# TEOREMAS DE SARD Y MORSE

ENRIQUE ARTAL BARTOLO

En estos apuntes voy a dar una redacción de la demostración de los teoremas de Sard y Morse que no aparecen en las notas de Lee. Para ello me he basado en los textos de Guillemin-Pollack, Milnor y Arnol'd-Gussein-Zade-Varchenko.

## 1. Enunciados y definiciones

**Teorema 1.1** (Sard)**.** *Sean $M, N$ variedades diferenciables de dimensión $m$ y $n$, respectivamente. Sea $f : N \to M$ una variedad diferenciable. Entonces, el conjunto de valores críticos de $f$ es de medida nula.*

*Observación* 1.2. Recordemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice de medida nula si $\forall \delta > 0$ existe una familia de bolas $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ y $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{Vol}(B_j) < \delta$. La imagen de $A$ por un difeomorfismo también es de medida nula, por lo que se dice que un subconjunto $A$ de una variedad diferenciable $M$ es de medida nula si lo es al tomar su preimagen por cualquier carta (o por cartas cuyas imágenes cubren $A$). Por otra parte, podemos reemplazar las bolas por paralelepípedos en la definición.

Una de las primeras aplicaciones del teorema de Sard se encuentra en la teoría de Morse.

**Definición 1.3.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que un punto crítico $p \in U$ de $f$ es no degenerado si la matriz simétrica de las derivadas segundas de $f$ en $p$ (el hessiano de $f$ en $p$) es no degenerada.

Se puede ver que esta definición es invariante por difeomorfismos y así, se puede aplicar a funciones en variedades diferenciables. Demostraremos los siguientes resultados:

**Teorema 1.4.** *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $p$ un punto crítico no degenerado. Entonces existe una carta centrada en $p$ tal que la expresión coordenada de $f$ es*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(p) - \sum_{j=1}^{\lambda} x_j^2 + \sum_{j=\lambda+1}^{n} x_j^2. \tag{1.1}$$

*El número $\lambda$ está bien definido y se llama el índice de $f$ en $p$.*

**Teorema 1.5.** *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces existen funciones diferenciables* tan cercanas como queramos *a $f$ tal que todos sus puntos críticos son no degenerados.*

## 2. Teorema de Sard

Por las propiedades de los subconjuntos de medida nula, basta probar el teorema 1.1 cuando $M = \mathbb{R}^m$, $N = (0, 1)^n$ y $f$ está definida en un entorno abierto de $[0, 1]^n$ en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que el teorema ya está probado cuando $n < m$. Comenzamos con $n = m = 1$.

**Proposición 2.1.** *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. El conjunto de valores críticos es de medida nula.*

*Demostración.* Fijemos $N$ un número natural *grande*. Consideramos la partición de $[0, 1]$ en $N$ subintervalos de igual longitud. Sea $I$ uno de esos intervalos y supongamos que contiene algún punto crítico $p$ para $f$. Entonces, por la fórmula de Taylor, se tiene que $f(p+h) = f(p)+f''(q_h)h^2$, donde esté definido y para algún $q_h$ entre $p$ y $p + h$. Deducimos de este hecho que si $C$ es una cota superior para el valor absoluto de $f''$ entonces $f(I)$ está contenido en un intervalo de longitud menor o igual que $\frac{C}{N^2}$. Como mucho el conjunto de valores críticos está contenido en $N$ de esos intervalos, por lo que está contenido en una unión de intervalos cuya suma de longitudes no excede $\frac{C}{N}$, por lo que tenemos el resultado. □

Vamos a utilizar un criterio similar para el caso $n = m$.

**Proposición 2.2.** *Sea $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. El conjunto de valores críticos es de medida nula.*

*Demostración.* Denotemos $f_1, \ldots, f_n$ las funciones coordenadas de $f$. Como antes, fijemos $N$ un número natural *grande*. Consideramos la partición de $[0, 1]^n$ en $N^n$ hipercubos de igual volumen. Sea $I$ uno de esos hipercubos y supongamos que contiene algún punto crítico $p$ para $f$.

