NOTAS DE COHOMOLOGÍA DE HACES

ENRIQUE ARTAL BARTOLO

Versión 0.3

RESUMEN. El objetivo de estas notas es tratar de ordenar las ideas a tratar en el curso de doctorado, complementando los libros de Grauert-Remmert [2] y Godement [1].

1. Definición de haces

Comenzamos esta sección de forma poco habitual en la teoría de haces.

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Un *haz* sobre X es un par $(\mathfrak{F}, \pi)$, donde $\mathfrak{F}$ es un espacio topológico y $\pi : \mathfrak{F} \to X$ es un homeomorfismo local. Dado $x \in X$, llamaremos a $\mathfrak{F}_x := \pi^{-1}(x)$ la *fibra* sobre x. Si no hay ambigüedad identificaremos el haz con $\mathfrak{F}$. Un *homomorfismo* φ *de haces* entre $(\mathfrak{F}_1, \pi_1)$ y $(\mathfrak{F}_2, \pi_2)$ es una aplicación $\varphi : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2$ tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ (observemos que es un homeomorfismo local); un *subhaz* $\mathfrak{F}_1$ es un subespacio de $\mathfrak{F}$ tal que $\pi_{|\mathfrak{F}_1}$ es un haz y la inclusión es un homomorfismo de haces (es necesario y suficiente que $\mathfrak{F}_1$ sea abierto de $\mathfrak{F}$).

Tal cual está definido se dice que se trata de un *haz de conjuntos*.

Definición 1.2. Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre X y sea $Y \subset X$. Una *sección* sobre Y es una aplicación continua $s : Y \to \mathfrak{F}$ tal que $\forall y \in Y$, $\pi(s(y)) = y$. Si Y es abierto, también lo es $s(Y)$ y s es un homeomorfismo sobre la imagen.

Ejemplos 1.3. Primero veremos ejemplos inesenciales y más adelante entraremos en el verdadero objeto de estudio.

1. Cualquier cubierta o la inclusión de un abierto.
2. Sea X un espacio topológico y A un espacio topológico discreto: $X \times A$ es un haz sobre X llamado *haz trivial de fibra* A. Si un haz es isomorfo a $X \times A$ se dice *trivializable* y el isomorfismo es una *trivialización*.
3. Sean $\mathbb{S}^2$ la esfera de dimensión 2 y $\tau : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ la aplicación antipodal; recordemos que $\mathbb{S}^2/\tau = \mathbb{RP}^2$. Consideremos el haz $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ con la topología

---

Fecha: 9 de marzo del 2000.

Es posible encontrar la última versión de este texto (si ha dado tiempo a actualizar) en `http://riemann.unizar.es`.

discreta). Sea $\tilde{\tau} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, dada por $\tilde{\tau}(x,t) := (\tau(x), -t)$. Es fácil ver que $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})/\tilde{\tau}$ es un haz no trivializable de $\mathbb{RP}^2$ y de fibra $\mathbb{R}$.

4. Sean $(\mathfrak{F}_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$, dos haces. El *producto fibrado* de ambos es $\mathfrak{F} := \{(u,v) \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \mid \pi_1(u) = \pi_2(v)\}$. Por definición es posible definir $\pi : \mathfrak{F} \to X$, que es claramente continua. Es fácil ver que π es un homeomorfismo local por lo que $\mathfrak{F}$ es un haz; dado $x \in X$, $\mathfrak{F}_x = (\mathfrak{F}_1)_x \times (\mathfrak{F}_2)_x$. Denotaremos $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_1 \times_X \mathfrak{F}_2$.

Lo realmente interesante es cuando las fibras tienen una estructura suplementaria.

Definición 1.4. Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre X.

1. Un *magma* es un conjunto A con una operación binaria $\mu : A \times A \to A$ que denotaremos $a \cdot b$, $\forall a, b \in A$. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *haz de magmas* si $\forall x \in X$, $\mathfrak{F}_x$ es un magma y la aplicación $\mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ dada por $(u,v) \to u \cdot v$ es continua.
2. Un *semigrupo* A es un magma con operación asociativa. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *haz de semigrupos* si lo es de magmas y $\forall x \in X$, $\mathfrak{F}_x$ es un semigrupo.
3. Un *monoide* A es un semigrupo con identidad. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *haz de monoides* si lo es de semigrupos, $\forall x \in X$, $\mathfrak{F}_x$ es un monoide de identidad e_x y la aplicación $e : X \to \mathfrak{F}$, $e(x) := e_x$ es una sección.
4. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *haz de grupos* si $\forall x \in X$, $\mathfrak{F}_x$ es un grupo y la aplicación $\mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ dada por $(u,v) \to u \cdot v^{-1}$ es continua. Observemos que:
   (a) Como cada fibra es un grupo es no vacía. Así dado $x \in X$ podemos encontrar $V \subset X$ entorno abierto de x y $s : V \to \mathfrak{F}$ sección local de $\mathfrak{F}$. Por tanto la composición
   $$V \to \mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F},$$
   dada por $y \mapsto (y,y) \mapsto y \cdot y^{-1} = e_y$, es continua. Por tanto la aplicación $e : X \to \mathfrak{F}$, $e(x) := e_x$ es una sección.
   (b) Así la composición $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, dada por
   $$u \mapsto (e_{\pi(u)}, u) \mapsto u^{-1}$$
   es continua.
   (c) Y también lo es la composición $\mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \times_X \mathfrak{F}$ dada por $(u,v) \mapsto (u, v^{-1}) \mapsto u \cdot v$.
5. De la misma forma se definen haces de anillos, cuerpos, espacios vectoriales, álgebras,...

6. Sea $\mathcal{A}$ un haz de anillos sobre X. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un $\mathcal{A}$-módulo si es un haz de grupos abelianos tal que $\forall x \in X$ $\mathfrak{F}_x$ es un $\mathcal{A}_x$-módulo y la aplicación $\mathcal{A} \times_X \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, dada por $(a, u) \mapsto a \cdot u$, es continua. Si $\mathcal{A}$ es el haz trivial de base un anillo A, también diremos que $\mathfrak{F}$ es un haz de A-módulos.

2. Prehaces y haces canónicos

Sea X un espacio topológico.

Definición 2.1. Un *prehaz* $\mathfrak{F}$ sobre X consiste en asignar a cada abierto $U \subset X$ un conjunto $\mathfrak{F}(U)$ y a cada par de abiertos $U, V \subset X$ tal que $U \subset V$ una aplicación $r_{U,V} : \mathfrak{F}(V) \to \mathfrak{F}(U)$ (llamada *restricción*) de forma que si tenemos tres abiertos $U \subset V \subset W$, se cumple $r_{U,W} = r_{U,V} \circ r_{V,W}$. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *prehaz con una estructura suplementaria* si todos los conjuntos $\mathfrak{F}(U)$ la poseen y las restricciones son morfismos para ellas. Se definen de forma natural los *homomorfismos de haces*. Si $\mathfrak{F}$ es un prehaz de grupos abelianos, supondremos siempre que $\mathfrak{F}(\emptyset) = \{0\}$.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre X. El prehaz asociado a $\mathfrak{F}$ consiste en asociar a cada abierto U de X el conjunto $\mathfrak{F}(U)$ de las secciones $s : U \to X$; dados $U \subset V$ abiertos, $r_{U,V}$ es la restricción de aplicaciones. Si el haz tiene alguna estructura suplementaria, también la tendrá el prehaz. Un homomorfismo de haces da lugar de manera funtorial a un homomorfismo de haces asociados.

