# 1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA Y PRINCIPALES APLICACIONES DE LOS GRUPOS DE LIE

La teoría de grupos de transformaciones continuas, más tarde llamados grupos de Lie, fue construida hacia 1873 por el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899). Ésta surge de su trabajo en ecuaciones diferenciales y "contact transformation". Él tenía en mente desarrollar una teoría de Galois de ecuaciones diferenciales, en la cual estos grupos jugarían el papel de grupos de Galois de una ecuación algebraica.

Cuando los estudiantes se encuentran por primera vez con las ecuaciones diferenciales ordinarias se les presenta una variedad de técnicas especiales designadas para resolver ciertos tipos de ecuaciones particulares no relacionadas a primera vista, como las ecuaciones exactas, homogéneas o separables. Realmente, este era el estado de la técnica en torno a la mitad del siglo XIX, cuando Sophus Lie hizo el profundo descubrimiento de que estos métodos especiales eran, de hecho, todos casos especiales de un procedimiento general de integración basado en la invariancia de las ecuaciones diferenciables bajo un grupo continuo de simetrías. Esa observación unificaba y extendía significativamente las técnicas de integración disponibles, e inspiro a Lie para dedicar el resto de su carrera matemática al desarrollo y aplicación de su teoría monumental de grupos continuos.

Estos grupos han tenido un profundo impacto en todas las áreas de las matemáticas, tanto puras como aplicadas, también en física, ingeniería y otras ciencias basadas en matemáticas. La aplicación de los grupos de Lie incluye campos tan diversos como la topología algebraica, la geometría diferencial, el análisis numérico, la mecánica clásica, la relatividad y muchos más.

Por ejemplo, en la primera mitad del siglo $XIX$, N.I. Lobachevski desarrolló un nuevo sistema geométrico, que lleva su nombre. Aproximadamente al mismo tiempo la geometría proyectiva emergió como un sistema geométrico independiente; un poco más tarde se creó la geometría de Riemann. Dentro de la segunda mitad del siglo $XIX$ podríamos enumerar así una serie de sistemas geométricos independientes que estudian desde diferentes puntos de vista "las formas espaciales del mundo real"(Engels). Gracias a la teoría de grupos fue posible comprender todos estos sistemas geométricos desde un solo punto de vista, pero conservando sus diferencias cualitativas más importantes. Esta idea fue introducida por F. Klein, consiste en clasificar los distintos sistemas geométricos por sus grupos de movimientos o automorfismos, y estos son precisamente grupos de Lie. Esta aplicación motivó de manera muy importante el estudio de los grupos de Lie.

Por otro lado, problemas no resueltos aún para grupos finitos se resolvieron de forma relativamente rápida para grupos de Lie. Un ejemplo es la clasificación de los grupos de Lie simples, que fue obtenida por Killing y Cartan ya a finales del siglo $XIX$. Tambien, mediante el desarrollo de los grupos de Lie, los matemáticos soviéticos V.V. Morozov, A.I. Malsev y E.B. Dynkin han encontrado una solución completa del problema de clasificar los subgrupos simples de los grupos de Lie.

Otra motivación para el estudio de grupos de Lie fue el quinto problema propuesto por Hilbert: El problema de generalizar el concepto de grupo de Lie para grupos de transformaciones continuas sin suponer la diferenciabilidad de la funcion que define el grupo. La solución final se dió en 1952 por Gleason, Montgomery y Zippin. El teorema que probaron fue que si $G$ es un grupo topológico entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $G$ es un grupo de Lie
2. Existe un entorno $U$ de 1 tal que 1 es el único subgrupo contenido en $U$.
3. Existe un entorno $V$ de 1 tal que $V$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Alguien que este ya familiarizado con una de esas modernas manifestaciones de la teoría de grupos de Lie puede estar probablemente sorprendido de aprender que su fuente de inspiración original fue el campo de las ecuaciones diferenciables. Una posible causa para la ausencia de familiaridad con este aspecto importante de la teoría de grupos de Lie es el hecho de que los grupos de Lie que aparecen como grupos de simetría de genuinos sistemas físicos de ecuaciones diferenciables no son a menudo grupos particularmente elegantes desde un punto de vista matemático. Históricamente, la aplicación de los grupos de Lie a ecuaciones diferenciales promovida por Lie y Noether se desvanece en la oscuridad en tanto que la reformulación global abstracta de la geometría diferencial y la teoría de grupos de Lie, defendida por Cartan ganaba terreno en la comunidad matemática. La materia completa permanece latente durante casi medio siglo hasta que G. Burkhoff llamó la atención sobre la inexplotada aplicación de los grupos de Lie a las ecuaciones diferenciables de mecánica de fluidos. Posteriormente Ovsianmikov y su escuela comienzan un programa sistemático de éxito aplicando estos métodos a un amplio registro de importantes problemas físicos. Las dos últimas décadas han presenciado una explosión de la actividad de búsqueda en este campo, tanto en la aplicación a sistemas físicos concretos como en las extensiones de la teoría. Sin embargo, muchas cuestiones permanecen sin resolver y el rango completo de la aplicación de los métodos de los grupos de Lie a ecuaciones diferenciales está todavía sin determinar.

## 2. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE GRUPOS DE LIE

Un *grupo de Lie* $G$ es un grupo que tiene estructura de variedad diferenciable y para la cual la función de grupo

$$\begin{aligned} \theta: \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longrightarrow g_1 g_2 \end{aligned}$$

es diferenciable

NOTAS.

1. Dependiendo de la bibliografía consultada, podemos encontrar como definición de grupo de Lie un grupo que tiene estructura de variedad diferenciable y para la cual la función de grupo

$$\begin{aligned} \theta: \quad G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longrightarrow g_1 g_2^{-1} \end{aligned}$$

   es diferenciable.
   Estas dos definiciones son equivalentes. En efecto, veremos que la definición dada implica que la aplicación $g \mapsto g^{-1}$ es diferenciable. La otra implicación es inmediata.

2. Como hemos incluido la $2^o$ numerabilidad en la definición de variedad diferenciable, los grupos de Lie serán siempre $II$-numerables.

EJEMPLOS.

1. El espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$, con la suma de vectores, es un grupo de Lie.
2. Los números complejos no nulos $\mathbb{C}^*$, con la multiplicación, forman un grupo de Lie.
3. La circunferencia unidad $S^1 \subset \mathbb{C}^*$, con la multiplicación inducida por $\mathbb{C}^*$, es un grupo de Lie.

4. El producto $G \times H$ de dos grupos de Lie es también un grupo de Lie con la estructura de variedad producto y la estructura de grupo de producto directo, esto es:

$$(g_1, h_1)(g_2 h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

5. El n-toro $T^n (n \in \mathbb{N} - \{0\})$ es un grupo de Lie que es el producto del grupo de Lie $S^1$ $n$ veces.
6. La variedad $GL(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ reales no singulares es un grupo de Lie bajo la multiplicación de matrices.
7. El conjunto de todas las matrices no singulares supertriangulares $n \times n$ reales (los elementos bajo la diagonal son cero) es un grupo de Lie bajo la multiplicación de matrices.
8. El producto semidirecto $A \times B$ de dos grupos de Lie es tambien grupo de Lie con la estructura de variedad producto y la estructura de grupo de producto semidirecto, esto es:

$$(a, b)(a', b') := (aa', bh_a(b'))$$

   donde $h_a \in AutB$ y $A \mapsto h_a$ es un homomorfismo.
   Los dos siguientes ejemplos, son casos particulares de producto semidirecto de dos grupos de Lie.
9. Sean $\mathbb{R}^*$ los números reales no nulos, y sea $K$ la variedad producto $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Con la estructura de grupo en $K$ definida por $(s, t)(s_1, t_1) = (ss_1, st_1 + t)$ $K$ se reconvierte en un grupo de Lie. Este grupo de Lie es el *grupo de las transformaciones afines de* $\mathbb{R}$, para el cual si identificamos el elemento $(s, t)$ de $K$ con la transformación afin $x \longrightarrow sx + t$, entonces la multiplicación en $K$ es composición de transformaciones afines.
10. Sea $K$ la variedad producto $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Definimos una estructura de grupo en $K$ mediante

$$(A, v)(A_1, v_1) = (AA_1, Av_1 + v)$$

   Con esta estructura de grupo, $K$ se convierte en grupo de Lie. Este grupo de Lie es *el grupo de transformaciones afines* $\mathbb{R}^n$ para el cual, si identificamos el elemento $(A, v)$ de $K$ con la transformación afin $x \longrightarrow Ax + v$ de $\mathbb{R}^n$, entonces la multiplicación en $K$ es composición de transformaciones afines.

## 3. PROPIEDADES

Dado un elemento de un grupo de Lie $G$, la función:

$$\begin{aligned} L_a : \ & G \longrightarrow G \\ & g \longrightarrow ag \end{aligned}$$

se llama *traslación a izquierda por a*. Como la función de grupo $\theta$ es diferenciable, $L_a$ es diferenciable. Su inversa $L_a^{-1}$ también es diferenciable y, por tanto, $L_a$ es un difeomorfismo de $G$ en sí mismo.
Lo mismo aplicado a la traslación a derecha:

$$R_a : g \longrightarrow ga$$

Hemos postulado que la función de grupo $\theta : G \times G \longrightarrow G$ de un grupo Lie es diferenciable. Ahora mostramos que esto implica que la otra función de grupo es también diferenciable.

**Proposición 3.1.** *Si $G$ es un grupo de Lie, la función*

$$\begin{aligned} \psi : \ & G \longrightarrow G \\ & g \longrightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

*es un difeomorfismo.*

*Demostración.* Daremos una idea de la demostración, ésta se puede encontrar en el capítulo 12 del Brickell.
Como $\psi$ es una biyección y es su propia inversa, sólo tenemos que demostrar que es diferenciable. Realmente, bastará probar que es diferenciable el elemento unidad $e$ de $G$, ya que, para $g \in G$,

$$\psi = R_{g^{-1}} \circ \psi \circ L_{g^{-1}}$$

y la diferenciabilidad de $\psi$ en $g$ se seguirá de su diferenciabilidad en $e$. Para ver esto, basta elegir un entorno lo suficientemente pequeño de $e$ y una carta tal que $xe = 0$ , si $f := (x \times x)^{-1} \circ \theta \circ x$ representación de $\theta$, existen entornos $U$, $V$ del $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall w \in U \ \exists | v \in V$ tal que $f(v, w) = 0$ y la función $w \mapsto v$ es diferenciable y es una representacion de $\psi$

□

### 3.1. Algunas propiedades topológicas de los grupo de Lie.

Un grupo de Lie es un grupo que tiene la estructura de una variedad diferenciable y para la cual la función de grupo es diferenciable.
Sin embargo, examinaremos primero una estructura más simple:
Un *grupo topológico* $G$ es un grupo que tiene la estructura de espacio topológico y para el cual las funciones de grupo

$$\theta : G \times G \longrightarrow G$$
$$\psi : G \longrightarrow G$$

son continuas.
Se sigue de la proposición anterior que un grupo de Lie con la topología inducida por su estructura diferenciable es un grupo topológico.

Argumentos similares a los ya usados nos muestran que las traslaciones a izquierda, ya definidas, de un grupo topológico son homeomorfismos.

Un subgrupo de un grupo topológico $G$ que es un subconjunto abierto de $G$ es llamado un *subgrupo abierto de* $G$.
Un *subgrupo cerrado de* $G$ se define de manera similar.
Un subgrupo abierto $H$ de $G$ es necesariamente cerrado, ya que $G \setminus H$ es la unión de todos los subconjuntos abiertos $gH$, donde $g \in G \setminus H$ y $gH$ es abierto en $G$.

Necesitaremos dos proposiciones sobre grupos topológicos relacionadas con la idea de conexión.

**Proposición 3.2.** *La componente $G_e$ que contiene a la unidad $e$ de un grupo topológico $G$ es un subgrupo normal de $G$. Las otras componentes son los complementarios de $G_e$ en $G$*

*Demostración.* Ver Brickell Cap.12

□

**Proposición 3.3.** *Un grupo topológico convexo $G$ es generado por un entorno del elemento unidad.*

*Demostración.* Ver Brickell Cap.12

□

Propiedades.

1. Si $U$ es un subconjunto abierto de un grupo topológico $G$, el conjunto $L_aU$ es también abierto. Es denotado a menudo por $aU$. Si $U$ y $V$ son ambos subconjuntos abiertos de $G$, el conjunto $UV = \{gh|g \in U, h \in V\}$ es también abierto porque es la unión de todos los conjuntos abiertos $gV$ donde $g \in U$. Es una consecuencia de la continuidad de la función de grupo $\theta$ que, dado un entorno $U$ de la unidad $e$, existe un entorno $W$ de $e$ tal que $W^2 = WW \subset U$

2. Como la función continua $\psi : G \longrightarrow G$ es su propia inversa, es un homeomorfismo. Si $U$ es un subconjunto abierto de un grupo topológico $G$, el conjunto $U_{-1} = \{g^{-1}\}$ para todo $g \in U$ es el mismo que $\psi U$ y por tanto es abierto. Consecuentemente, dados los entornos $U$ y $W$ de $e$ tales que $W^2 \in U$ , entonces $V = W \cap W^{-1}$ es un entorno de $e$ tal que $V = V^{-1}$. Se sigue que $V^{-1}V \in U$

Si $G$ y $H$ son grupos de Lie, un *homomorfismo de grupos de Lie de G a H* es una aplicación diferenciable $F : G \longrightarrow H$ que es también un homomorfismo de grupos.
Se llamará *isomorfismo de grupos de Lie* si es también un difeomorfismo, lo que implica que tiene una inversa que es también un homomorfismo de grupos de Lie.
Un *automorfismo de grupos de Lie* es un isomorfismo de grupos de Lie de $G$ en sí mismo.
Un *subgrupo de Lie de un grupo de Lie G* es un subgrupo de $G$ dotado de una estructura topológica y diferenciable que lo hace grupo de Lie y subvariedad inmersa en $G$.

**Lema 3.4.** *Sea $G$ un grupo de Lie, y supongamos que $H \subset G$ es un subgrupo que es también una subvariedad encajada. Entonces $H$ es un subgrupo de Lie.*

*Demostración.* Sólo necesitamos comprobar que la multiplicación $H \times H \longrightarrow H$ y la inversión $H \longrightarrow H$ son aplicaciones diferenciables. Como la multiplicación es una aplicación diferenciable de $G \times G$, en su restricción es claramente diferenciable de $H \times H$ en $G$ (esto es cierto incluso si $H$ está simplemente inmerso). Como $H$

es un subgrupo, la multiplicación va de $H \times H$ en $H$, y como $H$ está encajado, es una aplicación diferenciable en $H$. Un argumento similar se aplica a la inmersión.

$\square$

EJEMPLOS.

1. El grupo $S^1$ es un subgrupo de Lie de $\mathbb{C}^*$ porque es un subgrupo y una subvariedad encajada.

2. El grupo ortogonal $O(n)$ es un subgrupo de Lie encajado de $GL(n, \mathbb{R})$. Es un grupo compacto porque es un subconjunto cerrado y acotado de $M_{nn}(\mathbb{R})$

3. El grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices $n \times n$ con determinante 1. Como la función determinante satisface $\det(AB) = \det A \cdot \det$, $SL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. Veamos que
   $\det : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una submersión diferenciable: Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$ arbitraria, y sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ la curva diferenciable $\gamma(t) = e^t A$, entonces

$$\det{}_* \gamma'(0) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \det(e^t A) = \frac{d}{dt} |_{t=0} (e^{nt} \det A) = n \det A \neq 0$$

   Esto nos muestra que $\det_* : T_A GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow T_{\det A} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ no es la aplicación nula y como $\mathbb{R}$ es unidimensional, se sigue que $\det_*$ tiene rango 1.
   Así det es una submersión de lo cual se sigue que $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ es una subvariedad encajada y por lo tanto un subgrupo de Lie.
4. Sea $H \subset T^2$ la subvariedad inmersa densa del toro que es la imagen de la inmersión $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow T^2$ que puede escribirse en notación compleja de $\mathbb{C}^2$ como $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i t} \alpha)$ donde $\alpha$ es un número irracional. Es fácil comprobar que $\gamma$ es un homomorfismo de grupos y de esta forma $H$ es un subgrupo de $T^2$. Como la estructura diferenciable en $H$ esta definida de forma que $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow H$ sea un difeomorfismo, $H$ es un grupo de Lie (de hecho, isomorfo como grupo de Lie a $\mathbb{R}$) y es por tanto un subgrupo de Lie de $T^2$.

# 4. EL ÁLGEBRA DE LIE DE UN GRUPO DE LIE

El conjunto de campos vectoriales en un grupo de Lie que son invariantes bajo todas las traslaciones a izquierda forma un espacio vectorial finito, que lleva consigo un producto bilineal natural que le dota de una estructura algebraica conocida como *álgebra de Lie*. Muchas de las propiedades de un grupo de Lie se reflejan en la estructura algebraica de su álgebra de Lie. En este apartado, introduciremos la definición de álgebra de Lie abstracta, definiremos el álgebra de Lie de un grupo de Lie y exploraremos algunas de sus propiedades importantes incluyendo la relación entre álgebras de Lie, homomorfismos de grupos de Lie y subgrupos uniparamétricos de grupos de Lie. Después introduciremos la aplicación exponencial, una aplicación diferenciable del álgebra de Lie en el grupo que muestra de una manera muy explícita cómo la estructura de grupo cerca de la identidad está reflejada en la estructura algebraica del álgebra de Lie. La culminación del apartado es una completa descripción de la correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie: Hay una correspondencia biyectiva entre las álgebras de Lie de dimensión finita y grupos de Lie simplemente conexos, y todos los grupos de Lie con un álgebra de Lie dada son cocientes de los simplemente conexos por subgrupos discretos.

## 4.1. Álgebras de Lie y ejemplos.

**Definición 4.1.** Un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{b}$ con una aplicación bilineal $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{b}$, denotada por $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ y llamada el corchete de $X$ e $Y$, que satisface las dos propiedades siguientes para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{b}$

1. Antisimétrica: $[X, Y] = -[Y, X]$
2. Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Notemos que la identidad de Jacobi es un sustituto para la asociatividad, que no se produce en general para el cociente en un álgebra de Lie. La importancia del concepto de álgebra de Lie es que hay un álgebra de Lie de dimensión finita asociada con cada grupo de Lie y que las propiedades de un grupo de Lie estarán reflejadas en su álgebra de Lie.

EJEMPLOS DE ALGEBRAS DE LIE.

1. El espacio vectorial $M_{nn}(\mathbb{R})$ de las matrices reales $n \times n$ es un álgebra de Lie si definimos: $[A, B] = AB - BA$

2. El espacio vectorial de todos los campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciable $M$ es un álgebra de Lie bajo la operación corchete de Lie.

3. Cualquier espacio vectorial $V$ se convierte en un álgebra de Lie si definimos todos los corchetes de Lie como 0. Tal álgebra de Lie se dice *abeliana*.

**Definición 4.2.** Si $\mathfrak{b}$ es un álgebra de Lie, un subespacio lineal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ se llama subálgebra de Lie de $\mathfrak{b}$ si es cerrado bajo los corchetes. En este caso $\mathfrak{a}$ será también un álgebra de Lie con la misma operación corchete.

Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son álgebras de Lie, una aplicación lineal $A : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{b}$ se llama homomorfismo de álgebras de Lie si preserva los corchetes: $A[X, Y] = [AX, AY]$.

Un homomorfismo de álgebras de Lie inversible se llama isomorfismo de álgebras de Lie. Si existe un isomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, decimos que son isomorfas como álgebras de Lie.

## 4.2. Álgebras de Lie de un grupo de Lie.

**Definición 4.3.** Suponer que $G$ es un grupo de Lie. Un campo vectorial diferenciable $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice que es invariante a izquierda si es invariante bajo todas las traslaciones a izquierda de $G$: $L_{g*}X = X$ para cada $g \in G$ (Notar que como $L_g$ es un difeomorfismo, $L_{g*}X$ es un campo vectorial bien definido en $G$, y el que el $L_{g*}X = X$ significa que $L_{g*}(X_{g'}) = X_{gg'}$ para cada par $g, g'$ de elementos de $G$).

**Lema 4.4.** *Sea $G$ un grupo de Lie, y sea $\mathfrak{g}$ el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda en $G$. Entonces $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$*

*Demostración.* Como $L_{g*}(aX + bY) = aL_{g*}X + bL_{g*}Y$, es claro que $\mathfrak{g}$ es un subespacio lineal de $\mathfrak{X}(G)$. Además, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ $\quad L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X, Y]$. Así, $\mathfrak{g}$ es cerrado bajo los corchetes. $\square$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se llama el *álgebra de Lie del grupo de Lie $G$*. El hecho fundamental es que $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita, incluso tiene la misma dimensión que $G$, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.** *Sea $G$ un grupo de Lie, y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. La aplicación evaluación $\mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$, dada por $X \mapsto X_e$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Así, $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita, con dimensión igual a la dimensión de $G$.*

*Demostración.* Probaremos el teorema construyendo una inversa a la aplicación evaluación. Para cada $V \in T_eG$, definimos una sección $\widetilde{V}$ de $TG$ por: $\widetilde{V}_g := L_{g*}V$

Si hay algún campo vectorial invariante a izquierda en $G$ cuyo valor en la identidad es $V$, claramente tendría que estar dado por esta fórmula.

Primero necesitamos comprobar que $\widetilde{V}$ es de hecho un campo vectorial diferenciable. Por lo visto en clase, será suficiente demostrar que $\widetilde{V}f$ es diferenciable siempre que $f$ sea una aplicación diferenciable en un conjunto abierto $U \subset G$. Elijamos una curva diferenciable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$ tal que $\gamma(0) = e$ y $\gamma'(0) = V$. Entonces, para $g \in U$,

$$(\widetilde{V}f)(g) = \widetilde{V}_g f = (L_{g*}V)f = V(f \cdot L_g) = \gamma'(0)(f \cdot L_g) =$$
$$= \tfrac{d}{dt} \mid_{t=0} (f \cdot L_g \cdot \gamma) = \tfrac{d}{dt} f(g\gamma(t)) \mid_{t=0}$$

La expresión $\varphi(g,t) = f(g\gamma(t))$ depende diferenciablemente de $(g,t)$, porque es una composición de la multiplicación del grupo, $f$ y $\gamma$. Así, su derivada respecto de $t$ depende diferenciablemente de $g$, y por tanto $\widetilde{V}f$ es diferenciable.

Ahora tenemos que comprobar que $\widetilde{V}$ es invariante a izquierda, es decir, comprobar que $L_{h*}\widetilde{V}_g = \widetilde{V}_{hg}$ para todos los $g, h \in G$. Esto se sigue de la definición de $\widetilde{V}$ y del hecho de que $L_h \cdot L_g = L_{hg}$:

$$L_{h*}\widetilde{V}_g = L_{h*}(L_{g*}V) = L_{hg*}V = \widetilde{V}_h g$$

Así, $\widetilde{V} \in \mathfrak{g}$

Finalmente, comprobemos que la aplicación $\tau : V \longrightarrow \widetilde{V}$ es una inversa para la aplicación evaluación $\varepsilon : X \longrightarrow X_e$.
Por un lado, dado un vector $V \in T_eG$,

$$\varepsilon(\tau(V)) = \widetilde{V}_e = L_{e*}V = V$$

Lo que muestra que $\varepsilon \cdot \tau$ es la identidad en $T_eG$.
Por otro lado, dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{g}$

$$\tau(\varepsilon(X))_g = \widetilde{X}_e L_g = L_{g*}X_e = X_g$$

Lo que nos muestra que $\tau \cdot \varepsilon$ es la identidad en $\mathfrak{g}$. $\square$

EJEMPLOS DE ÁLGEBRAS DE LIE DE ALGUNOS GRUPOS DE LIE.

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$: La traslación a izquierda por un elemento $b \in \mathbb{R}^n$ es dada por la aplicación afín $L_b(x) = x + b$ , y $L_{b*}$ se representa mediante la matriz identidad en coordenadas estándar. Esto implica que un campo vectorial $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es invariante a izquierda sí y solo sí sus coeficientes $v^i$ son constantes. Como dos campos vectoriales de coeficientes constantes conmutan, el álgebra de Lie de $\mathbb{R}^n$ es abeliana y es isomorfa a $\mathbb{R}^n$ con la operación corchete de Lie.

2. La circunferencia unidad $S^1$: En un entorno de cada punto de $S^1$, una adecuada elección de la función ángulo $\theta$ nos da una coordenada local. Como las diversas elecciones de función ángulo difieren en constantes, el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial \theta}$ es independiente de que función ángulo se usa. Es sencillo comprobar que $\frac{\partial}{\partial \theta}$ engendra el álgebra de Lie de $S^1$.

3. El $n$-toro $T^n$: En $T^n$, los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial \theta^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta^n}$ definidos de manera obvia, son invariantes a izquierda y engendran el álgebra de Lie. Como son campos vectoriales coordenados en algún conjunto abierto suficientemente pequeño, conmutan. Así, el álgebra de Lie de $T^n$ es abeliana.

4. El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R})$: Como $GL(n, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto del espacio vectorial $M_{nn}(\mathbb{R})$, su espacio tangente en cada punto puede identificarse con $M_{nn}(\mathbb{R})$. Usando los coeficientes de la matriz $A_{ij}$ como coordenadas, esta identificación toma la forma:

$$(B_{ij}) \longleftrightarrow \sum_{i,j} B_{ij} \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \mid_A$$

   Sea $gl(n, \mathbb{R})$ el álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Tenemos isomorfismos de espacios vectoriales

$$gl(n,\mathbb{R}) \cong \Gamma_I GL(n,\mathbb{R}) \cong M_{nn}(\mathbb{R}) \tag{4.1}$$

El campo vectorial invariante a izquierda correspondiente a una matriz $B = (B_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ es dado por:

$$\widetilde{B}_A = L_{A*}(\sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial}{\partial A_{ij}} |_I)$$

Como $L_A$ es la restricción de la aplicación lineal $B \longmapsto AB$, entonces $L_{A*}$ se representa en coordenadas pos exactamente la misma aplicación lineal. En otras palabras,

$$\widetilde{B}_A = \sum_{ijk} A_{ij} B_{jk} \frac{\partial}{\partial A_{ik}} |_A$$

Dadas dos matrices $B, C \in M_{nn}(\mathbb{R})$, el corchete de Lie de los correspondientes campos vectoriales invariantes a izquierda es dado por:

$$[\widetilde{B}, \widetilde{C}] = [\sum_{ijk} A_{ij} B_{jk} \frac{\partial}{\partial A_{ik}}, \sum_{pqr} A_{pq} C_{qr} \frac{\partial}{\partial A_{pr}}] =$$

$$= \sum_{ijkpqr} A_{ij} B_{jk} \frac{\partial}{\partial A_{ik}} (A_{pq} C_{qr}) \frac{\partial}{\partial A_{pr}} - \sum_{ijkpqr} A_{pq} C_{qr} \frac{\partial}{\partial A_{pr}} (A_{ij} B_{jk}) \frac{\partial}{\partial A_{ik}} =$$

$$= \sum_{ijkr} A_{ij} B_{jk} C_{kr} \frac{\partial}{\partial A_{ir}} - \sum_{jpqr} A_{pq} C_{qr} B_{rk} \frac{\partial}{\partial A_{pk}} =$$

$$= \sum_{ijkr} (A_{ij} B_{jk} C_{kr} - A_{ij} C_{jk} B_{kr}) \frac{\partial}{\partial A_{ir}}$$

donde hemos usado el hecho de que $\frac{\partial A_{pq}}{\partial A_{ik}}$ es igual a uno si $p = i$ y $q = k$ y cero en otro caso, y $B_{ij}$ y $C_{ij}$ son constantes. Evaluando esta última expresión cuando $A$ es igual a la matriz identidad, obtenemos:

$$[\widetilde{B}, \widetilde{C}]_I = \sum_{ikr} (B_{ik} C_{kr} - C_{ik} B_{kr}) \frac{\partial}{\partial A_{ir}} |_I$$

Este es el vector correspondiente al corchete conmutador $[B, C]$. Como el campo vectorial invariante a izquierda $[\widetilde{B}, \widetilde{C}]$ está determinado por su valor en la identidad, esto implica que $[\widetilde{B}, \widetilde{C}] = \widetilde{[B, C]}$. En otras palabras, hemos probado lo siguiente:

La aplicación (4,1) nos da un isomorfismo de álgebras entre $M_{nn}(\mathbb{R})$ con el corchete conmutador y $gl(n,\mathbb{R})$.
A menudo identificaremos $gl(n,\mathbb{R})$ con el álgebra de Lie matricial $M_{nn}(\mathbb{R})$ por medio de ese isomorfismo.

El teorema (4,5) tiene el siguiente corolario:

**Corolario 4.6.** *Todo grupo de Lie es paralelizable.*

*Demostración.* Sea $G$ un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Eligiendo cualquier base $X_1,\ldots,X_n$ para $\mathfrak{g}$, el teorema anterior nos dice que $X_1|_e,\ldots,X_n|_e$ forman una base para $T_eG$. Para cada $g\in G$, $L_{g*}:T_eG\longrightarrow T_gG$ es un isomorfismo que lleva $X_i|_e$ a $X_i|_g$, por tanto $X_1|_g,\ldots,X_n|_g$ forman una base para $T_gG$ en cada $g\in G$ $\square$

La demostración del corolario anterior nos muestra que cualquier base para el álgebra de Lie de G es un sistema generador (frame) global consistente en campos vectoriales invariantes a izquierda. Llamaremos a tal sistema generador, *sistema generador invariante a izquierda.*

EJEMPLOS.

1. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ forman un sistema generador invariante a izquierda para el grupo de Lie $\mathbb{R}^n$.

2. Los campos vectoriales $\{\frac{\partial}{\partial\theta^i}\}$ forman un sistema generador invariante a izquierda para $T^n$.

3. Como $SU(2)$ es difeomorfo a $S^3$, se sigue que $S^3$ es paralelizable.
   Un sistema generador global explícito para $S^3$ viene dado en coordenadas en $\mathbb{R}^4(w,x,y,z)$ por:

$$\begin{aligned}X_1&=-x\frac{\partial}{\partial w}+w\frac{\partial}{\partial x}-z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z}\\X_2&=-y\frac{\partial}{\partial w}+z\frac{\partial}{\partial x}+w\frac{\partial}{\partial y}-x\frac{\partial}{\partial z}\\X_3&=-z\frac{\partial}{\partial w}-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

   De hecho, se mostró en 1958 por Raul Bott y John Milnor usando métodos más avanzados que las únicas esferas paralelizables eran $S^1$, $S^3$ y $S^7$. Así, estas son las únicas esferas que tienen posibilidad de admitir estructura de grupo de Lie. (Las dos primeras la admiten como hemos visto, $S^7$ no tiene estructura de grupo de Lie).

## 4.3. Homomorfismos de álgebras de Lie inducidos.

En esta sección veremos que un homomorfismo de Lie entre grupos de Lie induce un homomorfismo de álgebras de Lie entre sus álgebras de Lie, y estudiaremos algunas de las consecuencias de este hecho.

**Teorema 4.7.** *Sean $G$ y $H$ grupos de Lie y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie, y supongamos que $F : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, hay un único campo vectorial en $\mathfrak{h}$ que esta $F$-relacionado con $X$. La aplicación $F_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ así definida es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

*Demostración.* Si hay algún campo vectorial $Y \in \mathfrak{h}$ que este $F$-relacionado con $X$, debe satisfacer $Y_e = F_* X_e$, y así debe estar definido por $Y = \widetilde{F_* X_e}$. Para demostrar que este $Y$ esta $F$-relacionado con $X$, notemos que el hecho de que $F$ sea un homomorfismo implica que:

$$F(g_1, g_2) = F(g_1)F(g_2) \Longrightarrow F(L_{g_1} g_2) = L_{F(g_1)} F(g_2)$$
$$\Longrightarrow F \cdot L_g = L_{F(g)} \cdot F \Longrightarrow F_* \cdot L_{g*} = L_{F(g)*} \cdot F_*$$

Así

$$F_* X_g = F_*(L_{g*} X_e) = L_{F(g)*} F_* X_e = L_{F(g)*} Y_e = Y_{F(g)}$$

Esto nos dice precisamente que $X$ e $Y$ están $F$-relacionados.
Ahora, para cada $X \in \mathfrak{g}$, sea $F_* X$ el único campo vectorial en $\mathfrak{h}$ que está $F$-relacionado con $X$. Se sigue inmediatamente de la naturalidad del corchete de Lie que $F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y]$, y así $F_*$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. $\square$

**Proposición 4.8.** *Propiedades del homomorfismo inducido*

1. *El homomorfismo $Id_{G*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ inducido por la aplicación identidad de $G$, es la identidad de $\mathfrak{g}$*

2. *Si* $F_1 : G \longrightarrow H$ *y* $F_2 : H \longrightarrow K$ *son homomorfismos de grupos de Lie, entonces* $(F_2 \circ F_1)_* = (F_2)_* \circ (F_1)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{K}$.

*Demostración.* Se sigue de manera inmediata de la construcción del homomorfismo inducido. □

En el lenguaje de la teoría de categorías (Ver Álgebra *IV*), esta proposición nos dice que la asignación:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ F &\longrightarrow F_* \end{aligned}$$

es un funtor covariante de la categoría de grupos de Lie en la categoría de álgebras de Lie. El siguiente corolario es inmediato:

**Corolario 4.9.** *Grupos de Lie isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas.*

**Corolario 4.10.** *Supongamos que* $H \subset G$ *es un subgrupo de Lie. El subconjunto* $\widetilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ *definido por:*

$$\widetilde{\mathfrak{h}} = \{X \in \mathfrak{g}; X_e \in T_eH\}$$

*es una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{g}$ *canónicamente isomorfa a* $\mathfrak{h}$.

*Demostración.* Es claro que la aplicación inclusión $i_H : H \hookrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, por tanto $i_{H*}(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Por el modo en que definimos el homomorfismo de álgebras de Lie inducido, esta subálgebra es precisamente el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda de $G$ cuyo valor en la identidad es de la forma $i_{H*}V$ para algún $V \in T_eH$. Como $i_{H*} : T_eH \longrightarrow T_eG$ es la inclusión de $T_eH$ como un subespacio en $T_eG$, se sigue que $i_{H*}(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$.
Para completar la demostración, bastaría con ver solamente que $i_{H*} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es inyectivo, ya que entonces será un homomorfismo sobre la imagen. Si $i_{H*}X = 0$, entonces en particular $i_{H*}X_e = 0$, como $i_H$ es una inmersión, esto implica que $X_e = 0$ y por invariancia a izquierda tenemos $X = 0$. Así $i_{H*}$ es inyectivo. □

Usando este corolario, siempre que $H$ sea un subgrupo de Lie de $G$, generalmente identificaremos $\mathfrak{h}$ como una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
Es importante recordar que los elementos de $\mathfrak{h}$ son sólo campos vectoriales en $H$, y por tanto, estrictamente hablando, no son elementos de $\mathfrak{g}$. Sin embargo, por lo

que acabamos de ver, cada elemento de $\mathfrak{h}$ se corresponde con un único elemento de $\mathfrak{g}$, determinado por su valor en la identidad, y la inclusión de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ así determinada respeta los corchetes de Lie; así pensando en $\mathfrak{h}$ como una subálgebra de $\mathfrak{g}$ no estaremos cometiendo un error grave.

Veamos esta identificación en el caso de subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$.

EJEMPLO. Consideremos $O(n)$ como un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Tenemos que es igual a $F^{-1}(I)$, donde $F : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ es la submersión $F(A) = A^T \cdot A$. Es sencillo comprobar que como consecuencia de esto, $T_A O(n) = \ker F_* : T_A GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow T_{F(A)} S_n(\mathbb{R})$ para cada $A \in O(n)$. Se comprueba que $F_* B = B^T \cdot A + A^T \cdot B$ (Lo hicimos en clase). En particular, cuando $A$ es la identidad tenemos: $F_* B = B^T + B$, luego

$$T_I O(n) = \{B \in M_{nn}(\mathbb{R}); B^T + B = 0\} = \{ \text{ matrices } n \times n \text{ antisimétricas}\}$$

El anterior corolario implica entonces que el espacio de matrices antisimétricas es una subálgebra de Lie de $M_{nn}(\mathbb{R})$ isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de $O(N)$.

## 4.4. Subgrupos uniparamétricos.

En este apartado estudiaremos otra relación entre álgebras de Lie, campos vectoriales y grupos de Lie. Está nos dará otra caracterización del álgebra de Lie de un grupo de Lie.

Sea $G$ un grupo de Lie. Un *subgrupo uniparamétrico de* $G$ se define como un homomorfismo de grupos de Lie $F : \mathbb{R} \longrightarrow G$.

Veremos que los subgrupos uniparamétricos son precisamente las curvas integrales de campos vectoriales invariantes a izquierda partiendo de la identidad. Antes de esto enunciaremos el siguiente lema:

**Lema 4.11.** *Cada campo vectorial invariante a izquierda en un grupo de Lie es completo.*

*Demostración.* Daremos una idea de la demostración, esta se puede encontrar en: John M. Lee, Introduction to smooth manifolds; pág.146. Dado $X \in \mathfrak{g}$ sea $\theta$ el flujo de $X$. Suponer $\theta^{(g)}$ alguna curva integral maximal definida en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ $(b < \infty)$.
La curva $\theta^{(e)}$ esta definida al menos en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, elegimos algun $s \in$

$(b-\epsilon, b)$ y definimos una nueva curva $\gamma : (a, s+\epsilon) \to G$ mediante:

$$\gamma(t) = \theta^{(g)}(t) \text{ si } t \in (a,b) \; \gamma(t) = \mathrm{L}_{\theta_s(g)}(\theta_{t-s}(e)) \text{ si } t \in (s-\epsilon, s+\epsilon)$$

Se comprueba que esta curva es una curva integral de X, utilizando que $L_g \circ \theta_t = \theta_t \circ L_g$ (por ser X invariante a izquierda), definida en $(a, s+\epsilon) \supset (a,b)$ y esto contradice la maximalidad de $\theta^{(g)}$. □

**Proposición 4.12.** *Sea $G$ un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y sea $X \in \mathfrak{g}$. La curva integral de $X$ partiendo de $e$ es un subgrupo uniparamétrico de $G$.*

*Demostración.* Sea $\theta$ el flujo de $X$, de forma que $\theta^{(e)} : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es la curva integral en cuestión. Claramente $\theta^{(e)}$ es diferenciable, por tanto sólo necesitaremos ver que es un homomorfismo de grupos, es decir, $\theta^{(e)}(s+t) = \theta^{(e)}(s) \cdot \theta^{(e)}(t)$ para todos $s, t \in \mathbb{R}$. Tenemos:

$$\theta^{(e)}(s) \cdot \theta^{(e)}(t) = L_{\theta^{(e)}(s)} \theta_t(e) = \theta_t(L_{\theta^{(e)}(s)}(e)) = \theta_t(\theta^{(e)}(s)) =$$
$$= \theta_t(\theta_s(e)) = \theta_{t+s}(e) = \theta^{(e)}(t+s)$$

□

El principal resultado de esta sección es que todos los subgrupos uniparamétricos se obtienen de este modo.

**Teorema 4.13.** *Cada subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie es una curva integral de un campo vectorial invariante a izquierda. Así hay una correspondencia biyectiva.*

$$\{\textit{subgrupos uniparamétricos}\} \longleftrightarrow \mathfrak{g} \longleftrightarrow T_eG$$

*En particular, un subgrupo uniparamétrico está determinado únicamente por su vector tangente inicial en $T_eG$.*

*Demostración.* Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow G$ un subgrupo uniparamétrico y sea $\Lambda = F_*(\frac{d}{dt}) \in \mathfrak{g}$, donde pensamos en $\frac{d}{dt}$ como un campo vectorial invariante a izquierda en $\mathbb{R}$. Para probar el teorema basta con ver que $F$ es una curva integral de $X$. Recordar que $F_*(\frac{d}{dt})$ está definido como el único campo vectorial invariante a izquierda en

$G$ que está $F$-relacionado con $\frac{d}{dt}$. Así, para cada $T_0 \in \mathbb{R}$,

$$F'(t_0) = F_* \frac{d}{dt} |_{t_0} = X_{F(t_0)}$$

Por tanto, $F$ es una curva integral de $X$.

□

Dado $X \in \mathfrak{g}$, llamaremos al subgrupo uniparamétrico que determina, el *subgrupo uniparamétrico generado por* $X$.
El subgrupo uniparamétrico del grupo general lineal no es complicado de calcular explícitamente.

**Proposición 4.14.** *Sea* $B \in gl(n, \mathbb{R})$*. El subgrupo uniparamétrico de* $GL(n, \mathbb{R})$ *generado por* $B$ *es* $F(t) = e^{tB}$ *donde* $B$ *es considerado como una matriz* $n \times n$ *y* $e^{tB}$ *es la matriz exponencial*

$$e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tB)^k$$

*Demostración.* El subgrupo uniparamétrico generado por $B$ es una curva integral del campo vectorial invariante a izquierda $\widetilde{B}$, y satisface:

$$F'(t) = \widetilde{B}_{F(t)} \text{ y } F(0) = I$$

La condición de que $F$ sea una curva integral puede ser reescrita como ${F_{ik}}'(t) = F_{ij}(t)B_jk$ o en notación matricial como $F'(t) = F(t)B$

El siguiente lema nos muestra que $F(t) = e^{tB}$ satisface dicha ecuación. Como $F(0) = I$, esta es la única curva integral de $\widetilde{B}$ partiendo de la identidad y es de esta forma el subgrupo uniparamétrico que buscábamos. □

**Lema 4.15.** *Para cada* $B \in gl(n, \mathbb{R})$*, la fórmula* $\gamma(t) = e^{tB}$ *define una curva diferenciable en* $GL(n, \mathbb{R})$ *que satisface* $\gamma'(t) = e^{tB}B = B \cdot e^{tB}$*.*

*Demostración.* Se puede ver que la serie que define $\gamma$ converge uniformemente en cualquier conjunto compacto y define una aplicación diferenciable. Derivando la serie formalmente término a término obtenemos:

$$\gamma'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} t^{n-1} B^n = B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} B^{n-1} = Be^{tB}$$

Como la serie converge uniformemente en conjuntos compactos queda justificada la derivación término a término.
Un argumento similar nos dice que $e^{tB}$ es inversible para todo $t$, de forma que $\gamma$ tome valor en $GL(n, \mathbb{R})$. Si $\sigma(t) = e^{tB} \cdot e^{-tB}$, entonces $\sigma$ es una curva diferenciable en $M_{nn}(\mathbb{R})$, y por el cálculo previo y la regla del producto, satisface:

$$\sigma'(t) = (e^{tB}B)e^{-tB} - e^{tB}(Be^{-tB}) = 0$$

Así, $\sigma$ es la curva constante $\sigma(t) \equiv \sigma(0) = I$, es decir, $e^{tB}e^{-tB} = I$. Sustituyendo $-t$ por $t$, obtenemos $e^{-tB}e^{tB} = I$ Lo que nos demuestra que $e^{tB}$ es inversible y $(e^{tB})^{-1} = e^{-tB}$. □

Ahora vamos a calcular los subgrupos uniparamétricos de subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$, como $O(n)$. Para ello necesitamos el siguiente lema.

**Lema 4.16.** *Supongamos que $H \subset G$ es un subgrupo de Lie. Los subgrupos uniparamétricos de $H$ son precisamente aquellos subgrupos uniparamétricos de $G$ cuyo vector tangente inicial está en $T_eH$.*

*Demostración.* Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow H$ un subgrupo uniparamétrico. Entonces la aplicación composición $\mathbb{R} \xrightarrow{F} H \hookrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de grupos de Lie y así un subgrupo uniparamétrico de $G$, que claramente satisface $F'(0) \in T_eH$.
A la inversa, supongamos que $F : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es un subgrupo uniparamétrico cuyo vector tangente inicial está en $T_eH$. Sea $\widetilde{F} : \mathbb{R} \longrightarrow H$ el subgrupo uniparamétrico de $H$ con el mismo vector tangente inicial $\widetilde{F}'(0) = F'(0) \in T_eH \subset T_eG$. Como en el párrafo anterior, por composición con la aplicación inclusión, podemos también considerar $\widetilde{F}$ como un subgrupo uniparamétrico de $G$. Como $F$ y $\widetilde{F}$ son ambos subgrupos uniparamétricos de $G$ con el mismo vector tangente inicial, deben ser iguales.

□

EJEMPLO. Si $H$ es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, el anterior lema nos dice que los subgrupos uniparamétricos de $H$ son precisamente las aplicaciones de la forma $F(t) = e^{tB}$ para $B \in \mathfrak{h} \subset M_{nn}(\mathbb{R})$. Por ejemplo, tomando $H = O(n)$, esto nos muestra que la exponencial de cualquier matriz antisimétrica es ortogonal.

Como otra aplicación de subgrupos uniparamétricos determinaremos el álgebra de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$.

**Lema 4.17.** *La matriz exponencial satisface la identidad* $det e^A = e^{trA}$.

*Demostración.* Ver John M. Lee: Introduction to smooth manifolds; pág. 150 □

EJEMPLO. Podemos usar este resultado para calcular el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ de $SL(n, \mathbb{R})$.
Primero supongamos $B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Entonces $e^{t(trB)} = e^{tr(tB)} = \det(e^{tB}) = 1$ para cada $t$, lo que implica inmediatamente que $trB = 0$.
Inversamente, si $trB = 0$, entonces el subgrupo uniparamétrico generado por $B$ satisface $\det e^{tB} = e^{tr(tB)} = e^0 = 1$ luego está en $SL(n, \mathbb{R})$. El vector tangente inicial de este grupo uniparamétrico, llamado $B$, es tangente a $SL(n, \mathbb{R})$, lo que implica que $B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.
En resumen, hemos probado que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ es la subálgebra de $M_{nn}(\mathbb{R})$ consistente en las matrices cuyo determinante es 0.

### 4.5. La aplicación exponencial.

En el anterior apartado, hemos visto que la aplicación exponencial $B \longmapsto e^B$ es una aplicación diferenciable de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en $GL(n, \mathbb{R})$ que lleva cada base a través del origen a un subgrupo uniparamétrico. Esto tiene una poderosa generalización a grupos de Lie arbitrarios.
Dado un grupo de Lie $G$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definimos una aplicación $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, llamada la *aplicación exponencial de* $G$ mediante $\exp X = F(1)$, donde $F$ es el subgrupo uniparamétrico generado por $X$, o equivalentemente, la curva integral de $X$ partiendo de la identidad.

EJEMPLO. Los resultados de la anterior sección nos muestran que la aplicación exponencial de $GL(n, \mathbb{R})$ (o de cualquier subgrupo de Lie) viene dada por
$\exp A = e^A$. Éste obviamente es el incentivo para la generalización.

**Proposición 4.18.** *Propiedades de la aplicación exponencial.*
*Sea* $G$ *un grupo de Lie y sea* $\mathfrak{g}$ *su álgebra de Lie*

1. *La aplicación exponencial es diferenciable.*

2. *Para cada* $X \in \mathfrak{g}, F(t) = exp\ tX$ *es el subgrupo uniparamétrico de* $G$ *generado por* $X$*.*

3. *Para cada* $X \in \mathfrak{g}$, $exp\ (s+t)X = exp\ sX \cdot exp\ tX$

4. $exp_{\ *} : T_0\mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ *es la aplicación identidad bajo la identificación canónica de* $T_0\mathfrak{g}$ *y* $T_eG$ *con* $\mathfrak{g}$*.*

5. *La aplicación exponencial es un difeomorfismo de algún entorno de 0 en* $\mathfrak{g}$ *con un entorno de* $e$ *en* $G$*.*

6. *Para cada homomorfismo de grupos de Lie* $F : G \longrightarrow H$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{F_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\ G & \xrightarrow{F} & H \end{array}$$

7. *El flujo* $\theta$ *de un campo invariante a izquierda viene dado por* $\theta t = R_{exp\ tX}$ *(multiplicación a derecha por* $exp\ tX$ *).*

*Demostración.* Ver John M. Lee: Introduction to smooth manifolds. Pág.152 □

**Lema 4.19.** *Sea* $G$ *un grupo de Lie, y sea* $H \in G$ *un subgrupo de Lie, considerado como una subálgebra de* $\mathfrak{g}$*, el álgebra de Lie de* $H$ *es*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}; exp\ tx \in H \ para\ todo\ t \in \mathbb{R}\}$$

*Demostración.* Supongamos primero que $X \in \mathfrak{g}$ satisface $\exp tX \in H$ para todo $t$. Sea $\gamma$ la curva $\gamma(t) = \exp tX$, el hecho de que $\gamma(t)$ esté en $H$ para todo $t$ significa que $X_e \in \gamma'(0) \in T_eH$, lo que significa que $X \in \mathfrak{h}$ bajo nuestra identificación usual de $\mathfrak{h}$ con una subálgebra de $\mathfrak{g}$.
A la inversa, $X \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ significa que $X_e \in T_eH$, lo que implica que $\exp tX \in H$ para todo $t$. □

El siguiente lema es un resultado técnico sencillo de probar que será usado en el resultado posterior.

**Lema 4.20.** *Sea $G$ un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.*

1. *Si $m : G \times G \longrightarrow G$ denota la aplicación multiplicación, entonces $m_* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ está dado por $m_*(X,Y) = X + Y$.*

2. *Si $A, B \subset \mathfrak{g}$ son subespacios lineales complementarios de $\mathfrak{g}$, entonces la aplicación*
$$A \times B \to G$$
*dada por $(X,Y) \longmapsto exp\ X \cdot exp\ Y$ es un difeomorfismo de algún entorno de $(0,0)$ en $A \times B$ en un entorno de $e$ en $G$.*

La siguiente proposición nos muestra como la estructuras de grupo de un grupo de Lie se refleja "infinitesimalmente.[en] la estructura algebraica de su álgebra de Lie.
La segunda fórmula, en particular, nos muestra como el corchete de Lie expresa el término principal en la serie de Taylor de un grupo conmutador.

**Proposición 4.21.** *Sea $G$ un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, la aplicación exponencial satisface:*

1. $(exp\ tX)(exp\ tY) = exp\ (t(X+Y) + \frac{1}{2}t^2[X,Y] + O(t^3))$

2. $(exp\ tX)(exp\ tY)(exp\ (-tX))(exp\ (-tY)) = exp\ (t^2[X,Y] + O(t^3))$

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds ; pág. 154

□

*Observación* 4.22. Las fórmulas dadas son casos especiales de una fórmula mucho más general, llamada fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, que da expresiones recursivas para todos los términos de la serie de Taylor de $\gamma(t)$ en términos de $X, Y, [X,Y]$ y corchetes iterados como $[X,[X,Y]]$ y $[Y,[X,[X,Y]]]$.

## 4.6. El teorema del subgrupo cerrado.

El siguiente teorema es una de las más poderosas aplicaciones de la aplicación exponencial (como podremos ver en el apartado relativo a cocientes de grupos de Lie por ejemplo)

**Teorema 4.23.** *Teorema del subgrupo cerrado*
*Supongamos que $G$ es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo que es también un subconjunto cerrado. Entonces $H$ es un subgrupo de Lie encajado.*

*Demostración.* Por el lema 3.4. es suficiente ver que $H$ es una subvariedad encajada de $G$, empecemos identificando un subespacio del álgebra de Lie de $G$ que será el álgebra de Lie de $H$.
Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de $G$, y definimos un subconjunto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ por

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp tX \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

Necesitamos ver que $\mathfrak{h}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$.
Es obvio de la definición que si $X \in \mathfrak{h}$ entonces $tX \in \mathfrak{h}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para ver que $\mathfrak{h}$ es cerrado bajo suma de vectores, sean $X, Y \in \mathfrak{h}$ arbitrarios, observamos que lo visto antes implica que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$(\exp \frac{t}{n}X \cdot \exp \frac{t}{n}Y) = (\exp (\frac{t}{n}(X+Y) + O(\frac{t^2}{n^2})))$$

Con una simple inducción tenemos:

$$(\exp \frac{t}{n}X \cdot \exp \frac{t}{n}Y)^n = (\exp (\frac{t}{n}(X+Y) + O(\frac{t^2}{n^2})))^n = \exp (t(X+Y) + O(\frac{t^2}{n}))$$

Tomando limite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\exp t(X+Y) = \lim_{n\to\infty} (\exp \frac{t}{n}X \cdot \exp \frac{t}{n}Y)^n$$

que está en $H$ porque $H$ es cerrado en $G$. Así $X + Y \in \mathfrak{h}$, y por tanto $\mathfrak{h}$ es un subespacio.
Ahora veremos que hay un entorno $U$ del origen en $\mathfrak{g}$ en el cual la aplicación exponencial de $G$ es un difeomorfismo, y que tiene la propiedad de que

$$\exp (U \cap \mathfrak{h}) = (\exp U) \cap H$$

Esto nos permitirá construir una carta slice para $H$ en un entorno de cualquier punto de $H$.
Si $U$ es un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$ en el cual exp es un difeomorfismo, entonces $\exp (U \cap \mathfrak{h}) \subset (\exp U) \cap H$ por definición de $\mathfrak{h}$. Luego para encontrar un entorno que cumpla lo que queremos, todo lo que necesitamos es mostrar que $U$ puede ser elegido lo

suficientemente pequeño para que $(\exp U) \cap H \subset \exp\,(U \cap \mathfrak{h})$.
Supongamos que no fuera posible. Sea $\{U_i\}$ una base contable de entornos en $0 \in \mathfrak{g}$ (por ejemplo, una sucesión contable de bolas coordenadas cuyo radio se acerca a 0). La suposición implica que para cada $i$, existe $h_i \in (\exp U_i) \cap H$ tal que $h_i \notin \exp\,(U_i \cap \mathfrak{h})$.
Elijamos una base $E_1, \ldots, E_k$ para $\mathfrak{h}$ y extendámosla a una base $E_1, \ldots, E_m$ para $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{b}$ el subespacio engendrado por $E_{k+1}, \ldots, E_m$, de forma que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{b}$. Por lo que vimos en el apartado anterior, cuando $i$ sea suficientemente grande, la aplicación de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{b}$ a $G$ dada por $(X, Y) \longmapsto \exp X \cdot \exp Y$ será un difeomorfismo de $U_i$ en un entorno de $e$ en $G$. Así podemos escribir

$$h_i = \exp X_i \cdot \exp Y_i$$

para algunos $X_i \in U_i \cap \mathfrak{h}$ y $Y_i \in U_i \cap \mathfrak{b}$, con $Y_i \neq 0$ porque $h_i \notin \exp\,(U_i \cap \mathfrak{h})$. Como $\{U_i\}$ es una base de entornos, $Y_i \longrightarrow 0$ cuando $i \longrightarrow \infty$. Observar que $\exp X_i \in H$ por definición de $\mathfrak{h}$, por lo que se sigue que $\exp Y_i = (\exp X_i)^{-1} h_i \in H$.
La base $\{E_i\}$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales$\varepsilon : \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^m$. Sea $|\ .|$ la norma Euclídea inducida por el isomorfismo y definamos $c_i =|\ Y_i|$, de forma que $c_i \longrightarrow 0$ cuando $i \longrightarrow \infty$. La sucesión $\{c_i^{-1} Y_i\}$ está en la esfera unidad en $\mathfrak{b}$ con respecto a su norma, luego reemplazándola por una subsucesión podemos suponer que $c_i^{-1} Y_i \longrightarrow Y \in \mathfrak{b}$, con $|\ Y| = 1$ por continuidad. En particular, $Y \neq 0$. Veremos que $\exp tY \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que implica que $Y \in \mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ esto es una contradicción.
Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, y para cada $i$, sea $n_i$ el mayor entero menor o igual que $\frac{t}{c_i}$. Entonces

$$|\ n_i - \frac{t}{c_i}| \leq 1$$

lo que implica

$$|\ n_i c_i - t| \leq c_i \longrightarrow 0$$

luego $n_i c_i \longrightarrow t$. Así,

$$n_i Y_i = (n_i c_i)(c_i^{-1} Y_i) \longrightarrow tY,$$

lo que implica $\exp n_i Y_i \longrightarrow \exp tY$ por continuidad.
Pero $\exp n_i Y_i = (\exp Y_i)^n \in H$, luego el hecho de que $H$ sea cerrado implica que $\exp tY \in H$. Esto completa la demostración de la existencia del $U$ que decíamos.
La aplicación composición $\varphi = \varepsilon \cdot \exp\ ^{-1} : \exp U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se puede ver fácilmente que es una carta coordenada para $G$, y por nuestra elección de la base $\varphi((\exp U) \cap H) = \varepsilon(U \cap \mathfrak{h})$ es la slice obtenida fijando las últimas $m - k$ coordenadas iguales a 0. Más aún, si $h \in H$ es arbitrario, $L_h$ es un difeomorfismo de $\exp U$ en un entorno

de $h$. Como $H$ es un subgrupo, $L_h H = H$, y por tanto

$$L_h((\exp U) \cap H) = L_h(\exp U) \cap H$$

y $\varphi \cdot {L_h}^{-1}$ es fácil ver que es una carta slice de $H$ en un entorno de $h$. Así $H$ es una subvariedad regular de $G$, y así un subgrupo de Lie. $\square$

Es importante notar que este teorema tiene el siguiente recíproco.

**Teorema 4.24.** *Sea $G$ un grupo de Lie. Todo subgrupo de Lie de $G$ encajado, es cerrado en $G$.*

*Demostración.* Sea $H \in G$ un subgrupo de Lie encajado, y supongamos que $\{h_i\}$ es una sucesión de puntos en $H$ que convergen a un punto $g \in G$. Sea $U$ el dominio de una carta slice para $H$ que contiene a la identidad, y sea $W$ un entorno más pequeño de $E$ tal que $\overline{W} \subset U$. Como la aplicación $(g_1, g_2) \longmapsto {g_1}^{-1} g_2$ es continua, hay un entorno de $V$ de la identidad con la propiedad de que ${g_1}^{-1} g_2 \in W$ siempre que $g_1, g_2 \in V$.
Como $g^{-1} h_i \longrightarrow e$, descartando un número finito de términos de la sucesión podemos asumir que $g^{-1} h_i \in V$ para todo $i$. Esto implica que

$${h_j}^{-1} h_i = (g^{-1} h_j)^{-1} (g^{-1} h_i) \in W$$

para todos los $i, j$. Fijando $j$ y haciendo $i \longrightarrow \infty$, encontramos ${h_j}^{-1} h_i \longrightarrow {h_j}^{-1} g \in \overline{W} \subset U$. Como $H \cap U$ es una slice, es cerrada en $U$ y por tanto ${h_j}^{-1} g \in H$, lo que implica $g \in H$. Así $H$ es cerrado. $\square$

El siguiente corolario es inmediato.

**Corolario 4.25.** *Si $G$ es un grupo de Lie y $H$ es cualquier subgrupo de $G$, son equivalentes:*

1. *$H$ es cerrado en $G$.*

2. *$H$ es un subgrupo de Lie encajado.*

## 4.7. Subálgebras de Lie y subgrupo de Lie.

Vimos que un subgrupo de Lie de un grupo de Lie nos da una subálgebra de su álgebra de Lie. En este apartado veremos que también es cierto a la inversa, cada subálgebra de Lie corresponde a algún subgrupo de Lie. Este resultado tendrá profundas consecuencias como veremos.

**Teorema 4.26.** *Supongamos que $G$ es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ es cualquier subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, entonces hay un único subgrupo de Lie conexo de $G$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{h}$ (bajo la identificación canónica del álgebra de Lie de un subgrupo con una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$).*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

La aplicación más importante del teorema anterior está en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 4.27.** *Supongamos que $G$ y $H$ son grupos de Lie con $G$ simplemente conexo, y sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie. Para cada homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, hay un único homomorfismo de grupos $\Phi : G \longrightarrow H$ tal que $\Phi_* = \varphi$.*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

**Corolario 4.28.** *Si $G$ y $H$ son grupos de Lie simplemente conexos con álgebras de Lie isomorfas, entonces $G$ y $H$ son Lie-isomorfas.*

*Demostración.* Se deduce de manera sencilla del teorema anterior. □

NOTA. Una versión de este teorema fue probada en el siglo XIX por Sophus Lie. Sin embargo, como las nociones topológicas globales como la conexión simple no habían sido formuladas todavía, lo que él fue capaz de probar fue esencialmente una versión local de este corolario.

Dos grupos de Lie $G$ y $H$ se dice que son *localmente isomorfos* si existen entornos de la identidad $U \in G$ y $V \in H$, y un difeomorfismo $F : U \longrightarrow V$ tal que $F(g_1 \cdot g_2) = F(g_1) \cdot F(g_2)$ siempre que $g_1, g_2 g_1 \cdot g_2$ estén en $U$.

**Teorema 4.29.** *Teorema fundamental de Sophus Lie.*
*Dos grupos de Lie son localmente isomorfos sí y solo sí tienen álgebras de Lie isomorfas.*

### 4.8. La correspondencia fundamental entre álgebras de Lie y grupos de Lie.

La mayoría de los resultados de este apartado nos muestran cómo propiedades esenciales de un grupo de Lie se reflejan en su álgebra de Lie. Esto nos lleva se manera natural a hacernos la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto es biyectiva la correspondencia entre grupos de Lie y sus álgebras de Lie (o al menos entre clases de isomorfismo)? Vimos que grupos de Lie isomorfos tienen álgebras de Lie isomorfas. Es fácil ver, sin embargo, que el recíproco es falso: $\mathbb{R}^n$ y $T^n$ tienen álgebras de Lie $n$ dimensionales, que son obviamente isomorfas, pero $\mathbb{R}^n$ y $T^n$ no son grupos de Lie isomorfos. Sin embargo, si restringimos nuestra atención a grupos de Lie simplemente conexos, entonces obtenemos una correspondencia biyectiva. El resultado central es el siguiente teorema.

**Teorema 4.30.** *Hay una correspondencia biyectiva entre la clase de isomorfismo de grupos de Lie de dimensión finita y las clases de isomorfismo de grupos de Lie simplemente conexos, asociando cada grupo de Lie simplemente conexo con su álgebra de Lie.*

*Demostración.* Es básicamente algebraica. Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

¿Qué ocurre cuando consideramos también los grupos no simplemente conexos? Como cada grupo de Lie tiene una cubierta que es un grupo de Lie simplemente conexo, la respuesta en el caso conexo es sencilla.

**Teorema 4.31.** *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Los grupos de Lie conexos cuyas álgebras de Lie son isomorfas a $\mathfrak{g}$ son (salvo isomorfismo) precisamente aquellas de la forma $G/\Gamma$, donde $G$ es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\Gamma$ es un subgrupo normal discreto de $G$.*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

## 5. ACCIONES DE GRUPO EN VARIEDADES

La importancia de los grupos de Lie reside primeramente de sus acciones en variedades. Sea $G$ un grupo de Lie y $M$ una variedad diferenciable. Una *acción a izquierda de $G$ en $M$* es una aplicación $G \times M \longrightarrow M$, a menudo escrita $(g, p) \mapsto g \cdot p$ que satisface:

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p$$
$$e \cdot p = p$$

Una *acción a derecha* se define análogamente como una aplicación $M \times G \longrightarrow M$ con la composición “trabajando.en orden inverso:

$$(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 g_2)$$

$$p \cdot e = p$$

Una variedad $M$ dotada con una $G$-acción específica ( a izquierda o a derecha), se llama $G$ *espacio*.

Algunas veces es útil dar un nombre a una acción, como $\theta : G \times M \longrightarrow M$, con la acción de un elemento del grupo $\mathfrak{g}$ en un punto : $\theta_g(p)$. En términos de esta notación, las condiciones para una acción a izquierda se leen:

$$\theta_{g_1} \cdot \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$$
$$\theta_e = Id_M$$

mientras que para una acción a derecha la primera ecuación es reemplazada por

$$\theta_{g_1} \cdot \theta_{g_2} = \theta_{g_2 g_1}$$

Para acciones a izquierda, generalmente usaremos las notaciones $g \cdot p$ y $\theta_g(p)$ indistintamente. La última notación es un poco más precisa, y es útil cuando es importante especificar la acción que se considere, mientras que la otra es a menudo más conveniente cuando se sobreentiende la acción. Para acciones a derecha la notación $p \cdot g$ es preferida generalmente a causa del modo en que ”trabaja”la composición.

Una acción a derecha siempre puede convertirse en una acción a izquierda mediante el truco de reemplazar $p \cdot g$ por $g^{-1} \cdot p$, así cualquier resultado sobre acciones a izquierda puede ser traducido a un resultado sobre acciones a derecha, y viceversa. Nosotros generalmente centraremos nuestra atención en acciones a izquierda, porque sus ecuaciones tienen la propiedad de que la multiplicación de elementos del grupo corresponde a la composición de funciones. Sin embargo, veremos que hay algunas circunstancias en que las acciones a derecha surgen de manera natural.

Introduzcamos ahora alguna terminología básica en torno a las acciones de un grupo de Lie.

Sea $\theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción a izquierda de un grupo de Lie $G$ en una variedad diferenciable $M$ (las definiciones serán análogas para acciones a derecha)

- La acción se dice que es *diferenciable*, si es diferenciable como aplicación de $G \times M$ en $G$, esto es, si $\theta_g(p)$ depende diferencialmente de $g$ y $p$. Si ese es el caso, entonces para cada $g \in G$, la aplicación $\theta_g : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo de $M$, con inversa $\theta_{g^{-1}}$

- Para cada $p \in M$, la *órbita de* $p$ bajo la acción es el conjunto $G \cdot p = \{g \cdot p; g \in G\}$, el conjunto de todas las imágenes de $p$ bajo elementos de $G$.

- La acción es *transitiva* si para cada dos puntos $p, q \in M$ hay un elemento del grupo $g$ tal que $g \cdot p = q$, o equivalentemente si la órbita de cualquier punto es $M$.

- Dado $p \in M$, el *grupo de isotropía de* $p$, denotado por $G_p$, es el conjunto de elementos $g \in G$ tales que fijan $p$.

$$G_p = \{g \in G; g \cdot p = p\}$$

- La acción se dice que es *libre* si el único elemento de $G$ que fija todos los elementos de $M$ es la identidad $e$: $g \cdot p = p$ para algún $p \Rightarrow g = e$. Esto es equivalente a la condición de que $G_p = e$ para cada $p \in M$

- La acción se dice que es *propia* si la aplicación $G \times M \longrightarrow M \times M$ dada por $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$ es una aplicación propia (es decir, la preimagen de cualquier conjunto compacto es compacto). Notar que esta condición no es la misma que la aplicación $G \times M \longrightarrow M$ que define la acción sea una aplicación propia.

EJEMPLOS DE ACCIONES DE GRUPOS DE LIE.

1. Un flujo global $\theta : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ es una $\mathbb{R}$-acción diferenciable. El grupo de isotropía de cualquier punto crítico de el campo vectorial es todo $\mathbb{R}$, mientras que el grupo de isotropía de un punto regular es el grupo trivial $\{0\}$.

2. La acción estándar de $GL(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ es la acción a izquierda dada por la multiplicación de matrices $(A, x) \mapsto Ax$, considerando $x \in \mathbb{R}^n$ como una matriz columna. Esta es una acción porque la multiplicación de matrices es asociativa: $(AB)x = A(Bx)$. Es diferenciable porque las componentes de $Ax$ dependen polinomialmente de las entradas de la matriz $A$ y las componentes de $x$. como cualquier vector nulo puede ser llevado a otro por una

transformación lineal, hay exactamente dos órbitas: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$

3. La restricción de la acción estándar a $O(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define una acción a izquierda diferenciable de $O(n,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$. En este caso, las órbitas son el origen y las esferas centradas en el origen. Para ver por qué, notemos que cualquier transformación lineal ortogonal preserva normas, por tanto $O(n)$ lleva la esfera de radio $R$ a si misma; por otro lado, cualquier vector de longitud $R$ puede ser llevado a otro por una matriz ortogonal (si $v$ y $v'$ son dichos vectores, completamos $\frac{v}{|v|}$ y $\frac{v'}{|v'|}$ hasta bases ortonormales y sean $A$ y $A'$ las matrices ortogonales cuyas columnas son estas bases ortonormales; es fácil comprobar que $A'A^{-1}$ lleva $v$ a $v'$).

4. Restringiendo la acción estándar a $O(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, obtenemos una acción transitiva de $O(n)$ en $S^{n-1}$. Es diferenciable porque $S^{n-1}$ es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^n$.

5. Cualquier grupo de Lie actúa diferencialmente, libremente y transitivamente en sí mismo por la traslación a izquierda o a derecha. Más generalmente, si $H$ es un subgrupo de Lie de $G$, entonces la restricción de la aplicación multiplicación a $H \times G \longrightarrow G$ define una acción a izquierda de $H$ en $G$, diferenciable y libre (pero no transitiva en general), de un modo similar, la restricción a $G \times H \longrightarrow G$ define una acción a derecha libre de $H$ en $G$.

6. Una acción de un grupo discreto $\Gamma$ en una variedad $M$ es diferenciable sí y solo sí para cada $g \in \Gamma$, la aplicación $p \mapsto g\cdot p$ es una aplicación diferenciable de $M$ en sí mismo. Así, por ejemplo, $bz^n$ actúa diferenciablemente en $\mathbb{R}^n$ por la traslación:
$$(m^1,\ldots,m^n)\cdot(x^1,\ldots,x^n) = (m^1+x^1,\ldots,m^n+x^n)$$

Ahora supongamos que $M$ y $N$ son ambos $G$-espacios (a izquierda o a derecha). Una aplicación diferenciable $F : M \longrightarrow N$ se dice que es *equivariante* con respecto a las $G$-acciones dadas si para cada $g \in G$,

$$F(g\cdot p) = g\cdot F(p) \text{ (para acciones a izquierda)}$$
$$F(p\cdot g) = F(p)\cdot g \text{ (para acciones a derecha)}$$

Equivalentemente, si $\theta$ y $\varphi$ son las acciones dadas en $M$ y $N$ respectivamente, $F$ es equivariante si el siguiente diagrama conmuta para cada $g \in G$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ \theta_g \Big\downarrow & & \Big\downarrow \varphi_g \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

EJEMPLO. Sean $G$ y $H$ grupos de Lie, y sea $F : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Hay una acción a izquierda natural de $G$ en sí mismo por la traslación a izquierda. Definimos una acción a izquierda $\theta$ de $G$ en $H$ por:

$$\theta_g(h) = F(g)h$$

Para comprobar que es una acción, observemos que

$$\theta_e(h) = F(e)h = h$$

$$\theta_{g_1} \cdot \theta_{g_2}(h) = F(g_1)(F(g_2)h) = (F(g_1)F(g_2))h = F(g_1g_2)h = \theta_{g_1g_2}(h)$$

porque $F$ es un homomorfismo.
Con respecto a estas $G$-acciones $F$ es equivariante porque

$$\theta_g \cdot F(g') = F(g)F(g') = F(gg') = F \cdot L_g(g')$$

El siguiente teorema es extremadamente útil para probar que ciertos conjuntos son subvariedades encajadas.

**Teorema 5.1.** *Sean $M$ y $N$ variedades diferenciables y sea $G$ un grupo de Lie. Supongamos $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable que es equivariante con respecto a $G$-acciones transitivas diferenciables en $M$ y cualquier $G$-acción diferenciable en $N$. Entonces $F$ tiene rango constante, por tanto sus level sets son subvariedades cerradas encajadas de $M$.*

*Demostración.* Sea $\theta$ y $\varphi$ las $G$-acciones en $M$ y $N$ respectivamente, y sea $p_0$ un punto de $M$. Para cada punto $p \in M$, elegimos $g \in G$ tal que $\theta_g(p_0) = p$. Como $\varphi_g \cdot F = F \cdot \theta_g$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_{p_0}M & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p_0)}N \\ \theta_{g*} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \varphi_{g*} \\ \theta_{g*} & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)}N \end{array}$$

Como las aplicaciones lineales verticales en este diagrama son isomorfismos, las horizontales tienen el mismo rango. En otras palabras, el rango de $F_*$ en un punto arbitrario $p$ es el mismo que su rango en $p_0$, por tanto $F$ tiene rango constante. $\square$

Aquí tenemos algunas aplicaciones del anterior teorema.

**Proposición 5.2.** *El núcleo de un homomorfismo de grupos de Lie es un subgrupo de Lie encajado cerrado de su dominio.*

*Demostración.* Sea $F : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie como en el último ejemplo que vimos. $F$ es equivariante con respecto a $G$-acciones adecuadas en $G$ y $H$. Como la acción en $G$ por traslación a izquierda es transitiva, se sigue que $F$ tiene rango constante, por tanto su núcleo $F^{-1}(0)$ es una subvariedad cerrada encajada. Es así un subgrupo de Lie por el lema 3.4. . $\square$

Como otra aplicación, describiremos algunos subgrupos de Lie importantes de $GL(n, \mathbb{C})$. Para cada matriz compleja $A$, sea $A^* = \bar{A}^t$. Observamos que $(AB)^* = (\overline{AB})^t = \bar{B}^t \bar{A}^t = B^* A^*$.
Consideremos los siguientes subconjuntos de $GL(n, \mathbb{C})$:

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}); \det A = 1\} \text{ (el grupo especial lineal complejo)}$$

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}); A^* A = I\} \text{ (el grupo unitario)}$$

$$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) \text{ (el grupo especial unitario)}$$

**Proposición 5.3.** *Los subgrupos $SL(n, \mathbb{C}), U(n)$ y $SU(n)$ son subgrupos de Lie cerrados encajados de $GL(n, \mathbb{C})$.*

*Demostración.* Se haría de forma muy parecida a la anterior proposición, definiendo aplicaciones diferenciables equivariantes adecuadas para cada caso. Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds $\square$

Notemos que esta técnica no nos dice la dimensión de los subgrupos de Lie en cuestión. Determinaremos estas dimensiones en el próximo apartado.

### 5.1. Cocientes de variedades por acciones de grupos.

Supongamos que un grupo $G$ actúa en una variedad $M$ (a la izquierda). El conjunto de órbitas de $G$ en $M$ se denota $M/G$; con la topología cociente, se llama el *espacio de órbitas* de la acción. Alternativamente, $M/G$ es el espacio cociente de $M$ determinado por la relación de equivalencia $p_1\ p_2$ sí y solo sí existe $g \in G$ tal que $g \cdot p_1 = p_2$.
Es de gran importancia determinar condiciones bajo las cuales un espacio de órbitas es una variedad diferenciable.
Un ejemplo simple pero importante a tener en cuenta es la acción de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ de traslación en la variable $y$:

$$\theta_t(x, y) = (x, y + t).$$

Las órbitas son las líneas paralelas al eje $y$, y el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}$. La aplicación cociente $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ es una submersión diferenciable.
El siguiente teorema nos da una condición general suficiente para que el cociente de una variedad diferenciable por una acción de grupo sea una variedad diferenciable.

**Teorema 5.4.** *Teorema del cociente de variedades*
*Supongamos que un grupo de Lie $G$ actúa diferenciablemente, libremente y propiamente en una variedad diferenciable $M$. Entonces el espacio de órbitas $M/G$ es una variedad topológica de dimensión igual a $dimM - dimG$, y tiene una única estructura diferenciable con la propiedad de que la aplicación cociente $\pi : M \longrightarrow M/G$ es una submersión diferenciable.*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

Para probar la parte de unicidad del teorema seria necesario probar el lema siguiente, que también tiene otros muchos usos.
Recordemos que una *sección* de una aplicación suprayectiva $\pi : M \longrightarrow N$ es una aplicación $\sigma : N \longrightarrow M$ tal que $\pi \cdot \sigma = Id_N$.
Una *sección local* es una aplicación continua $\sigma : U \longrightarrow M$ definida en un conjunto abierto $U \subset N$ que satisface la relación $\pi \cdot \sigma = Id_U$.

**Lema 5.5.** *Existencia de secciones locales.*
*Supongamos que $\pi : M \longrightarrow N$ es una submersión diferenciable. Dado un punto $q \in N$ y un punto $p \in \pi^{-1}(q)$, existe un entorno $U$ de $q$ y una sección local $\sigma : U \longrightarrow M$ tal que $\sigma(q) = p$.*

*Demostración.* Como una submersión tiene rango constante por el teorema del rango podemos elegir coordenadas $(x^1, \ldots, x^m)$ centradas en $p$ y $(y^1, \ldots, y^k)$ centradas en $q$ en las que $\pi$ tiene la representación coordenada $\pi(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k)$. La aplicación $\sigma(x^1, \ldots, x^k) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$ es la sección local deseada. □

No siempre es obvio decir si una acción dada es propia. La siguiente caracterización alternativa de propia acciones es a menudo útil.

**Lema 5.6.** *Supongamos que un grupo de Lie actúa diferenciablemente en una variedad diferenciable $M$. La acción es propia sí y solo sí para cada subconjunto compacto $K \subset M$, el conjunto*

$$G_K = \{g \in G; g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

*es compacto.*

*Demostración.* Sea $\bar{\theta} : G \times M \longrightarrow M \times M$ la aplicación $\bar{\theta}(g, p) = (g \cdot p, p)$. Supongamos primero que $\bar{\theta}$ es propia. Entonces para cada conjunto compacto $K \subset M$, es fácil comprobar que $G_K$ es un subconjunto cerrado de $\pi_G(\bar{\theta}^{-1}(K \times K))$, donde $\pi_G : G \times M \longrightarrow G$ es la proyección. Así $G_K$ es compacto.
A la inversa, supongamos que $G_K$ es compacto para cada conjunto compacto $K \subset M$. Si $L \subset M \times M$ es compacto, sea $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L) \subset M$, donde $\pi_1, \pi_2 : M \times M \longrightarrow M$ son las proyecciones en la primera y segunda componente respectivamente. Entonces

$$\bar{\theta}^{-1}(L) \subset \bar{\theta}^{-1}(K \times K) \subset \{(g, p); g \cdot p \in K \text{ y } p \in K\} \subset G_K \times K$$

Como $\bar{\theta}^{-1}(L)$ es cerrado por continuidad, es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $G_K \times K$ y es así compacto. $\square$

Un caso especial en el que la condición es automática es cuando el grupo es compacto.

**Corolario 5.7.** *Supongamos que un grupo de Lie compacto $G$ actúa diferenciablemente y libremente en una variedad diferenciable $M$. Entonces el espacio de órbitas $M/G$ es una variedad diferenciable y $\pi : M \longrightarrow M/G$ es una submersión.*

*Demostración.* Para cada conjunto compacto $K \subset M$, el conjunto $G_K$ es obviamente cerrado en $G$ y de esta forma compacto. $\square$

## 6. VARIEDADES CUBRIDORAS

Como primera aplicación de la teoría de acciones de grupos en variedades, estudiaremos propiedades de espacios cubridores de variedades difereneciables.
Recordemos la noción de *cubierta entre espacios topológicos*: es una aplicación continua, suprayectiva $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ entre espacios conexos y localmente arcoconexos, con la propiedad de que cada punto $p \in M$ tiene un entorno $U$ tal que cada componente de $\pi^{-1}(U)$ se aplica homeomórficamente en $U$ por $\pi$.

En el contexto de variedades diferenciables, es útil introducir un tipo ligeramente más restrictivo de cubiertas.
Si $\widetilde{M}$ y $M$ son variedades diferenciables conexas, una *cubierta diferenciable* $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ es una aplicación diferenciable suprayectiva con la propiedad de que cada $p \in M$ tiene un entorno $U$(entorno elemental) tal que cada componente de $\pi^{-1}(U)$ es aplicada difeomórficamente en $U$ por $\pi$.
Una cubierta diferenciable es, en particular, una cubierta en el sentido topológico. Sin embargo, es importante tener en mente que una cubierta diferenciable es más

que una cubierta que sea diferenciable como aplicación. La definición de cubierta diferenciable requiere además que la restricción de $\pi$ a cada componente sea un difeomorfismo, no simplemente un homomorfismo diferenciable. Es fácil comprobar que una cubierta entre variedades diferenciables es una cubierta diferenciable sí y solo sí es un difeomorfismo local.

**Proposición 6.1.** *Propiedades de cubiertas diferenciables.*
*Sea* $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ *una cubierta diferenciable.*

1. $\pi$ *es un difeomorfismo local, una submersión y una aplicación abierta.*

2. *Si* $\pi$ *es inyectiva, es un difeomorfismo.*

3. *Para cada* $p \in \widetilde{M}$*, hay un entorno* $U$ *de* $q = \pi(p)$ *en* $M$ *y una sección local diferenciable* $\sigma : M \to \widetilde{M}$ *tal que* $\sigma(q) = p$.

*Demostración.* Sencilla $\square$

**Proposición 6.2.** *Sea* $M$ *una variedad diferenciable y* $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ *una cubierta (topológica), entonces* $\widetilde{M}$ *tiene una única estructura tal que* $\pi$ *es una cubierta diferenciable.*

*Demostración.* Como $\pi$ es un homomorfismo local, $\widetilde{M}$ es localmente euclideo.Veamos que es Hausdorff:
Sean $p$ y $q$ puntos distintos de $\widetilde{M}$.

1. Si $\pi(p) = \pi(q)$ y $U \subset M$ es un entorno elemental que contiene a $\pi(p)$, entonces las componentes de $\pi^{-1}(U)$ que contienen a $p$ y $q$ son abiertos disjuntos en $\widetilde{M}$ que separan $p$ y $q$.
2. Si $\pi(p) \neq \pi(q)$ , entonces existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ que contienen a $p$ y $q$ respectivamente y $\pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(V)$ son abiertos en $\widetilde{M}$ que separan $p$ y $q$.

Veamos que $\widetilde{M}$ es $II$- numerable El conjunto de las fibras de $\pi$ es contable (ya que el grupo fundamental de M es contable y actua transitivamente sobre cada fibra). Luego, si $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base contable para la topología de $M$ entonces el conjunto de componentes de $\pi^{-1}(U_i)$ cuando $i$ recorre $\mathbb{N}$ es una base contable para la topología de $\widetilde{M}$.

Cualquier punto $p \in M$ tiene un entorno elemental $U$ que es el dominio de una carta $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Tomando $\widetilde{U}$ una componente de $\pi^{-1}(U)$ y $\widetilde{\varphi} := \varphi \circ \pi : \widetilde{U} \longrightarrow$

$\mathbb{R}^n$, $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ es una carta de $\widetilde{M}$. Además, si dos cartas $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ y $(\widetilde{V},\widetilde{\psi})$ se solapan $\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1} = (\psi\circ\pi|_{\widetilde{U}\cap\widetilde{V}})\circ(\varphi\circ\pi|_{\widetilde{U}\cap\widetilde{V}})^{-1} = \psi\circ\pi|_{\widetilde{U}\cap\widetilde{V}}\circ\pi|\widetilde{U}\cap\widetilde{V}^{-1}\circ\varphi^{-1} = \psi\circ\varphi^{-1}$ que es diferenciable.
Luego la colección de todas las cartas asi definidas, dota a $\widetilde{M}$ de una estructura de variedad diferenciable que ademas es única. □

## 6.1. El grupo de cubiertas.

La anterior proposición nos muestra que cualquier cubierta de una variedad diferenciable es también una variedad diferenciable. Es a menudo importante saber cuándo un espacio cubierto por una variedad diferenciable es él mismo una variedad diferenciable. Para entender la respuesta a esta cuestión necesitamos estudiar el grupo de cubiertas de un espacio cubridor.

Sean $\widetilde{M}$ y $M$ espacios topológicos, y sea $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ una cubierta. Una *transformación de cubiertas de* $\pi$ es un homeomorfismo $\varphi : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ tal que $\pi\cdot\varphi = \pi$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \widetilde{M} \\ \pi\searrow & & \swarrow\pi \\ & M & \end{array}$$

El conjunto $\mathcal{C}_\pi(\widetilde{M})$ de todas las transformaciones de cubiertas, llamado *grupo de cubiertas de* $\pi$, es un grupo bajo la composición, que actúa en $\widetilde{M}$ a la izquierda. El grupo de cubiertas es la llave para construir variedades diferenciables cubiertas por $\widetilde{M}$.

Veremos que para una cubierta diferenciable $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$, el grupo de cubiertas actúa diferenciablemente, libremente, y propiamente en el espacio cubridor $\widetilde{M}$. Antes, es útil que veamos una caracterización alternativa de ser acción propia para acciones de grupos discretos.

**Lema 6.3.** *Supongamos que un grupo discreto* $\Gamma$ *actúa continuamente en una variedad topológica* $\widetilde{M}$ *La acción es propia sí y solo sí se mantiene la siguiente condición:*
*Dos puntos cualesquiera* $p, p' \in \widetilde{M}$ *tienen entornos* $U, U'$ *tales que el conjunto* $\{g\in\Gamma; (g\cdot U)\cap U'\} \neq \emptyset$ *es finito.*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

Una acción de grupo discreta que satisface la condición anterior del lema se llama *propiamente discontinua* en la mayoría de los libros de geometría diferencial, pero evitaremos usar esta terminología y lo llamaremos con el término más general " *acción propia*".

**Proposición 6.4.** *Sea* $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ *una cubierta diferenciable. Con la topología discreta, el grupo de cubiertas* $\mathcal{C}_\pi(\widetilde{M})$ *es un grupo de Lie cero-dimensional que actúa en* $\widetilde{M}$ *diferenciablemente, libremente y propiamente en* $\widetilde{M}$*.*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

Usando el teorema de variedades cociente, podríamos probar el siguiente inverso a la proposición.

**Teorema 6.5.** *Supongamos que* $\widetilde{M}$ *es una variedad diferenciable, y un grupo de Lie discreto* $\Gamma$ *actúa diferenciablemente, libremente y de forma propiamente discontinua en* $\widetilde{M}$*. Entonces* $\widetilde{M}/\Gamma$ *es una variedad topológica y tiene una única estructura diferenciable tal que* $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ *es una cubierta diferenciable.*

*Demostración.* Ver John M. Lee : Introduction to smooth manifolds □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema previo.

**Corolario 6.6.** *Supongamos* $\pi_1 : \widetilde{M} \longrightarrow M_1$ *y* $\pi_2 : \widetilde{M} \longrightarrow M_2$ *son cubiertas diferenciables que hacen las mismas identificaciones (es decir,* $\pi_1(p) = \pi_1(p')$ *sí y solo sí* $\pi_2(p) = \pi_2(p')$*). Entonces hay un único difeomorfismo* $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ *tal que* $\varphi \cdot \pi_1 = \pi_2$*.*

## 6.2. Cocientes de grupos de Lie.

Otra aplicación importante del teorema de cocientes de variedades está en los cocientes de grupos de Lie por subgrupos de Lie.
Sea $G$ un grupo de Lie y sea $H \subset G$ un subgrupo de Lie. Si $H$ actúa en $G$ por traslación a izquierda, entonces un elemento del espacio de órbitas es la órbita de un elemento $g \in G$, que es un conjunto de la forma $gH = \{gh; h \in H\}$.
Usaremos la notación $G/H$ para denotar el espacio de órbitas por esta acción a izquierda.

**Teorema 6.7.** *Sea* $G$ *un grupo de Lie y sea* $H$ *un subgrupo de Lie de* $G$ *cerrado. La acción de* $H$ *en* $G$ *por traslación a derecha es diferenciable, libre y propia. Así* $G/H$ *es una variedad diferenciable y la aplicación cociente* $\pi : G \longrightarrow G/H$ *es una submersión diferenciable.* [1]

[1] Notar que para este teorema, aplicando el teorema del subgrupo cerrado bastaría con ver que el subgrupo $H$ es topológicamente cerrado en $G$.

*Demostración.* Ya observamos que $H$ actúa diferenciablemente y libremente en $G$. Para ver que la acción es propia, sea $\bar{\theta} : G \times H \longrightarrow G \times G$ la aplicación $\bar{\theta}(g,h) = (gh, g)$ y supongamos $L \subset G \times G$ es un conjunto compacto. Si $\{(g_i, h_i)\}$ es una sucesión en $\bar{\theta}^{-1}(L)$, entonces, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que las sucesiones $\{g_i h_i\}$ y $\{g_i\}$ convergen. Por continuidad, $h_i = {g_i}^{-1}(g_i h_i)$ converge a un punto en $G$, y como $H$ es cerrado en $G$ se sigue que $\{(g_i, h_i)\}$ converge en $G \times H$. □

Un *subgrupo discreto de un grupo de Lie* es un subgrupo que es un conjunto discreto en el subespacio topológico ( y así un subgrupo de Lie encajado cero-dimensional).
El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de los teoremas que hemos visto.

**Corolario 6.8.** *Sea $G$ un grupo de Lie, y sea $\Gamma \subset G$ un subgrupo discreto. Entonces la aplicación cociente $\pi : G \longrightarrow G/\pi$ es una cubierta diferenciable.*

### 6.3. Espacios homogéneos.

Uno de los tipos más interesantes de acciones de grupos es aquel en el que un grupo actúa transitivamente. Una variedad diferenciable dotada con una acción transitiva diferenciable por un grupo de Lie $G$ se llama *$G$-espacio homogéneo*, o simplemente *espacio homogéneo* si se sobreentiende el grupo.
Si la acción de grupo preserva algunas propiedades de la variedad (como distancias en alguna métrica o un tipo de curvas como las líneas rectas en el plano...), entonces el hecho de que la acción sea transitiva significa que la acción“parece lo mismo.en cualquier lugar desde el punto de vista de esta propiedad. A menudo, los espacios homogéneos son modelos para varios tipos de estructuras geométricas, y como tales, juegan un papel central en muchas áreas de la geometría diferencial.

EJEMPLOS.

1. El grupo $SL(2,\mathbb{R})$ actúa diferenciablemente y transitivamente en el semiplano superior $H = \{z \in \mathbb{C}; Imz > 0\}$ por la fórmula

$$A \cdot z = \tfrac{az+b}{cz+d}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Las transformaciones resultantes de $H$ se llaman *transformaciones de Möbius*

2. Si $G$ es un grupo de Lie y $H$ es un subgrupo de Lie cerrado, define una acción a izquierda de $G$ en $G/H$ por

$$g_1 \cdot (g_2 H) = (g_1 \cdot g_2)H$$

Esta acción es también diferenciable y transitiva.

Este último ejemplo toma especial importancia porque, como el siguiente teorema muestra, todo espacio homogéneo es equivalente a uno de ese tipo.

**Teorema 6.9.** *Teorema de caracterización de espacios homogéneos.*
*Sea $M$ un $G$-espacio homogéneo, y sea $p$ un punto de $M$. Entonces el grupo de isotropía $G_p$ es un subgrupo de Lie cerrado de $G$ y la aplicación $F : G/G_p \longrightarrow M$ dada por $F(gG_p) = g \cdot p$ es un difeomorfismo equivariante.*

*Demostración.* Para simplificar llamemos $H = G_p$.
Primero veamos que $H$ es un subgrupo de Lie cerrado. Definimos una aplicación $\Phi : G \longrightarrow M$ por $\Phi(g) = g \cdot p$. Esta aplicación es diferenciable (obvio) y $H = \Phi^{-1}(p)$. Observamos que

$$\Phi(g'g) = (g'g) \cdot p = g'(g \cdot p) = g' \cdot \Phi(g)$$

por tanto $\Phi$ es equivariante con respecto a la acción de $G$ en sí mismo por multiplicación a izquierda y la $G$-acción en $M$ dada. Eso implica que $H$ es una subvariedad cerrada encajada de $G$ y por tanto un subgrupo de Lie cerrado.
Para ver que $F$ está bien definida, supongamos que $g_1 H = g_2 H$, lo que significa que ${g_1}^{-1} g_2 \in H$. Escribamos $h = {g_1}^{-1} g_2$, vemos que

$$F(g_2 H) = g_2 \cdot p = g_1 h \cdot p = g_1 \cdot p = F(g_1 H)$$

También, $F$ es equivariante, porque

$$F(g'gH) = (g'g) \cdot p = g' F(gH)$$

Ahora comprobemos que $F$ es diferenciable. Dado un punto $g_0 H \in G/H$, podemos elegir un entorno $U$ de $g_0 H$ en el cual existe una sección local diferenciable $\sigma : U \longrightarrow G$ tal que $\sigma(g_0 H) = g_0$. Entonces en $U$ tenemos $F(gH) = G \cdot p = \Phi \cdot \sigma(g)$. Así $F$ es diferenciable.
Veamos ahora que $F$ es biyectiva. Dado un punto $q \in M$, hay un elemento del grupo $g \in G$ tal que $F(gH) = g \cdot p = q$ por transitividad. Por otro lado, si $F(g_1 H) = F(g_2 H)$, entonces $g_1 \cdot p = g_2 \cdot p$ implica ${g_1}^{-1} g_2 \cdot p = p$, por tanto ${g_1}^{-1} g_2 \in H$, lo que implica $G_1 H = g_2 H$.
El hecho de que $F$ sea inyectiva implica que es una inmersión: si el rango de $F_*$ fuera menor que la dimensión de $G/H$, entonces la imagen de $F$ tendría medida nula.

Por tanto $F$ es una inmersión biyectiva entre variedades de la misma dimensión, y por tanto es un difeomorfismo. $\square$

Este teorema nos muestra que el estudio de espacios homogéneos puede reducirse al problema algebraico de estudiar los subgrupos de Lie cerrados de grupos de Lie. A causa de esto, algunos autores definen un espacio homogéneo como una variedad de la forma $G/H$, donde $G$ es un grupo de Lie y $H$ es un subgrupo de Lie cerrado de $G$.
Una aplicación muy útil de este teorema es poner estructuras diferenciables en conjuntos que admiten acciones de grupos de Lie transitivas. Esto nos lleva a una gran cantidad de nuevos ejemplos de variedades.

**Proposición 6.10.** *Sea $X$ un conjunto con una acción transitiva de un grupo de Lie $G$ en $X$, tal que el grupo de isotropía de un punto $p \in X$ es un subgrupo de Lie cerrado de $G$. Entonces $X$ tiene una única estructura de variedad topológica y diferenciable tal que la acción dada es diferenciable.*

*Demostración.* Sea $H$ el grupo de isotropía de $p$, por tanto, como vimos $G/H$ es una variedad diferenciable. La aplicación $F : G/H \longrightarrow X$ definida por $F(gH) = g \cdot p$ es una biyección equivariante por exactamente el mismo argumento que usamos en la demostración del anterior teorema (ya que dicha parte no usa el hecho de que $M$ sea una variedad). Si definimos una estructura topológica y diferenciable en $X$ diciendo que $F$ sea un difeomorfismo, entonces la acción dada de $G$ en $X$ es diferenciable porque puede ser escrita como $(g, x) \mapsto F(g \cdot F^{-1}(x))$.
Si $\widetilde{X}$ denota X con cualquier estructura de variedad diferenciable tal que la acción dada sea diferenciable, entonces por el teorema de caracterización, $\widetilde{X}$ es equivariantemente difeomorfa a $G/H$ y por tanto a $X$, luego la estructura topológica y diferenciable es única. $\square$

EJEMPLO: GRASSMANIANAS. Sea $G(k, n)$ el conjunto de subespacios $k$-dimensionales de $\mathbb{R}^n$. El grupo ortogonal lineal $GL(n, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en $G(k, n)$: dados dos subespacios $A$ y $A'$, elegimos bases para ambos subespacios y los extendemos a bases de $\mathbb{R}^n$, y entonces la transformación lineal que lleva la primera base a la segunda lleva también $A$ a $A'$. El grupo de isotropía del subespacio $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ es

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} ; A \in GL(k, \mathbb{R}), D \in GL(n-k, \mathbb{R}), B \in M_{k(n-k)}(\mathbb{R}) \right\}$$

que es un subgrupo de Lie cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$. Entonces $G(k, n)$ tiene una única estructura de variedad diferenciable que hace la acción natural de $GL(n, \mathbb{R})$

diferenciable. Con esta estructura diferenciable, $G(k,n)$ se llama *variedad Grassmaniana* o simplemente *Grassmaniana*.

## 7. LA REPRESENTACIÓN ADJUNTA

**Teorema 7.1.** *Sea $\theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción de $G$ en $M$ a la izquierda. Sea $p_0 \in M$ un punto fijo, es decir, $\theta_g(p_0) = p_0$ para cada $g \in G$. Entonces la aplicación*

$$\psi : G \longrightarrow Aut(T_{p_0}M)$$

*definida por*

$$\psi(g) = d\theta_g|_{T_{p_0}M}$$

*es una representación de $G$.*

*Demostración.* $\psi$ es un homomorfismo por

$$\psi(gg') = d\theta_{gg'}|_{T_{p_0}M} = d(\theta_g\theta_{g'})|_{T_{p_0}M} = \psi(g)\psi(g')$$

Sólo queda por probar que $\psi$ es $\mathcal{C}^\infty$. Para ello es suficiente probar que $\psi$ compuesto con una función coordenada arbitraria en $Aut(T_{p_0}M)$ es $\mathcal{C}^\infty$.
Se obtiene un sistema coordenado en $Aut(T_{p_0}M)$ eligiendo una base para $T_{p_0}M$ y usando esa base para identificar $Aut(T_{p_0})$ con las matrices no singulares.
Se obtiene la matriz asociada con un elemento de $Aut(T_{p_0}M)$ aplicando este elemento a la base de $T_{p_0}M$ y entonces aplicando la base dual. Por tanto es suficiente probar que si $v_0 \in T_{p_0}M$ y si $\alpha \in T_{p_0}M^*$, entonces

$$g \mapsto \alpha(d\theta_g(v_0))$$

es una función $\mathcal{C}^\infty$ en $G$. Por lo anterior es suficiente probar que

$$g \mapsto d\theta_g(v_0) \tag{7.1}$$

es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ de $G$ en $T_{p_0}M$, o equivalentemente, que (7,1) es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ de $G$ en $TM$. Pero (7,1) es exactamente la composición de aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$.

$$G \longrightarrow TG \times TM \longrightarrow T(G \times M) \longrightarrow TM$$

en la cual la primera aplicación envía $g \mapsto ((g,0),(p_0,v_0))$, la segunda aplicación es el difeomorfismo canónico de $TG \times TM$ con $T(G \times M)$ y la tercera la aplicación es $d\theta$. Así $\psi$ es $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Un grupo de Lie actúa en sí mismo a la izquierda por automorfismos internos:

$$a : G \times G \longrightarrow G \quad a(g,g') = gg'g^{-1} = a_g(g')$$

La identidad es un punto fijo de dicha acción. De aquí, por el teorema anterior, la aplicación

$$g \mapsto da_g|_{G_e} \cong \mathfrak{g}$$

es una representación de $G$ en $Aut(\mathfrak{g})$, se le llama *la representación adjunta* y se denota por

$$Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$$

Denotamos la diferencial de la representación adjunta por $ad$, denotamos $Ad(g)$ por $Ad_g$ y $ad(X)$ por $ad_X$.
Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) \\ \exp\Big\uparrow & & \Big\uparrow\exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \end{array}$$

También, tendríamos aplicando lo mismo al automorfismo $a_0$ de $G$:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a_0} & G \\ \exp\Big\uparrow & & \Big\uparrow\exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

En otras palabras, $\exp tAd_g(X) = g(\exp tX)g^{-1}$.
En el caso especial en que $G = Aut(V)$ los diagramas anteriores se convierten en:

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{Ad} & Aut(End(V)) \\ \exp\Big\uparrow & & \Big\uparrow\exp \\ End(V) & \xrightarrow{ad} & End(End(V)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{a_B} & Aut(V) \\ \exp\Big\uparrow & & \Big\uparrow\exp \\ End(V) & \xrightarrow{Ad_B} & End(V) \end{array}$$

donde $B \in Aut(V)$.
Si además $C \in End(V)$, entonces $Ad_B(C) = B \cdot C \cdot B^{-1}$

En el caso en que $G = GL(n, \mathbb{R})$ ( o $GL(n, \mathbb{C})$), $B \in GL(n, \mathbb{R})$ y $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, entonces $Ad_B(C) = B \cdot C \cdot B^{-1}$

**Proposición 7.2.** *Sea $G$ un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y sean $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces*

$$ad_X Y = [X, Y]$$

*Demostración.* Ver Warner ; pág. 115 □

**Teorema 7.3.** *Sea $A \in G$ un subgrupo de Lie conexo de un grupo de Lie $G$ conexo. Entonces $A$ es un subgrupo normal de $G$ sí y solo sí el álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ de $A$ es un ideal en $\mathfrak{g}$*

*Demostración.* Ver Warner; pág.115 □

**Centro de $\mathfrak{g}$:** $:= \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}\}$
**Centro de $G$:** $:= \{g \in G; gg' = g'g$ para todo $g' \in G\}$

**Teorema 7.4.** *Sea $G$ un grupo de Lie conexo. Entonces el centro de $G$ es el núcleo de representación adjunta.*

*Demostración.* Ver Warner; pág.116 □

**Corolario 7.5.** *Sea $G$ un grupo de Lie conexo. Entonces el centro de $G$ es un subgrupo de Lie cerrado de $G$ con álgebra de Lie el centro de $\mathfrak{g}$.*

**Corolario 7.6.** *Un grupo de Lie conexo $G$ es abeliano sí y solo sí su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana.*

**Proposición 7.7.** *Si $X, Y$ pertenecen al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie $G$. Entonces*

$$[X, Y] = 0 \Rightarrow exp\ (X + Y) = exp\ X \cdot exp\ Y$$

*Demostración.* Ver Warner; pág. 116 □