Hacemos un cambio ortogonal de coordenadas en el espacio de llegada para que $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}_{|p} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Esto es posible porque las $n$ filas de la matriz jacobiana son linealmente dependientes.

Realizamos un argumento similar al anterior a partir de la fórmula de Taylor en varias variables para $f_1, \ldots, f_n$ (utilizaremos el truncamiento en la primera derivada para $i = 1, \ldots, n-1$ y para la segunda en $n$).

Sea $C_1$ una cota para las derivadas primeras y $C_2$ una cota para las derivadas segundas. Entonces $f(I)$ está contenido en un paralelepípedo (de paredes ortogonales entre sí aunque posiblemente no paralelas a los hiperplanos coordenados) de volumen menor o igual que $\frac{C}{N^{n+1}}$, con $C := C_1^{n-1}C_2$. Como mucho el conjunto de valores críticos está contenido en a lo más $N^n$ de esos paralelepípedos, por lo que la suma de sus volúmenes no excede $\frac{C}{N}$, y tenemos el resultado. $\square$

*Observación* 2.3. De esta forma ya tenemos demostrado el teorema de Sard si $n \leq m$. La idea es continuar por inducción sobre $n$, por ejemplo.

Veamos el siguiente resultado auxiliar.

**Proposición 2.4.** *Supongamos que el teorema de Sard es cierto cuando* $\dim N < n$. *Sea* $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación diferenciable. Dado* $k \in \mathbb{N}$*, sea* $A_k$ *el conjunto de puntos donde todas las derivadas hasta orden* $k$ *se anulan y que al menos una derivada de orden* $k+1$ *es distinta de cero. Entonces la imagen de* $A_k$ *es de medida nula.*

*Demostración.* La idea es simple. Fijemos $p \in A_k$. Observemos que existe una derivada $k$-ésima $h$ de alguna componente de $f$ tal que una de sus derivadas no se anula. Por tanto, existe un entorno $V_p$ de $p$ tal que $N_p := h^{-1}(0) \cap V$ es una variedad de dimensión $n-1$ y además $A_k \cap V_p$ es un subconjunto de los valores críticos de $f_{|N_p}$. Deducimos que $f(A_k \cap V_p)$ es de medida nula por la hipótesis de la proposición y el resultado se sigue por cuestiones de numerabilidad. $\square$

Desgraciadamente el lugar de puntos críticos no es la unión de los $A_k$'s. Sin embargo el siguiente resultado ayuda algo.

**Proposición 2.5.** *Sea* $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación diferenciable. Dado* $k \in \mathbb{N}$*, sea* $B_k$ *el conjunto de puntos donde se anulan todas las derivadas hasta el orden* $k$*. Suponer que* $(k+1)m > n$*. Entonces, la imagen de* $B_k$ *es de medida nula.*

*Demostración.* Las ideas son las mismas que en la proposición 2.2. Sin embargo aquí podemos utilizar siempre el desarrollo de Taylor que se trunca en $k+1$. Tomamos una partición en $N^n$ hipercubos como en 2.2. Si $C$ es una cota para las derivadas de orden $k+1$, los hipercubos que contengan puntos críticos caen dentro de paralelepípedos de volumen a lo más $\frac{C^m}{N^{m(k+1)}}$. Por tanto, el volumen total no excede de $\frac{C^m}{N^{m(k+1)-n}}$ y tenemos el resultado. $\square$

Con estos mimbres podemos probar el resultado para funciones.

**Corolario 2.6.** *El teorema de Sard es cierto si* $\dim M = 1$.

*Demostración.* Basta probarlo para funciones $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$. De los resultados anteriores deducimos que el lugar de puntos críticos es igual a $B_n \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$. Ya hemos visto que las imágenes de estos conjuntos es de medida nula. $\square$

De manera análoga si $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}^m$, el el lugar de puntos críticos es igual a

$$C \cup B_r \cup \bigcup_{j=1}^{r-1} A_j, \tag{2.1}$$

donde $r$ es la parte entera de $\frac{n}{m}$ y $C$ es el lugar de puntos críticos en los que alguna de las primeras derivadas no se anula (este espacio es vacío si $m = 1$, pero no en general). El conjunto $C$ tiene un análogo para aplicaciones diferenciables cualesquiera; si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable, podemos definir $C$ como el conjunto de puntos críticos $p \in M$ tal que $df_p \neq 0$.

**Lema 2.7.** *Sea $f : N^n \to M^m$ diferenciable y sea $p \in C$. Entonces existe una carta $\mathbf{x}$ de $N$ centrada en $p$ y una carta $\mathbf{y}$ de $M$ centrada en $f(p)$ tal que la expresión coordenada de $f$ es*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)). \tag{2.2}$$

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del teorema de la función implícita. □

Para terminar la demostración del teorema de Sard utilizaremos el siguiente resultado de teoría de la medida:

**Teorema 2.8** (Fubini)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Dado $t \in \mathbb{R}$, sea $A_t := \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} | (t, x_2, \dots, x_n) \in A\}$. Supongamos que $\forall t \in \mathbb{R}$ se tiene que $A_t$ es de medida nula en $\mathbb{R}^{n-1}$. Entonces $A$ es de medida nula en $\mathbb{R}^n$.*

Con este resultado ya podemos terminar la demostración del teorema de Sard.

*Demostración del Teorema de Sard.* Lo veremos por inducción sobre $n$. Los primeros casos de la inducción son ciertos ya que el teorema está demostrado si $n < m$. Supongamos pues el teorema demostrado para $\dim N = n - 1$.

Según (2.1) basta que estudiemos las imágenes de $C$, $B_r$ y los $A_j$, $j = 1, \dots, r-1$ con $r := \left[\frac{n}{m}\right]$. Por 2.5, la imagen de $B_r$ es de medida nula. Aplicando la hipótesis de inducción y 2.4, tenemos el mismo resultado para cualquier $A_j$. Solo queda estudiar $C$.

Por argumentos estándar de numerabilidad, basta que estudiemos la imagen de $C$ en el entorno de uno de sus puntos, por lo que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x_1, \dots, x_n)$ se comporta como en (2.2) y que $f$ está definida en $[0,1]^n$. Dado $t \in [0,1]$, consideremos $f^t : [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ dado por

$$f^t(x_2, \dots, x_n) := (f_2(t, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(t, x_2, \dots, x_n)).$$

Por la forma de $f$, esta claro que $p = (x_1, \dots, x_n)$ es punto crítico de $f$ si y solo si $(x_2, \dots, x_n)$ es punto crítico de $f^{x_1}$. Por hipótesis de inducción, la imagen de los puntos críticos de $f^{x_1}$ es de medida nula en $\mathbb{R}^{m-1}$. En particular, la imagen de los puntos de $C$ es de medida nula por el teorema de Fubini. □

## 3. Teoría de Morse I

En primer lugar daremos una definición intínseca del hessiano en un punto crítico de una función diferenciable.

**Proposición 3.1.** *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $p$ un punto crítico. Sean $v, w \in T_pM$; consideremos un campo $Y$ definido en un entorno de $p$ tal que $Y_p = w$ (Y es una extensión de $w$. Entonces:*

(1) *El número real $v(Y(f))$ no depende de la extensión $Y$ de $w$ elegida; denotaremos este número $\mathrm{Hess}_p^f(v, w)$.*
(2) *La aplicación $\mathrm{Hess}_p^f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ es bilineal simétrica.*
(3) *Sea $\mathbf{x}$ una carta de $M$ que contiene a $p$ en su imagen. Sea $x_p \in \mathbb{R}^n$ las coordenadas de $p$ en la carta y sea $\hat{f}$ la expresión coordenada de $f$ en esa carta. Entonces la matriz de $\mathrm{Hess}_p^f$ en la base $\frac{\partial}{\partial x_1}_{|p}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}_{|p}$ es la matriz hessiana de $\hat{f}$ en $x_p$.*

*Demostración.* Observemos que si los apartados (1) y (2) son ciertos, el apartado (3) se deduce de la definición tomando como extensiones las derivadas parciales.

Los apartados (1) y (2) se van a probar simultáneamente. Fijemos $v, w \in T_pM$ y sean $X$ e $Y$ extensiones locales de $v$ and $w$. Entonces

$$v(Y(f)) - w(X(f)) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X,Y]_p(f) = df_p([X,Y]_p = 0,$$

por ser $p$ punto crítico de $f$. Por tanto, $v(Y(f)) = w(X(f))$; el término izquierdo de la igualdad depende solo de $v$ y no de $X$ y el de la derecha solo de $w$ y no de $Y$. Esto prueba (1) y la simetría de (2). La bilinealidad es evidente. □

**Definición 3.2.** Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$. Llamaremos índice de $p$ al índice de $\mathrm{Hess}_p^f$, es decir, la máxima dimensión de los subespacios de $T_pM$ donde $\mathrm{Hess}_p^f$ es definida negativa.

Esta definición es coherente con el enunciado de 1.4, como se puede comprobar calculando la matriz hessiana en las coordenadas obtenidas. Antes de demostrar 1.4 enunciamos un resultado elemental de Análisis:

**Proposición 3.3.** *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de un entorno abierto convexo de $0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = 0$. Entonces existen funciones diferenciables $g_1, \ldots, g_n$ tales que*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

*En particular,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = g_i(0), \quad i = 1, \dots, n.$$

*Demostración del teorema 1.4.* Seguiremos la demostración de Milnor que esencialmente se basa en la diagonalización de formas cuadráticas.

Supondremos que $f$ está definida en un entorno abierto convexo $U$ del origen en $\mathbb{R}^n$, 0 es el punto crítico no degenerado y $f(0) = 0$. Eventualmente restringiremos el abierto $U$ si es necesario. La condición de punto crítico nos permite aplicar dos veces la proposición 3.3 para encontrar funciones $h_{ij} : U \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

Simetrizando, podemos suponer que $h_{ij} = h_{ji}$. Observemos que la matriz $(h_{ij}(0))$ es simétrica y no degenerada por hipótesis.

Para demostrar el resultado supondremos que tenemos una igualdad

$$f(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 + \dots \pm x_{r-1}^2 + \underbrace{\sum_{i,j=r}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)},$$

con $h_{ij} = h_{ji}$. Denotemos $\tilde{f}$ la parte sobre la llave. Por ser 0 un punto crítico no degenerado podemos suponer tras un cambio lineal de coordenadas que el coeficiente de $h_{rr}(0) \neq 0$ es distinto de cero; restringiendo el abierto podemos suponer que $h_{rr}$ no se anula nunca. Sea $g : U \to \mathbb{R}$ la raíz cuadrada de $|h_{rr}|$; $g$ es diferenciable.

Podemos escribir

$$\tilde{f}(x) = h_{rr}(x) \left( x_r^2 + 2 \frac{x_r}{h_{rr}(x)} \sum_{j=r+1}^{n} x_j h_{ir}(x) \right) + \sum_{i,j=r+1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x).$$

Denotemos

$$F(x) = g(x) \left( x_r + \frac{1}{h_{rr}(x)} \sum_{i=r+1}^{n} x_i h_{ir}(x) \right).$$

Por el método de completar cuadrados, existen $\tilde{h}_{ij}$ funciones tal que $\tilde{h}_{ij} = \tilde{n}_{ji}$ cumpliendo:

$$\tilde{f}(x) = \pm F(x)^2 + \sum_{i,j=r+1}^{n} x_i x_j \tilde{h}_{ij}(x).$$

Consideramos un cambio de coordenadas $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{r-1}, F(x_1, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Para poder aplicar el teorema de la función inversa y ver que efectivamente es un cambio de variables, basta demostrar que $\frac{\partial F}{\partial x_r}(0) \neq 0$. