\partial v_j}$, $j = 1,\ldots,k$. Tenemos las propiedades siguientes:

- Si $e \in E_{|V}$, entonces $d\pi_e(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}_{|e}) = (X_i)_e$ y $d\pi_e(\frac{\partial}{\partial v_j}_{|e}) = 0$. En particular $\frac{\partial}{\partial v_j}_{|e}$, $j = 1,\ldots,k$, forman una base de V_e. Es más, $i_e((s_j)_{|e}) = \frac{\partial}{\partial v_j}_{|e}$.
- Con la notación anterior, $s'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}_{|s(t)} + \sum_{j=1}^{n} g_j'(t)\frac{\partial}{\partial v_j}_{|s(t)} \in T_{s(t)}E$.

Teniendo en cuenta la fórmula, deducimos los resultados siguientes:

Proposición 13.1. *Sean $\gamma\colon (a,b) \to M$, $\delta\colon (c,d) \to M$ curvas tales que existen $t_0 \in (a,b)$, $t_1 \in (c,d)$ con $\gamma(t_0) = \delta(t_1) = p$ y $\gamma'(t_0) = \delta'(t_1) = v \in T_pM$. Sean ahora $s\colon (a,b) \to E$ y $\hat{s}\colon (c,d) \to E$ secciones de E a lo largo de γ y δ respectivamente.*

Supongamos que $s(t_0) = \hat{s}(t_1) = e \in E_p \subset E$ y que además $s'(t_0) = \hat{s}'(t_1) = \mathbf{v} \in T_eE$ (y obviamente $d\pi_e(\mathbf{v}) = v$). Entonces se tiene:

$$\frac{Ds}{dt}_{|t=t_0} = \frac{D\hat{s}}{dt}_{|t=t1}.$$

Corolario 13.2. *Sean $\gamma\colon (a,b) \to M$ una curva y sea $h\colon (c,d) \to (a,b)$ un difeomorfismo. Sea $s\colon (a,b) \to E$ una sección a lo largo de γ, por lo que $\hat{s} := s\circ h$ es una sección a lo largo de $\gamma\circ h$. Entonces se tiene:*

$$\frac{D\hat{s}}{dt} = h' \ \ (\frac{Ds}{dt}\circ h).$$

Teorema 13.3. *Existe una aplicación diferenciable $D\colon TE \to E$ tal que si consideramos una curva $\gamma\colon (a,b) \to M$ y una sección s de E a lo largo de γ, entonces $\forall t_0 \in (a,b)$ se cumple:*

$$\frac{Ds}{dt}_{|t=t_0} = D(s'(t_0)).$$

Además, si $e \in E$, $p := \pi(e)$, y denotamos $D_e\colon T_eE \to E_p$ la restricción de D, se tiene que D_e es lineal, sobreyectiva y que $D_e \circ i_e = 1_{E_p}$.

Demostración. La existencia de D se deduce de la proposición (13.1). Consideremos la carta $\tilde{\mathbf{x}}$ de $E_{|V}$. Esta carta define una carta $\mathbf{X}$ del fibrado tangente $\pi_E\colon TE \to E$ de E en el abierto $E_{|V}$ gracias a la paralelización anterior:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{X}\colon & (U\times\mathbb{R}^k)\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k) & \to & \pi_E^{-1}(E_{|V}) \\ & ((x,v),(\tilde{x},\tilde{v})) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}_{|\tilde{\mathbf{x}}(x,v)} + \sum_{j=1}^k \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_j}_{|\tilde{\mathbf{x}}(x,v)}. \end{array}$$

Consideremos $\tilde{D}\colon (U\times\mathbb{R}^k)\times(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k) \to U\times\mathbb{R}^k$, dada por $\tilde{D} := \tilde{\mathbf{x}}^{-1}\circ D \circ \mathbf{X}$. De la fórmula de la derivación covariante deducimos que:

$$\tilde{D}((x,v),(\tilde{x},\tilde{v})) = (x,w),$$

donde $w = {}^t(w_1,\ldots,w_k)$ y

$$w_l = \tilde{v}_l + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^k \tilde{x}_i v_j \Gamma_{ij}^l(\mathbf{x}(x)).$$

Esta expresión implica la diferenciabilidad.

La linealidad de D_e también es evidente a partir de esta fórmula. También es sencillo comprobar que $D_e \circ i_e = 1_{E_p}$ y esto implica la sobreyectividad. $\square$

Definición 13.4. Llamaremos vectores horizontales (según la conexión) a los elementos $\mathbf{v} \in TE$ tales que $D(\mathbf{v}) = 0$. Dado $e \in E$ denotaremos $H_e := \ker D_e$; es un espacio vectorial de dimensión n que contiene exactamente a los vectores horizontales basados en e. El espacio $\mathcal{H} := \coprod_{e\in E} H_e$ define un subfibrado de TE llamado fibrado horizontal.

Observemos además que como $(D_e)_{|V_e}$ es un isomorfismo se tiene que $V_e \cap H_e = 0$, y por dimensiones, $T_eE = H_e \oplus V_e$. Por tanto se tiene además que $j_e\colon = (d\pi_e)_{|H_e}\colon H_e \to T_pM$ es un isomorfismo. El resultado siguiente es sencillo.

Proposición 13.5. *El fibrado TE es isomorfo (mediante las inclusiones) a $\mathcal{H}\oplus\mathcal{V}$.*

§14.- Variedades con borde e integración

La definición de variedad con borde es la misma que la de variedad diferenciable con un único cambio: si en una variedad M las cartas $\mathbf{x}\colon U \to V \subset M$ son homeomorfismos sobre la imagen (abierta en M) de abiertos U de $\mathbb{R}^n$, para las variedades con borde son abiertos de

$$H^n := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0\}.$$

Observemos que las cartas cuyos dominios no cortan al hiperplano $x_1 = 0$ son cartas como en la definición primitiva. Una variedad con borde M^n admite una descomposición $IntM \coprod \partial M$, donde:

– $IntM$, llamado interior de M, es la imagen por las cartas de los puntos fuera de $x_1 = 0$; es una variedad diferenciable de dimensión n y es abierta en M.

– ∂M, llamado borde de M, es la imagen por las cartas de los puntos en $x_1 = 0$; es una variedad diferenciable de dimensión $n-1$ y es cerrada en M.

Todos los conceptos definidos para variedades diferenciables se pueden llevar a las variedades con borde. Algunos de ellos admiten nuevos matices. Por ejemplo, sea M una variedad con borde y sea $p \in \partial M$. Tenemos dos espacios tangentes T_pM y $T_p\partial M$ con una inclusión natural $T_p\partial M \subset T_pM$. Sea $\mathbf{x}\colon U \to V \subset M$ una carta tal que $p \in V$. Una base de T_pM es $\{\frac{\partial}{\partial x_i}{}_{|p}\}_{i=1}^n$, mientras que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}{}_{|p}\}_{i=2}^n$ es base de $T_p\partial M$. Como $T_p\partial M$ es un hiperplano de T_pM, divide a este en dos partes, $T_pM \setminus T_p\partial M := T_pM^+ \coprod T_pM^-$, donde:

– T_pM^+ es el conjunto de vectores exteriores a M, es decir vectores tangentes a curvas que *llegan* a ∂M; en coordenadas su coeficiente en $\frac{\partial}{\partial x_1}{}_{|p}$ es positivo.

– T_pM^- es el conjunto de vectores interiores a M, es decir vectores tangentes a curvas que *salen* de ∂M; en coordenadas su coeficiente en $\frac{\partial}{\partial x_1}{}_{|p}$ es negativo.

Si además M es riemanniana, a los vectores ortogonales a $T_p\partial M$ los llamaremos vectores normales (y serán exteriores o interiores según su caso).

Lema 14.1. *Si M es una variedad orientable también lo son $IntM$ y ∂M.*

Demostración. Para $IntM$ es trivial. Fijemos una orientación en M. Sea $p \in \partial M$, $V \subset M$ un entorno abierto conexo de p tal que $V \cap \partial M$ también es conexo, y $X_1, \ldots, X_n$ una paralelización local en V. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que X_1 siempre es exterior en los puntos de $V \cap \partial M$. Restringiendo V podemos hacer que $X_2, \ldots, X_n$ sean tangentes a ∂M en $V \cap \partial M$. Observemos que así podemos construir paralelizaciones locales en un recubrimiento abierto de ∂M con cambios de carta positivos. $\square$

Definición 14.2. Sea M una variedad con borde orientada. La orientación de ∂M inducida por M se obtiene mediante la convención: vector exterior + orientación de ∂M = orientación de M.

Bajo estas hipótesis se puede enunciar:

Teorema de Stokes 14.3. *Sea M una variedad con borde orientada. Sea ω una $(n-1)$-forma diferenciable de soporte compacto. Entonces,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega_{|\partial M}.$$

Demostración. Como la integral en M se define a partir de particiones de la unidad de forma que los soportes de las formas queden contenidos en imágenes de cartas, el teorema quedará demostrado si lo vemos para $(n-1)$-forma diferenciable de soporte compacto en $M = H^n$ con orientación dada por $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$; por tanto la orientación de ∂M viene dada por $dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Si dicho soporte no corta al hiperplano $x_1 = 0$ se tiene una demostración igual que en la versión débil; el primer término sale cero, y el segundo también ya que la forma es nula en $x_1 = 0$.

Sea $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$, donde podemos extender todo a $\mathbb{R}^n$ de forma que las funciones $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, son diferenciables y de soporte compacto. Observemos que

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

y que

$$(\omega_{|\partial M})_{(0,x_2,\ldots,x_n)} = f_1(0,x_2,\ldots,x_n)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Podemos suponer que existe $K \gg 0$ tal que el soporte de todas las funciones está contenido en $A := [-K,0] \times [-K,K]^{n-1}$; denotemos $A_0 := \{0\} \times [-K,K]^{n-1}$. Deducimos que

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_A \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n, \qquad \int_{\partial M} \omega_{|\partial M} = \int_{A_0} f_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Para cada $i = 1,\ldots,n$ definimos una función $h_i\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que a cada $n-1$-tupla $(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ le asocia la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n)dt.$$

Si $i > 1$, tenemos

$$\begin{aligned} h_i(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) &= \int_{-K}^{K} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n)dt = \\ &= f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},K,x_{i+1},\ldots,x_n) - f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},-K,x_{i+1},\ldots,x_n) = 0, \end{aligned}$$

por lo que $h_i \equiv 0$. Por el teorema de Fubini, tenemos:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_i = 0.$$

Para $i = 1$,

$$h_1(x_2,\ldots,x_n) = \int_{-K}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_n)dt = f_1(0,x_2,\ldots,x_n).$$

Aplicando Fubini:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{A_0} h_1,$$

y tenemos el resultado. □

Ejemplo 14.4. Como aplicación vamos a comparar los volúmenes de S^n y de

$$B^{n+1} := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ \|p\| \leq 1\}.$$

Para ello orientemos S^n como borde de B^{n+1}. Denotaremos dB^{n+1} y dS^n las formas volumen. Sea $p \in S^n$; sea $v_1,\ldots,v_n$ una base ortonormal positiva de T_pS^n; por tanto, $p,v_1,\ldots,v_n$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^{n+1} = T_pB^{n+1}$. Sabemos que las formas multlineales alternadas dS^n_p y dB^{n+1}_p están determinadas por las igualdades:

$$dS^n_p(v_1,\ldots,v_n)=1,\qquad dB^{n+1}_p(p,v_1,\ldots,v_n)=1.$$

Por tanto, deducimos que $dS^n_p=(i_p dB^{n+1}_p)_{S^n}$. Denotemos $X\in\mathfrak{X}(B^{n+1})$ el campo radial; es decir $X_p:=p$. Hemos visto que $dS^n=(i_X dB^{n+1})_{|S^n}$. Por tanto:

$$Vol_n(S^n)=\int_{S^n} dS^n=\int_{S^n}(i_X dB^{n+1})_{|S^n}=\int_{B^{n+1}} d(i_X dB^{n+1})=\int_{B^{n+1}}\operatorname{div} X dB^{n+1}.$$

Como $X=\sum_{i=1}^{n+1} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, se tiene que $\operatorname{div} X=n+1$, por lo que,

$$Vol_n(S^n)=(n+1)Vol_{n+1}(B^{n+1}).$$

Observación 14.5. El campo radial anterior es un caso particular de los campos lineales de $\mathbb{R}^n$ (o más generalmente de un espacio vectorial). Sea $h\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación lineal de matriz $A\in M(n,\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. El campo lineal $X_h\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ asociado a h es el campo que a cada $p\in\mathbb{R}^n$ le asocia el vector $h(p)$. Es decir, se trata del campo

$$X_h=\sum_{i=1}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

En particular, $\operatorname{div} X_h=\sum_{i=1}^n a_{ii}$; es decir, es constante e igual a $\operatorname{tr} h$.

§15.- Aplicación a las formas cuadráticas y bilineales

En esta sección F es un espacio vectorial real de dimensión n con un producto escalar $\langle,\rangle$. Fijamos además una forma bilineal $H\colon F\times F\to\mathbb{R}$. En ocasiones necesitaremos una base ortonormal $v_1,\ldots,v_n$. Denotaremos $A\in M(n,\mathbb{R})$ la matriz de h en esta base; es decir, si $A:=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, entonces $h(v_i,v_j)=a_{ij}$; si la forma es simétrica también lo será la matriz. Consideremos tres aplicaciones lineales de F en F^*:

- $\Phi_{\langle,\rangle}\colon F\to F^*$, donde si $v\in F$, definimos $\Phi_{\langle,\rangle}(v)\colon F\to\mathbb{R}$ tal que si $w\in F$, $\Phi_{\langle,\rangle}(v)(w):=\langle w,v\rangle$. La matriz de esta aplicación en la base anterior y en su dual es la identidad.
- $\Phi^R_H\colon F\to F^*$, donde si $v\in F$, definimos $\Phi^R_H(v)\colon F\to\mathbb{R}$ tal que si $w\in F$, $\Phi^R_H(v)(w):=H(w,v)$.
- $\Phi^L_H\colon F\to F^*$, donde si $v\in F$, definimos $\Phi^L_H(v)\colon F\to\mathbb{R}$ tal que si $w\in F$, $\Phi^L_H(v)(w):=H(v,w)$.

Sea $B:=(b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ la matriz de Φ^R_H en la base anterior y en su dual $v_1^*,\ldots,v_n^*$. El elemento b_{ij} es el coeficiente en v_i^* de $\Phi^R_H(v_j)$, es decir,

$$b_{ij}=\Phi^R_H(v_j)(v_i)=H(v_i,v_j)=a_{ij}.$$

Es decir, $B=A$. De la misma forma, la matriz de Φ^L_H en estas bases es ${}^tA$. Como $\Phi_{\langle,\rangle}$ es un isomorfismo, podemos definir dos endomorfismos de F.

Definición 15.1. Llamaremos operadores adjuntos de H a $h^R := \Phi_{\langle,\rangle}^{-1} \circ \Phi_H^R$ y $h^L := \Phi_{\langle,\rangle}^{-1} \circ \Phi_H^L$, que son endomorfismos de F. Si H es simétrica ambos coinciden, el común se denota h y se llama operador autoadjunto.

Las matrices de estos operadores en $v_1, \ldots, v_n$ son A y ${}^tA$. Lo que caracteriza a los operadores adjuntos es:

$$\langle v, h^R(w)\rangle = \Phi_{\langle,\rangle}(h^R(w))(v) = \Phi_H^R(w)(v) = H(v, w),$$

y de la misma forma $\langle v, h^L(w)\rangle = H(w, v)$.

Recordemos que la traza de un endomorfismo de F está bien definida a partir de la traza de cualquiera de sus matrices. En nuestro caso, las trazas de h^R y h^L coinciden por tener asociadas matrices transpuestas.

Definición 15.2. Llamaremos traza de H a $\operatorname{tr} H := \operatorname{tr} h^R = \operatorname{tr} h^L$.

Se calcula así sobre la base ortonormal $v_1, \ldots, v_n$:

$$trH := trh^R = trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} H(v_i, v_i) = \sum_{i=1}^{n} Q(v_i),$$

donde $Q\colon F \to \mathbb{R}$, definida como $Q(v) := H(v, v)$, es la forma cuadrática asociada a H.

Orientemos arbitrariamente F y sea S la esfera de dimensión $n-1$ y radio 1 centrada en 0 de F, orientada como borde de la bola unidad cerrada B. Con independencia de la orientación, tiene sentido considerar la media de H como sigue:

$$\mu(H) := \frac{\displaystyle\int_S Q dS}{Vol_{n-1}(S)}.$$

Veamos cómo se calcula esta media. Denotemos $\omega := QdS$.Dado $v \in S$ y $w_2, \ldots, w_n$ base ortonormal positiva de $T_pS \subset F$, las formas ω_v y dB_v están determinadas por:

$$\omega_v(w_2, \ldots, w_n) = Q(v), \qquad dB_v(v, w_2, \ldots, w_n) = 1.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(i_{h^R(v)} dB_v)(w_2, \ldots, w_n) &= dB_v(h^R(v), w_2, \ldots, w_n) = \\
&= dB_v(\langle v, h^R(v)\rangle v + \sum_{j=2}^{n} \langle w_i, h^R(v)\rangle w_i, w_2, \ldots, w_n) = \\
&= \langle v, h^R(v)\rangle dB_v(v, w_2, \ldots, w_n) = H(v, v) = Q(v).
\end{aligned}$$

Deducimos que $\omega_v = (i_{h^R(v)} dB_v)_{|S}$. Consideramos como antes el campo lineal $X_{h^R} \in \mathfrak{X}(F)$ asociado a h, y tenemos $\omega = (i_{X_{h^R}} dB)_{|S}$. Recordemos que $\operatorname{div} X_{h^R}$ es constante igual a $\operatorname{tr} h^R = \operatorname{tr} H$. Además,

$$\begin{aligned}
\int_S QdS &= \int_S \omega = \int_S (i_{X_{h^R}} dB)_{|S} = \\
&= \int_B d(i_{X_{h^R}} dB) = \int_B \operatorname{div} X_{h^R} dB = \operatorname{tr} H \; Vol_n(B) = \frac{\operatorname{tr} H}{n} Vol_{n-1}(S).
\end{aligned}$$

Por tanto, hemos demostrado:

Proposición 15.3. *Dada H forma bilineal sobre F y $v_1, \ldots, v_n$ base ortonormal de F, se tiene:*

$$\mu(H) = \frac{trH}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Q(v_i).$$

§16.- Curvatura de Ricci y curvatura media

Vamos a aplicar los resultados de la sección anterior a una variedad riemanniana M de dimensión $n > 1$. Consideremos su tensor de curvatura $R\colon \mathfrak{X}(M)^4 \to C^\infty(M)$. Dado $p \in M$, este tensor define una forma tetralineal $R_p\colon T_pM^4 \to \mathbb{R}$. Fijemos dos vectores $x, z \in T_pM$; estos dos vectores definen una forma bilineal $R_p(x, -, z, -)\colon T_pM^2 \to \mathbb{R}$ tal que $R_p(x, -, z, -)(y, t) := R_p(x, y, z, t)$. Definimos una función

$$Ric_p\colon T_pM^2 \to \mathbb{R}, \qquad Ric_p(x, z) := \frac{n}{n-1}\mu(R_p(x, -, z, -)).$$

Si $v_1, \ldots, v_n$ es una base ortonormal de T_pM, se tiene:

$$Ric_p(x, z) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} R_p(x, v_i, z, v_i).$$

De esta igualdad deducimos varias cosas:

- La expresión de la derecha no depende de la base ortonormal elegida.
- Ric_p resulta ser una forma bilineal simétrica.
- Podemos definir un tensor $Ric\colon \mathfrak{X}(M)^2 \to C^\infty(M)$ tal que en cada punto $p \in M$ nos dé Ric_p.

Definición 16.1. El tensor Ric se llama tensor de Ricci de M. Dado $p \in M$ y $x \in T_pM$, llamaremos curvatura de Ricci de x a $Ric_p(x) := Ric_p(x, x)$.

Observación 16.2. Vamos a interpretar $Ric_p(x)$ para $x \in T_pM$ unitario. Denotemos E_x el espacio ortogonal a x en T_pM; es un espacio de dimensión $n-1$. Denotemos $R_x^\perp$ la restricción de $R(x, -, x, -)$ a E_x. Observemos que $R_x^\perp$ es una forma bilineal simétrica debido a las propiedades del tensor de curvatura. Sea $v_2, \ldots, v_n$ una base ortonormal de E_x. Observemos que

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} R_p(x, v_i, x, v_i) = \mu(R_x^\perp).$$

Es decir, $Ric_p(x, x)$ es la media de la forma bilineal $R_x^\perp$ sobre E_x. Dicha media se calcula al integrar sobre los vectores unitarios y de E_x:

$$R_x^\perp(y, y) = R_p(x, y, x, y) = K(\sigma_{x,y}),$$

donde $\sigma_{x,y}$ es el subespacio vectorial de T_pM engendrado por x e y. De esta forma aparecen (y exactamente dos veces) los subespacios de dimensión dos que contienen a x. Así, si x es un vector unitario $Ric_p(x, x)$ se interpreta como la media de las curvaturas seccionales de los planos que contienen a x.

Consideremos ahora la forma bilineal simétrica $Ric_p\colon T_pM^2 \to \mathbb{R}$.

Definición 16.3. La curvatura escalar de M es una función $K\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $K(p) := \mu(Ric_p)$.

Se trata de la media de la forma cuadrática asociada a Ric_p; sobre una base ortonormal $v_1, \ldots, v_n$ se expresa:

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ric_p(v_i, v_i).$$

Como antes, deducimos que el término de la derecha no depende de la base elegida, y como Ric es un tensor diferenciable, vemos que $K\colon M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

§17.- Definición alternativa de la curvatura

En esta sección, M es una variedad diferenciable, E es un fibrado lineal de rango k y ∇ una conexión sobre E. Interpretamos la conexión como una aplicación

$$\nabla\colon \Gamma(E) \to \mathcal{E}^1(M; E),$$

tal que si $s \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M)$, se tiene $\nabla(fs) = df \wedge s + f\nabla(s)$. Recordemos que es posible extender esta definición a:

$$\nabla\colon \mathcal{E}^r(M; E) \to \mathcal{E}^{r+1}(M; E),$$

tal que si $\omega \in \mathcal{E}^l(M)$ y $\eta \in \mathcal{E}^r(M; E)$, se tiene

$$\nabla(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^l \omega \wedge \nabla(\eta).$$

Consideremos $\nabla^2\colon \Gamma(E) \to \mathcal{E}^2(M; E)$. Sean $s \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(M)$:

$$\nabla^2(fs) = \nabla(df\wedge s+f\nabla(s)) = d^2f\wedge s+(-1)^1 df\wedge\nabla(s)+df\wedge\nabla(s)+f\nabla^2(s) = f\nabla^2(s).$$

Así, podemos interpretar ∇^2 como una aplicación $C^(M)$-multilineal

$$D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$

que es además antisimétrica en las dos primeras variables. Consideremos el fibrado asociado a E de sus endomorfismos; se trata de un fibrado vectorial $\pi\colon \operatorname{End} E \to M$ de rango k^2 y tal que la fibra sobre un punto p se identifica con $\operatorname{End} E_p$. De esta forma D lo podemos identificar con un elemento de $\mathcal{E}^2(M; \operatorname{End} E)$, es decir una 2-forma con valores en $\operatorname{End} E$.

Recordatorio 17.1. Recordemos que una forma de construir fibrados asociados era la siguiente. Supongamos que tenemos un fibrado lineal de fibra F y para simplificar supongamos que el grupo de Lie que actúa es $GL(F)$ con la acción estándar. Entonces $GL(F)$ actúa sobre el grupo de los endomorfismos de F:

$$GL(F) \times \operatorname{End} F \to \operatorname{End} F, \qquad g \cdot u := gug^{-1},\ \forall g \in GL(F),\ \forall u \in \operatorname{End} F.$$

Si $F = \mathbb{R}^k$, identificamos $GL(F) = GL(k; \mathbb{R})$ y $\operatorname{End} E = M(k, \mathbb{R})$, y la composición con el producto matricial. Como vimos anteriormente, si fijamos un abierto V donde E sea trivializable, y fijamos una base local $s_1, \ldots, s_k$ de secciones de $E_{|V}$, la conexión viene determinada por una matriz $\theta := (\theta_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$ de 1-formas diferenciables. La matriz viene definida por:

$$(\nabla s_1 \ldots \nabla s_k) = (s_1 \ldots s_k) \wedge \theta,$$

donde el producto es una combinación de productos estándar, exteriores y matriciales.

Supongamos que tenemos otra base local $t_1, \dots, t_k$ sobre V tal que

$$(s_1 \dots s_k) = (t_1 \dots t_k)g,$$

donde $g\colon V \to GL(k;\mathbb{R})$ es una función diferenciable que expresa los cambios de base. Sea $\phi := (\phi_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ la matriz de 1-formas en esta base. La relación es:

$$\phi = g\theta g^{-1} + dg \cdot g^{-1},$$

donde dg es la matriz de 1-formas cuyas entradas son las diferenciales de las entradas de de g.

De la misma forma, la aplicación ∇^2 viene determinada por una matriz $\Omega := (\Omega_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ de 2-formas tal que

$$(\nabla^2 s_1 \dots \nabla^2 s_k) = (s_1 \dots s_k) \wedge \Omega,$$

donde $\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta$. Si Φ es la matriz correspondiente a ∇^2 y $t_1, \dots, t_k$, en este caso la relación es $\Phi = g\Omega g^{-1}$, debido al carácter tensorial y como se puede calcular directamente.

Utilizamos sin demostración la siguiente proposición.

Proposición 17.2. *Sean $X_0, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$; sea $\eta \in \mathcal{E}^r(M;E)$. Como $\nabla(\eta) \in \mathcal{E}^{r+1}(M;E)$, al evaluarla en $r+1$ campos se obtiene un elemento de $\Gamma(E)$. Este elemento se expresa:*

$$\begin{aligned}\nabla(\eta)(X_0, X_1, \dots, X_r) = &\sum_{j=0}^{r}(-1)^j \nabla_{X_j}(\eta(X_0, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_r)+ \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le r} (-1)^{i+j}\eta([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_r)\end{aligned}$$

Sean $s \in \Gamma(E)$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\nabla^2(s)(X,Y) &= \nabla_X(\nabla(s)(Y) - \nabla_Y(\nabla(s)(X) - \nabla(s)([X,Y]) = \\ &= \nabla_X\nabla_Y(s) - \nabla_Y\nabla_X(s) - \nabla_{[X,Y]}(s).\end{aligned}$$

Es decir si $E = TM$, hemos visto que $\nabla^2(Z)(X,Y) = -R(X,Y)Z$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.