Ejemplo 2.3. Dado U abierto de X, definimos $\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}(U)$ como el conjunto de funciones continuas $U \to \mathbb{R}$. Con las restricciones habituales tenemos un prehaz. Se trata de un prehaz de $\mathbb{R}$-álgebras con unidad.

Definición 2.4. Dado $x \in X$ y $\mathfrak{F}$ prehaz de X, llamaremos *conjunto de gérmenes* de $\mathfrak{F}$ en x a:

$$\mathfrak{F}_x := \varprojlim_{U} \mathfrak{F}(U),$$

donde U recorre los abiertos de X. Es decir, si $\mathcal{V}_x$ es el conjunto de entornos abiertos de x

$$\mathfrak{F}_x = \left(\coprod_{U \in \mathcal{V}_x} \mathfrak{F}(U) \right) / \sim,$$

donde si $f \in \mathfrak{F}(U)$, $g \in \mathfrak{F}(V)$, $U, V \in \mathcal{V}_x$, se tiene que

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists W \in \mathcal{V}_x \text{ t.q. } W \subset U \cap V \text{ y } r_{W,U}(f) = r_{W,V}(g).$$

A las clases de equivalencia se les llama *gérmenes* en x; si $f \in \mathfrak{F}(U)$, con $U \in \mathcal{V}_x$ se denotará f_x el germen de f en x. Dado $U \in \mathcal{V}_x$ denotaremos $r_{x,U} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}_x$ la aplicación dada por $r_{x,U}(f) := f_x$. Es fácil ver que si $x \in U \subset V$ se tiene $r_{x,V} = r_{x,U} \circ r_{U,V}$.

Observación 2.5. Si $\mathfrak{F}$ tiene estructura suplementaria y en dicha categoría hay límites inductivos, entonces $\mathfrak{F}_x$ también posee la estructura suplementaria y las aplicaciones $r_{x,U}$ son morfismos.

Ejemplo 2.6. Para el prehaz del Ejemplo 2.3, retomamos la definición habitual de germen de una aplicación.

Sea ahora $\mathfrak{F}$ un prehaz sobre X. Definimos $\hat{\mathfrak{F}} := \coprod_{x\in X}\mathfrak{F}_x$, y $\pi : \mathfrak{F} \to X$ la aplicación natural. Vamos a definir una topología sobre $\hat{\mathfrak{F}}$. Para ello, dado U abierto y $f \in \mathfrak{F}(U)$, denotamos $B(f) := \{f_x \mid x \in U\} \subset \hat{\mathfrak{F}}$. Sea

$$\mathfrak{B} := \{B(f) \mid f \in \mathfrak{F}(U), U \text{ abierto de } X\}.$$

Es un ejercicio sencillo comprobar que $\mathfrak{B}$ es base de una topología de $\hat{\mathfrak{F}}$ que fijaremos a partir de ahora.

Lema-Definición 2.7. *$\hat{\mathfrak{F}}$ es un haz llamado el* haz canónico *asociado a $\mathfrak{F}$.*

Demostración. En primer lugar podemos ver que si U es un abierto de X y $f \in \mathfrak{F}(U)$, entonces la aplicación $\hat{f} : U \to \hat{\mathfrak{F}}$, $\hat{f}(x) := \hat{f}_x$, es continua.

Además es claro que π es continua, y se demuestra entonces que π es un homeomorfismo local. □

Observación 2.8. Si $\mathfrak{F}$ es un haz, entonces $\mathfrak{F}$ es naturalmente isomorfo a su haz canónico.

Observación 2.9. Dado un prehaz $\mathfrak{F}$ hay un homomorfismo de prehaces de $\mathfrak{F}$ al prehaz asociado a $\hat{\mathfrak{F}}$ tal que $f \mapsto \hat{f}$ si $f \in \mathfrak{F}(U)$ y U es abierto en X.

Definición 2.10. Un prehaz $\mathfrak{F}$ se dice *canónico* si $\forall U \subset X$ abierto, para todo recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de U y para toda familia $\{s_\alpha\}_{\alpha\in A}$, con $s_\alpha \in \mathfrak{F}(U_\alpha)$, se tiene que $r_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\beta}(s_\beta)$ $\forall\alpha,\beta \in A$, si y solo si $\exists! s \in \mathfrak{F}(U)$ tal que $r_{U_\alpha,U}(s) = s_\alpha$, $\forall\alpha \in A$.

Proposición 2.11. *El prehaz asociado a un haz es canónico. Es más, un prehaz es canónico si y solo si es naturalmente isomorfo al prehaz asociado a su haz canónico.*

Observación 2.12. Identificaremos los haces y sus prehaces asociados. De la misma forma identificaremos los prehaces canónicos con los haces asociados (y cometeremos en ocasiones el abuso de notación de llamarlos haces). Esto nos permitirá crear nuevos ejemplos de haces a partir de prehaces (sean canónicos o no).

Ejemplo 2.13. Generalizando el Ejemplo 2.3 consideramos haces de funciones diferenciables de variedades diferenciables de dimensión n. Son también haces de $\mathbb{R}$-álgebras con unidad. Como en el cálculo de los gérmenes lo que importa es la estructura local, la fibra en un punto es isomorfa al álgebra de gérmenes de funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ en el origen. Este tipo de estructuras las generalizaremos.

Ejemplo 2.14. Dado X espacio topológico, podemos considerar el prehaz de las funciones continuas acotadas con valores en $\mathbb{R}$. Observemos que el haz canónico asociado a él coincide con el haz de gérmenes de funciones continuas; en particular, no es un prehaz canónico.

Ejemplo 2.15. Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre X. Llamaremos $\mathrm{Set}(\mathfrak{F})$ al prehaz de las secciones conjuntistas de π. Como es claramente canónico lo identificaremos con su haz canónico. Hay una inclusión natural de $\mathfrak{F}$ en $\mathrm{Set}(\mathfrak{F})$.

2.16. Cambio de base. Sea $\varphi : Y \to X$ una aplicación continua. Observemos que si $\pi : \mathfrak{F} \to X$ es un haz sobre X, entonces, el pull-back

$$\varphi^*(\mathfrak{F}) := \{(y, u) \in Y \times \mathfrak{F} \mid \ \varphi(y) = \pi(u)\}$$

es un haz (con la restricción de la primera proyección) sobre Y, llamado *imagen inversa* de $\mathfrak{F}$ por φ. Un caso particularmente importante es el de la inclusión de abiertos $u \subset X$. En este caso la imagen inversa no es otra cosa que $\mathfrak{F}_U := \pi^{-1}(U)$. Por ejemplo, diremos que un haz es *localmente trivial de fibra* A si admite un recubrimiento abierto tal que la restricción del haz a cada abierto del recubrimiento es isomorfa al haz trivial sobre cada abierto de fibra A; por supuesto si X es conexo la fibra será siempre la misma. Si el haz tiene alguna estructura, pediremos que el isomorfismo también la tenga.

Sea ahora $\mathfrak{F}$ un haz sobre Y. Definimos el siguiente prehaz $f_*(\mathfrak{F})$ sobre X, llamado *imagen directa*. Dado U abierto de X, denotamos $f_*\mathfrak{F}(U) := \mathfrak{F}(f^{-1}(U))$. Es fácil ver que se trata de un prehaz canónico.

2.17. Subespacios de X. Sea $Y \subset X$; vamos a ver diferentes operaciones que ligan haces de Y y de X; denotaremos $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión.

- Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre X; entonces $\mathfrak{F}_{|Y} := i^*\mathfrak{F}$ es un haz sobre Y.
- Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre Y; entonces $i_*\mathfrak{F}$ es un haz sobre X.
- Sea $\mathfrak{F}$ un haz sobre Y de grupos abelianos, Y localmente cerrado; llamamos extensión por cero de $\mathfrak{F}$ al único haz $\mathfrak{F}^X$ sobre X (salvo isomorfismo) cuyas fibras sobre los puntos de Y coinciden con las de $\mathfrak{F}$ y cuyas fibras en los demás puntos son nulas.

- Las operaciones anteriores se pueden combinar. Así si $\mathfrak{F}$ es un haz sobre X, denotaremos $\mathfrak{F}_Y := (\mathfrak{F}_{|Y})^X$, haz sobre X. También podemos componer i^* con i_* en ambas direcciones.

Es un ejercicio instructivo observar bajo qué condiciones algunas de las operaciones coinciden (por ejemplo, bajo la hipótesis de Y abierto o cerrado).

3. Haces y variedades diferenciables

En esta sección M es una variedad diferenciable de dimensión m. Consideraremos el haz $\mathcal{C}^\infty_M =: \mathcal{E}^0_M$ de gérmenes de funciones diferenciables con valores reales.

Se trata de un haz de $\mathbb{R}$-álgebras con unidad; todas las fibras son isomorfas a $(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})_0$; de hecho es un haz localmente trivial de fibra $(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})_0$, es decir, $\forall p \in M$ existe un entorno abierto V de p tal que la restricción del haz a U es isomorfa a $U \times (\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})_0$.

Ejemplo 3.1. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango k. Consideremos el prehaz que a cada abierto U le asocia $\Gamma(E_{|U})$, el $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo de todas las secciones diferenciables $U \to E$. Es obvio que se trata de un prehaz canónico que identificamos al haz asociado $\mathcal{E}$; la fibra $\mathcal{E}_x$ es el $(\mathcal{C}^\infty_M)_x$-módulo de los gérmenes de secciones de E en entornos de x y es un módulo libre de rango k. Por tanto, $\mathcal{E}$ es un haz de $\mathcal{C}^\infty_M$-módulos.

De esta forma consideramos los haces $\mathcal{E}^k_M$, haces gérmenes de k-formas diferenciales. Observemos que $\forall p \in M$, la fibra $(\mathcal{E}^k_M)_p$ es un $(\mathcal{E}^0_M)_p$-módulo libre de rango $\binom{n}{k}$.

Sea $\mathbf{x} : U \to V \subset M$ es una carta de la variedad. Para cada $p \in V$ las secciones $dx_1, \ldots, dx_n$ inducen una base de T_pM^* y sus productos exteriores debidamente ordenados inducen bases de los espacios de formas alternadas de T_pM. Si denotamos $(dx_j)_p$ los gérmenes de de estas formas, vemos que todo germen de k-forma en un punto $p \in V$ se puede escribir de forma única como

$$\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} (f_{j_1,\ldots,j_k})_p dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k},$$

con $(f_{j_1,\ldots,j_k})_p$ gérmenes de funciones diferenciables en p (omitimos los subíndices de los gérmenes de formas para no recargar la notación).

Observemos que claramente la diferencial induce un homomorfismo de haces (de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, no se preserva la estructura de módulo), $d : \mathcal{E}^k_M \to \mathcal{E}^{k+1}_M$. Tenemos una sucesión:

$$0 \to \underline{\mathbb{R}}_M \to \mathcal{E}^0_M \to \mathcal{E}^1_M \to \cdots \to \mathcal{E}^k_M \to \mathcal{E}^{k+1}_M \to \ldots,$$

donde $\mathbb{R}_M$ es el haz trivial $M \times \mathbb{R}$ (identificado con el haz de gérmenes de funciones localmente constantes); la primera aplicación es la inclusión y las demás son la diferencial d. Observemos que la composición de dos aplicaciones de la sucesión siempre es cero.

Esto nos induce a dar las siguientes definiciones.

Definición 3.2. Sea X un espacio topológico, sean $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ haces de grupos abelianos (o espacios vectoriales, o módulos sobre un haz). Sea $\varphi : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2$ un morfismo de haces de grupos abelianos. Entonces $\ker\varphi := \coprod_{x\in X} \ker\varphi_x$ e $\operatorname{Im}\varphi := \coprod_{x\in X} \operatorname{Im}\varphi_x$ son subhaces de $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ respectivamente, llamados *núcleo* e *imagen* de φ (es cierto ya que φ es abierta y la imagen de la sección nula también es abierta).

Definición 3.3. Sea X un espacio topológico, sean $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2, 3$ haces de grupos abelianos. Sea $\mathcal{C} := \mathfrak{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathfrak{F}_3$ un par de morfismos de haces de grupos abelianos tal que $\varphi_2\circ\varphi_1$ es el morfismo nulo. La *homología* $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ es el haz $\ker\varphi_2/\operatorname{Im}\varphi_1$; si $x \in X$, $\mathcal{H}_x = \ker(\varphi_2)_x/(\operatorname{Im}\varphi_1)_x$. Si la homología es nula, diremos que es una *sucesión exacta en* $\mathfrak{F}_2$.

Observación 3.4. Sin precisar más, podemos definir los conceptos de complejos de haces, cohomología de complejos, sucesiones exactas cortas. Sí que merece alguna precisión más el concepto de cociente de haces. Sea X un espacio topológico y sean $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ haces de grupos abelianos sobre X tales que $\mathfrak{F}_1$ es un subhaz de $\mathfrak{F}_2$. El cociente $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}_2/\mathfrak{F}_1$ se define como el haz canónico asociado al prehaz $\mathfrak{F}(U) := \mathfrak{F}_2(U)/\mathfrak{F}_1(U)$, U abierto de X. Se demuestra que la fibra $\mathfrak{F}_x$ es naturalmente isomorfa a $(\mathfrak{F}_2)_x/(\mathfrak{F}_1)_x$ y que en general no es un prehaz canónico.

Ejemplo 3.5. Sea M una variedad diferenciable. Denotaremos $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}$, resp. $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}^*}$, el haz de gérmenes de aplicaciones diferenciables con valores en $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{C}^*$. El primero lo vemos como haz de grupos abelianos con la suma, y el segundo con el producto. Sea $\mathbb{Z}_M$ el haz de funciones localmente constantes con valores en $\mathbb{Z}$. Consideremos:

$$0 \to \mathbb{Z}_M \to \mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}^*} \to 0,$$

donde la primera flecha es la inclusión y la segunda está definida por $h \mapsto e^{2i\pi h}$. Es claramente una sucesión exacta corta de haces, llamada la *sucesión exponencial.* Observemos que $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}^*}$ es naturalmente isomorfo a $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}/\mathbb{Z}_M$. Observemos que si M es, por ejemplo $\mathbb{S}^1$, no todas las secciones de $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}^*}$ se obtienen a partir de secciones de $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}$.

Definición 3.6. Sea X un espacio topológico y sea $\mathfrak{F}$, un haz de grupos abelianos. Una *resolución* de $\mathfrak{F}$ es un complejo $(\mathfrak{F}_n, d_n)_{n\geq 0}$ con un morfismo de haces $j : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_0$ tal que

$$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{F}_1 \to \dots$$

es un complejo exacto.

Ejemplo 3.7. Es posible definir de forma recurrente una resolución de cualquier haz $\mathfrak{F}$ de grupos abelianos. Para ellos definimos pares de subhaz/haz $\mathfrak{F}_j$ y $\operatorname{Set}^j(\mathfrak{F})$ commo sigue:

- $\mathfrak{F}_0 := \mathfrak{F}$ y $\operatorname{Set}^0(\mathfrak{F}) := \operatorname{Set}(\mathfrak{F})$.
- Si $j > 0$, definimos $\mathfrak{F}_j := \operatorname{Set}^{j-1}(\mathfrak{F})/\mathfrak{F}_{j-1}$ y $\operatorname{Set}^j(\mathfrak{F}) := \operatorname{Set}(\mathfrak{F}_j)$.

Tenemos una aplicación natural d obtenida como la composición

$$\operatorname{Set}^{j-1}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}_j \to \operatorname{Set}^j(\mathfrak{F}),$$

donde la primera flecha es el cociente y la segunda es la inclusión. Tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \to \mathfrak{F}_j \to \operatorname{Set}^j(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}_{j+1} \to 0,$$

que dan lugar a una resolución $(\operatorname{Set}^j(\mathfrak{F}), d)_{j\geq 0}$, llamada *resolución canónica* de $\mathfrak{F}$.

Lema de Poincaré 3.1. *$(\mathcal{E}^k(M), d)_{k\geq 0}$ es una resolución de $\underline{\mathbb{R}}_M$.*

Demostración. Como el resultado es local en el entorno de un punto basta que lo demostremos para el origen en $\mathbb{R}^n$. Somos conscientemente poco cuidadosos con la distinción entre gérmenes y representantes en entornos pequeños (y estrellados) del origen. Vamos a definir un morfismo de haces

$$\alpha_k : \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)_0 \to \mathcal{E}^{k-1}(\mathbb{R}^n)_0$$

Como va a ser $\mathbb{R}$-lineal, lo definiremos sobre gérmenes de formas

$$\omega_{(x_1,\dots,x_n)} := f(x_1,\dots,x_n)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Entonces,

$$\alpha_k(\omega) := \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx_1,\dots,tx_n)dt\right)\left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right)$$

Esta aplicación se puede entender como sigue; consideremos $\rho : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\rho(x,t) := tx$. Dada una k-forma ω sobre $\mathbb{R}^n$, consideramos la k-forma

$\rho^*(\omega)$ sobre $\mathbb{R}^n \times [0,1]$. Cualquier k-forma η sobre $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ se puede escribir de forma única como

$$\begin{aligned}\eta = &\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} f_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_n,t)dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}+\\ &+\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{k-1}\leq n} g_{j_1,\ldots,j_{k-1}}(x_1,\ldots,x_n,t)dt\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{k-1}}\end{aligned}$$

Consideremos la forma obtenida al prescindir de los primeros sumandos e integrar los segundos a lo largo de t:

$$\beta(\eta) := \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{k-1}\leq n}\left(\int_0^1 g_{j_1,\ldots,j_{k-1}}(x_1,\ldots,x_n,t)dt\right)dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{k-1}}$$

Hemos definido una aplicación β que envía una k-forma definida en un entorno abierto de $\{0\}\times[0,1]$ en $\mathbb{R}^n\times[0,1]$ a una $(k-1)$-forma definida en un entorno abierto de 0 en $\mathbb{R}^n$.

Definimos también

$$\gamma(\eta) := \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n}(f_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_n,1)-f_{j_1,\ldots,j_k}(x_1,\ldots,x_n,0))dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}.$$

Es fácil ver que $d\beta(\eta)+\beta(d\eta)=\gamma(\eta)$.

Volvemos a nuestra forma ω. Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\rho^*(\omega) =&t^k f(tx_1,\ldots,tx_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}+\\ &+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}t^{k-1}x_{i_j}f(tx_1,\ldots,tx_n)dt\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_j}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.\end{aligned}$$

Extendiendo por linealidad, tenemos que para cualquier k-forma ω:

$$\alpha_k(\omega)=\beta(\rho^*(\omega)),\qquad \gamma(\rho^*(\omega))=\omega.$$

Como ρ^* conmuta con la diferencial, deducimos que $d(\alpha_k(\omega))+\alpha_{k+1}(d\omega)=\omega$. Así, si ω es cerrada (es decir, $d\omega=0$) entonces es exacta (es decir, ω es la diferencial de una $k-1$-forma). □

Observación 3.8. Del complejo de haces anterior nace la cohomología de de Rham. En efecto, tomemos en cada haz el espacio vectorial de las secciones globales. Obtenemos así un complejo de espacios vectoriales cuya cohomología es la de de Rham.

4. Variedades analíticas complejas

En esta sección vamos a dar una estructura similar en su definición a la de variedades diferenciales. Previamente daremos las definiciones y propiedades necesarias.

Definición 4.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función con valores complejos. Diremos que f es holomorfa en U si $\forall z \in U$ existe una forma lineal $df_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tal que $\forall v \in \mathbb{C}^n$ existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+hv) - f(z)}{h},$$

y es igual a $df_z(v)$. Una aplicación $g : U \to \mathbb{C}^m$ es holomorfa si lo son sus componentes. En tal caso, denotaremos $dg(z)$, $z \in U$, a la aplicación lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ de matriz $\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$.

Observaciones 4.2. Como en el caso de una variable, las funciones holomorfas son $\mathcal{C}^\infty$ y analíticas. Muchos de los resultados se extienden. Por ejemplo, si denotamos $z_j = x_j + iy_j$ y $f = u + iv$, entonces, identificando f como una aplicación $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$, la holomorfía es equivalente a la diferenciabilidad y a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Las funciones holomorfas también poseen:

- **Principio de Prolongación analítica** Si U es conexo y $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorfas coinciden en un abierto V, $\emptyset \neq V \subset U$, entonces, $f = g$.
- **Principio del Máximo** Si U es conexo, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y existe $p \in U$ tal que $|f|$ posee un máximo local en p, entonces f es constante.

De la misma forma hay una fórmula de Cauchy. Observemos también que el principio de prolongación analítica impide recursos como las particiones de la unidad.

Observamos también que df es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal.

4.3. Un poco de álgebra lineal. Sean F_1, F_2 dos $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente. Fijemos bases, $v_1, \dots, v_n$ y $w_1, \dots, w_m$. Si nos fijamos en ellos como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, tenemos bases $v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n$ y $w_1, iw_1, \dots, w_m, iw_m$. Sea $h : F_1 \to F_2$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Sea $A \in M(2m \times 2n; \mathbb{R})$ la matriz de h en estas bases, que denotaremos:

$$A := (A_{jk})_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n}, \text{ con } A_{jk} := \begin{pmatrix} a_{jk} & c_{jk} \\ b_{jk} & d_{jk} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}).$$

Es fácil ver que h es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $\forall j = 1, \ldots, m$ y $\forall k = 1, \ldots, n$ se tiene $a_{jk} = d_{jk}$, $b_{jk} = -c_{jk}$.

Gracias a esto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann tienen esta interpretación.

Proposición 4.4. *Sea $g : U \to \mathbb{C}^m$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^{(1)}$, con $U \subset \mathbb{C}^n$, abierto. Sea $dg^{\mathbb{R}}$ la diferencial de g vista como aplicación de un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^{2m}$ y consideremos la matriz jacobiana de esta aplicación con respecto a las coordenadas obtenidas al tomar parte real y parte imaginaria. Entonces, g es holomorfa si y solo si $dg^{\mathbb{R}}$ es $\mathbb{C}$-lineal y en tal caso coincide con dg.*

Una consecuencia de esta proposición es la existencia de teoremas holomorfos de la función implícita en inversa.

Definición 4.5. Una *variedad analítica compleja* de dimensión n es un espacio Hausdorff y segundo numerable M, junto con un atlas completo de cartas holomórficamente compatibles. Es decir tenemos una familia maximal $\{\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha\}_\alpha$ tal que $\mathbf{x}_\alpha : u_\alpha \to V_\alpha \subset M$ es un homeomorfismo sobre la imagen, con $V_\alpha \subset M$ abierto y $U_\alpha \in \mathbb{C}^n$ abierto, y dadas dos cartas con índices α, β, se tiene que:

$$\psi_{\beta\alpha} := \mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \to \mathbf{x}_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

es una aplicación biholomorfa.

Observación 4.6. Se pueden hacer ahora las construcciones similares a las variedades diferenciales. Podemos construir funciones holomorfas, aplicaciones holomorfas entre variedades, fibrados vectoriales holomorfos, etc. Por otra parte tenemos que una variedad analítica de dimensión n admite de forma natural una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.

4.7. Fibrado tangente holomorfo. Como en el caso real, podemos definir el espacio tangente holomorfo $\mathcal{T}_pM$ en p como el espacio de las $\mathbb{C}$-derivaciones de los gérmenes de funciones holomorfas cerca de p. Si $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ es una carta, $p \in V_\alpha$, tenemos una base de este espacio en $\{\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}{}_{|p}\}_{j=1}^n$. Recordemos que si tenemos otra carta de índice β, con $p \in V_\beta$, se tiene el siguiente cambio de base:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1^\alpha}{}_{|p} \cdots \frac{\partial}{\partial z_n^\alpha}{}_{|p}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1^\beta}{}_{|p} \cdots \frac{\partial}{\partial z_n^\beta}{}_{|p}\right) \left(\frac{\partial \psi_{\beta\alpha}}{\partial z_\alpha}\right)_{|\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)}.$$

A partir de ahora vamos a estudiar el espacio tangente de la variedad diferenciable subyacente. Sea $p \in M$. Consideramos T_pM como la espacio de las $\mathbb{R}$-derivaciones con valores reales del espacio de gérmenes de funciones diferenciables en un entorno de p. Dada una carta $\mathbf{x}_\alpha$ consideremos las coordenadas $z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha$.

Como son coordenadas complejas las podemos escribir como $z_j^\alpha := x_j^\alpha + iy_j^\alpha$. De esta forma obtenemos una base de T_pM dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}_{|p}, \frac{\partial}{\partial y_1^\alpha}_{|p}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}_{|p}, \frac{\partial}{\partial y_n^\alpha}_{|p}.$$

4.8. Otra gota de álgebra lineal. Recordemos que un espacio vectorial complejo es un espacio vectorial real con un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es t^2+1. Sea F un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2n$ con dos estructuras complejas J_1, J_2 (es decir, dos automorfismos de F tales que $J_j^2 = -1_F$).

Sea $v_1, \dots, v_n$ una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial (F, J_1). Consideremos también $w_1, \dots, w_n$ base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial (F, J_2). Así, $v_1, J_1(v_1), \dots, v_n, J_1(v_n)$ por una parte y $w_1, J_2(w_1), \dots, w_n, J_2(w_n)$ por otra, son bases de F. Sea $A \in GL(2n; \mathbb{R})$ la matriz de cambio de base descompuesta en 2-cajas como en 4.3. Se tiene que $J_1 = J_2$ si y solo si se da la condición en las 2-cajas de 4.3.

Consideremos ahora en T_pM la base asociada a una carta $\mathbf{x}_\beta$. Como el cambio de cartas es holomorfo, al considerar la matriz jacobiana real, las 2-cajas de la descomposición verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Es decir, si definimos $J_\alpha : T_pM \to T_pM$ con

$$J_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p}) = \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}, \qquad J_\alpha(\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}) = -\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

y definimos J_β análogamente, entonces por 4.8 $J_\alpha = J_\beta = J$. Es decir, tenemos una estructura natural de $\mathbb{C}$-espacio vectorial en T_pM.

4.9. Más álgebra lineal. Sea F un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. El complexificado de F es $F^{\mathbb{C}} := F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial por la acción en el segundo factor. En el caso de $F^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$, hay una identificación natural de $(F^*)^{\mathbb{C}}$ con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C})$. Es claro que si $H \subset F$ es un subespacio real, entonces $H^{\mathbb{C}}$ es un subespacio complejo de $F^{\mathbb{C}}$. Por otra parte podemos identificar F como un subespacio real de $F^{\mathbb{C}}$ mediante $v \mapsto v \otimes 1$, $\forall v \in F$. Terminamos este inciso con otra identificación natural: el espacio $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C})$ se identifica de forma natural con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$: es decir el complexificado $(F^*)^{\mathbb{C}}$ del dual real de F es el dual complejo del complexificado $F^{\mathbb{C}}$ de F.

Consideramos ahora $T_pM^{\mathbb{C}}$, espacio vectorial tangente complexificado. Podemos identificar por 4.9 este espacio con el espacio de $\mathbb{R}$-derivaciones con valores complejos del espacio de gérmenes de funciones diferenciables en un entorno de p. El complexificado de $\mathcal{C}^\infty(M)_p$ se identifica con $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C})_p$, espacio de gérmenes en p de funciones diferenciables con valores en $\mathbb{C}$. Por tanto $T_pM^{\mathbb{C}}$ se puede considerar como el espacio de $\mathbb{C}$-derivaciones de $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{C})_p$ en $\mathbb{C}$.

4.10. Todavía álgebra lineal. Sea F un $\mathbb{C}$-espacio vectorial complejo de dimensión n; fijemos una base $v_1, \ldots, v_n$. Recordemos que F lo podemos ver como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $2n$ con un automorfismo $J : F \to F$ tal que $J^2 = -1_F$, definido por la multiplicación por i. Una base de F como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es $v_1, J(v_1), \ldots, v_n, J(v_n)$.

Consideremos ahora $F^{\mathbb{C}}$. El automorfismo J induce ahora un automorfismo $J^{\mathbb{C}} : F^{\mathbb{C}} \to J^{\mathbb{C}}$ con el mismo polinomio mínimo t^2+1. Por tanto podemos descomponer $F^{\mathbb{C}} = F^+ \oplus F^-$, donde F^+, resp. F^-, es el subespacio propio de $J^{\mathbb{C}}$ para el valor propio $+i$, resp. $-i$.

Denotemos

$$v_j^+ := \frac{v_j - iJ(v_j)}{2}, \qquad v_j^- := \frac{v_j + iJ(v_j)}{2}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Se tiene:

$$J^{\mathbb{C}}(v_j^+) = \frac{J(v_j) - iJ^2(v_j)}{2} = \frac{J(v_j) + i(v_j)}{2} = iv_j^+.$$

De la misma forma, vemos que $J^{\mathbb{C}}(v_j^-) = -iv_j^-$. Deducimos que $(v_1^+, \ldots, v_n^+)$, resp. $(v_1^-, \ldots, v_n^-)$, forma una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial F^+, resp. F^-. Es más, si denotamos π^+, resp. π^-, la composición de la inclusión de F en $F^{\mathbb{C}}$ con la proyección de F sobre F^+, resp. F^-, se tiene que π^+, resp. π^-, es un automorfismo, resp. antiautomorfismo, de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Estas afirmaciones son consecuencia de las igualdades:

$$\pi^+(v_j) = v_j^+, \qquad \pi^-(v_j) = v_j^-, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Volvamos al caso del espacio tangente a una variedad analítica M en un punto p. Dada una carta de índice α hemos construido una base de T_pM dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}_{|p}, \frac{\partial}{\partial y_1^\alpha}_{|p}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}_{|p}, \frac{\partial}{\partial y_n^\alpha}_{|p},$$

y con una estructura compleja J tal que

$$J(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p}) = \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}, \qquad J(\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}) = -\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

La base anterior también es base de $T_pM^{\mathbb{C}}$. Consideremos los subespacios T_pM^+ y T_pM^-. Denotemos los elementos anteriores de forma especial:

$$\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}_{|p} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p} - i\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j^\alpha}_{|p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p} + i\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Hay una ambigüedad en la notación que vamos a resolver inmediatamente. Recordemos que $T_pM^{\mathbb{C}}$ es el espacio vectorial de las $\mathbb{C}$-derivaciones de los gérmenes de funciones diferenciables definidas en entornos de p y con valores en $\mathbb{C}$. Si f es una función holomorfa definida en un entorno de p, entonces, se tiene:

- Las dos definiciones de $\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}_{|p}$ actúan igual.
- $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j^\alpha}_{|p}(f) = 0$.

Es más, una función $f : V_\alpha \to \mathbb{C}$ es holomorfa si y solo si se dan las igualdades anteriores en todos los puntos de V_α. De esta forma podemos identificar T_pM^+ con $\mathcal{T}_pM$, y T_pM^- con el espacio de $\mathbb{C}$-derivaciones de funciones antiholomorfas definidas en un entorno de p, que denotaremos $\overline{\mathcal{T}}_pM$.

4.11. Fin del álgebra lineal. Sea de nuevo F un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n y estructura compleja J, con base $v_1, \dots, v_n$. Vamos a estudiar los diferentes espacios duales asociados a F.

Consideremos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C})$ (el dual complejo) y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$ (el dual real). El primero es un espacio vectorial complejo de dimensión n; denotemos $\mu_1, \dots, \mu_n$ la base dual de $v_1, \dots, v_n$. El segundo es un espacio vectorial real de dimensión $2n$; denotemos $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n$ la base dual de $v_1, J(v_1), \dots, v_n, J(v_n)$.

Tenemos una inclusión natural $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C}) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C})$. De hecho, tenemos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{F}, \mathbb{C})$, donde $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{F}, \mathbb{C})$ es el espacio de las formas antilineales de F; una base compleja de este último espacio es $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n$, donde $\bar{\mu}_j(v) := \overline{\mu_j(v)}$, $\forall v \in F$, $\forall j = 1, \dots, n$. Recordemos que hay una identificación natural $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C}) \equiv \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$, por lo que podemos considerar $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_n, \bar{\mu}_n$ como formas $\mathbb{C}$-lineales de $F^{\mathbb{C}}$.

Es fácil comprobar lo siguiente:

- $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_n, \bar{\mu}_n$ es la base dual de $v_1^+, v_1^-, \dots, v_n^+, v_n^-$.
- Como consecuencia, podemos identificar $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C})$ con el dual complejo de F^+ y $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{F}, \mathbb{C})$ con el dual complejo de F^-.

Por otra parte el complexificado de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$ se identifica de manera natural con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C})$. De esta forma, $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n$ es también base compleja de este espacio. Como hemos dicho en 4.9, este espacio se identifica de nuevo con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(F^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$. Como antes, $\varphi_1, \psi_1, \dots, \varphi_n, \psi_n$ es la base dual compleja de $v_1, J(v_1), \dots, v_n, J(v_n)$. Es inmediato obtener que:

$$\mu_j = \varphi_j + i\psi_j, \qquad \bar{\mu}_j = \varphi_j - i\psi_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Aplicando este resultado a nuestro caso, tenemos dos bases en el dual complejo $(T_pM^{\mathbb{C}})^*$ de $T_pM^{\mathbb{C}}$. Denotaremos estas bases:

$$dx_1^\alpha, dy_1^\alpha, \dots, dx_n^\alpha, dy_n^\alpha \quad \text{y} \quad dz_1^\alpha, d\bar{z}_1^\alpha, \dots, dz_n^\alpha, d\bar{z}_n^\alpha;$$

omitimos los subíndices que indican que estamos en p. Como hemos visto, los espacios engendrados por $(dz_j^\alpha)_{j=1}^n$ y por $(d\bar{z}_j^\alpha)_{j=1}^n$, no dependen de la carta elegida y se denotan habitualmente por $T_p^*M^{(1,0)}$ y $T_p^*M^{(0,1)}$.

Sea $f : V_\alpha \to \mathbb{C}$ una función diferenciable. Observemos que $df_p : T_pM \to \mathbb{C}$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal que determina y es determinada por una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $T_pM^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ que también denotaremos df_p. Utilizando la primera expresión y la primera base, tenemos:

$$df_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}_{|p}(f)dx_j^\alpha + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}_{|p}(f)dy_j^\alpha.$$

Utilizando la otra base, tenemos:

$$df_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}_{|p}(f)dz_j^\alpha + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j^\alpha}_{|p}(f)d\bar{z}_j^\alpha.$$

En particular, f es holomorfa si y solo si $\forall p \in V_\alpha$, $df_p \in T_p^*M^{(1,0)}$; esta condición se puede enunciar sin necesidad de cartas.

4.12. Resumen Dada una variedad analítica M de dimensión n podemos definir $\mathcal{T}M$ el fibrado tangente holomorfo (es un fibrado complejo de rango n).

Además del fibrado tangente (real) TM, podemos definir su complexificado $TM^{\mathbb{C}}$, que es un fibrado diferenciable complejo de rango $2n$. El dual complejo de este, denotado $T^*M^{\mathbb{C}}$ admite una descomposición natural en suma directa en dos subbfibrados complejos $T^*M^{(1,0)} \oplus T^*M^{(0,1)}$. Observemos que si en el dual de $\mathcal{T}M$ nos olvidadmos de la estructura analítica y solo consideramos la estructura diferenciable, $\mathcal{T}^*M$ es isomorfo a $T^*M^{(1,0)}$.

Como en el caso real, se puede definir el fibrado de las r-formas alternadas $\mathbb{C}$-multlineales, tanto a partir de $\mathcal{T}M$ como de $T^*M^{\mathbb{C}}$. En el caso holomorfo a las secciones se les llama formas holomorfas y se les denota Ω_M^r; en el caso de $r = 0$ tenemos el haz de funciones holomorfas denotado habitualmente $\mathcal{O}_M$. Al haz de las secciones asociado se le denota $\mathcal{E}_{(M,\mathbb{C})}^r$. Tanto el fibrado anterior como las secciones admiten una descomposición en suma directa que en el caso de haces se expresa:

$$\mathcal{E}_{(M,\mathbb{C})}^r = \oplus_{p+q=r}\mathcal{E}_M^{(p,q)}.$$

A los elementos del prehaz de $\mathcal{E}_M^{(p,q)}$ se les llama formas de tipo (p,q). En coordenadas (omitiendo los subíndices α), tenemos:

- Una r-forma holomorfa ω sobre V_α se escribe:

$$\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_r\leq n} f_{j_1,\ldots,j_r} dz_{j_1} \wedge \ldots dz_{j_r}, \quad f_{j_1,\ldots,j_r} \text{ holomorfas;}$$

- Una forma ω de tipo (p,q) sobre V_α se escribe:

$$\sum_{\substack{1\leq j_1<\ldots<j_p\leq n\\ 1\leq k_1<\ldots<k_q\leq n}} f_{j_1,\ldots,j_p}^{k_1,\ldots,k_q} dz_{j_1}\wedge\ldots dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k_q},\quad f_{j_1,\ldots,j_p}^{k_1,\ldots,k_q} \text{ diferenciables.}$$

Como en el caso local, si $f: M\to N$ es una aplicación diferenciable entre variedades analíticas, dado $W\subset N$ abierto y $\omega\in\mathcal{E}^r_{N,\mathbb{C}}(W)$, tenemos definida $f^*\omega\in\mathcal{E}^r_{M,\mathbb{C}}(f^{-1}(W))$. Si además f es holomorfa, entonces respeta formas holomorfas y formas de tipo (p,q).

De la misma forma que se hace en el caso real, podemos definir una diferencial vista ahora como morfismo de haces o prehaces.

Teorema 4.13. *Existe una única manera de definir para cada variedad analítica M un morfismo de haces $d:\mathcal{E}^r_{M,\mathbb{C}}\to\mathcal{E}^{r+1}_{M,\mathbb{C}}$ de forma que*

(1) $d^2=0$.
(2) *Para toda aplicación diferenciable $f:M\to N$ se cumple $f^*\circ d=d\circ f^*$.*
(3) *Si $f:M\to\mathbb{C}$ es una aplicación diferenciable, $d(f)=df$.*
(4) *Si $\omega_1\in\mathcal{E}^r_{M,\mathbb{C}}$ y $\omega_2\in\mathcal{E}^s_{M,\mathbb{C}}$, entonces $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge d\omega_2$.*

Como en el caso real, si tomamos cartas locales una forma

$$\omega=f dz_{j_1}\wedge\ldots dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k_q},$$

se tiene:

$$\begin{aligned} d\omega =&df\wedge dz_{j_1}\wedge\ldots dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k_q} =\\ =&\left(\sum_{j=1^n}\frac{\partial}{\partial z_j}f\ dz_j+\sum_{j=1^n}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}f\ d\bar{z}_j\right)\wedge dz_{j_1}\wedge\ldots dz_{j_p}\wedge d\bar{z}_{k_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k_q}. \end{aligned}$$

Este teorema se puede especializar en nuestro caso:

Teorema 4.14. *Existen para cada variedad analítica M dos morfismo de haces $\partial:\mathcal{E}^{(p,q)}_{M,\mathbb{C}}\to\mathcal{E}^{(p+1,q)}_{M,\mathbb{C}}$ y $\bar\partial:\mathcal{E}^{(p,q)}_{M,\mathbb{C}}\to\mathcal{E}^{(p,q+1)}_{M,\mathbb{C}}$ de forma que*

(1) *$d=\partial+\bar\partial$, por lo que $\partial^2=0$, $\bar\partial^2=0$ y $\partial\circ\bar\partial+\bar\partial\circ\partial=0$.*
(2) *Para toda aplicación holomorfa $f:M\to N$ f^* conmuta con ∂ y con $\bar\partial$.*
(3) *$f:M\to\mathbb{C}$ es una aplicación holomorfa (resp. antiholomorfa) si y solo si $\bar\partial(f)=0$, resp. $\partial(f)=0$.*
(4) *Una forma ω de tipo $(p,0)$ es holomorfa si y solo si $\bar\partial\omega=0$.*

Observemos que podemos construir en este caso dos familias de complejos de haces. Dado $p\geq 0$, tenemos con $\bar\partial$:

$$0\to\Omega^p_M\to\mathcal{E}^{(p,0)}_M\to\cdots\to\mathcal{E}^{(p,q)}_M\to\ldots$$

Y también, dado $q \geq 0$ con ∂,

$$0 \to \mathcal{E}_M^{(0,q)} \to \mathcal{E}_M^{(1,q)} \to \cdots \to \mathcal{E}_M^{(p,q)} \to \ldots,$$

el llamado $\bar{\partial}$-lema de Poincaré dice que $(\mathcal{E}_M^{(p,q)}, \bar{\partial})_{q\geq 0}$ es una resolución de Ω_M^p.

Definición 4.15. Un bicomplejo (C, d', d'') de grupos abelianos es un grupo abeliano bigraduado

$$C := \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} C^{p,q}$$

junto con dos endomorfismos bigraduados d', d'' de C, de grados $(1,0)$, $(0,1)$, respectivamente, tales que $(d')^2 = (d'')^2 = d'd'' + d''d' = 0$. Dado un bicomplejo, le asociamos el complejo total $(\mathrm{Tot}(C), d)$, donde

$$\mathrm{Tot}(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} T_n, \qquad T_n := \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q},\ n \in \mathbb{Z},$$

y $d := d' + d''$.

Así, $\mathcal{E} := (\mathcal{E}_M^{(p,q)}, \partial, \bar{\partial})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ es un haz de bicomplejos graduados cuyo haz total $\mathrm{Tot}(\mathcal{E})$ es $(\mathcal{E}_{M,\mathbb{C}}^r, d)_{r\geq 0}$.

5. Definiciones de cohomología

Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ un haz de grupos abelianos sobre X. Consideremos una resolución $\mathfrak{R} := (\mathfrak{R}_j, d)_{j\geq 0}$ de $\mathfrak{F}$. Es decir,

$$0 \to \mathfrak{F} \hookrightarrow \mathfrak{R}_0 \to \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2 \to \ldots,$$

es una sucesión exacta de módulos. Olvidémonos de $\mathfrak{F}$ y apliquemos a esta resolución el funtor *secciones globales*. Obtenemos un complejo de grupos abelianos:

$$0 \to \mathfrak{R}_0(X) \to \mathfrak{R}_1(X) \to \mathfrak{R}_2(X) \to \ldots$$

Consideremos la cohomología $H^*(\mathfrak{R}(X))$ de este complejo. Observemos que el grupo abeliano $H^0(\mathfrak{R}(X))$ es naturalmente isomorfo a $\mathfrak{F}(X)$ (el funtor secciones globales es exacto a izquierda).

Siguiendo el procedimiento habitual en álgebra homológica podríamos definir tipos especiales de haces que hagan el papel de los módulos proyectivos o inyectivos, es decir de forma que podamos hacer resoluciones de ese tipo de haces y que al calcular la cohomología después de tomar secciones globales, el resultado no dependa de la resolución particular; además, que el proceso se haga de modo funtorial. Sin embargo, el procedimiento será distinto. Definiremos la cohomología a partir de una resolución particular; esto nos permitirá encontrar un invariante bien definido, funtorial y con las propiedades habituales del álgebra homológica.

A partir de la definición que daremos será prácticamente imposible calcular de forma efectiva la cohomología de un haz, pero una vez bien definido el invariante buscaremos criterios efectivos para calcularlo.

Definición 5.1. Llamaremos *j-ésimo grupo de cohomología de X con valores en $\mathfrak{F}$*, y lo denotaremos $H^j(X;\mathfrak{F})$ al j-ésimo grupo de cohomología del complejo $(\mathrm{Set}^j(\mathfrak{F}), d)_{j\geq 0}$ obtenido al tomar secciones globales de la resolución canónica de $\mathfrak{F}$.

Es fácil comprobar que si tenemos dos haces $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$ y un morfismo de haces $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$, es posible extenderlo a un morfismo de complejos $\varphi^* : \mathrm{Set}^*(\mathfrak{F}) \to \mathrm{Set}^*(\mathfrak{F}')$, lo que nos permite asociar funtorialmente un morfismo $\varphi^* : H^*(X;\mathfrak{F}) \to H^*(X;\mathfrak{F}')$.

De la misma forma, si tenemos una sucesión exacta corta de haces $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$, obtendremos una sucesión exacta larga que será funtorial.

Además, $H^0(X;\mathfrak{F})$ es naturalmente isomorfo a $\mathfrak{F}(X)$.

6. Cohomología de Čech

Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ un haz de grupos abelianos. Vamos a definir otra cohomología $\check{H}^*(X;\mathfrak{F})$ que llamaremos cohomología de Čech.

Sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento abierto de X. Por comodidad, supondremos que $\mathfrak{U}$ está parametrizado por un conjunto de índices I; es decir $\mathfrak{U} = \{U_i|\ i \in I\}$. Dados $i_0, i_1, \dots, i_q \in I$, denotaremos

$$U_{(i_0,i_1,\dots,i_q)} := \bigcap_{k=0}^{q} U_{i_k}.$$

Llamaremos grupo de q-cocadenas de $\mathfrak{U}$ con valores en $\mathfrak{F}$ a

$$C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) := \prod_{(i_0,\dots,i_q)\in I^{q+1}} \mathfrak{F}(U_{i_0,i_1,\dots,i_q}).$$

Hay una aplicación natural

$$d : C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}),$$

donde si $(u_J)_{J\in I^{q+1}}$, el elemento $(v_K)_{K\in I^{q+2}} = d((u_J)_{J\in I^{q+1}})$ viene determinado por

$$v_K := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j r_{U_K,U_{K_j}}(u_{K_j})$$

si $K = (i_0, i_1, \dots, i_{q+1})$ y $K_j = (i_0, i_1, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_{q+1})$, $j = 0, 1, \dots, q+1$.

Es inmediato comprobar que $d^2 = 0$, por lo que tenemos un complejo de grupos abelianos $(C^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), d)$.

Definición 6.1. La cohomología del complejo anterior se llama *cohomología de Čech* de $\mathfrak{F}$ con respecto al recubrimiento abierto $\mathfrak{U}$ y se denota $\check{H}^q(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$; los elementos que están en el núcleo de la diferencial se llaman *cociclos*, y los que están en la imagen se llaman *cobordes*.

Ejemplo 6.2. Veamos cómo es $\check{H}^0(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. En este caso no hay cobordes, luego basta estudiar los cociclos. Sea $u := (u_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Se tiene que, dados $i, j \in I$ la componente (i, j) de $d(u)$ es (con abuso de notación) $u_j - u_i$ en $U_i \cap U_j$.

Deducimos que u es cociclo si y solo si existe (un único) $f \in \mathfrak{F}(X)$ tal que $r_{U,X}(f) = f_i$. Es decir $\check{H}^0(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ se identifica de forma natural con $\mathfrak{F}(X)$.

Referencias

1. R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973.
2. H. Grauert and R. Remmert, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 265, Springer-Verlag, Berlin, 1984.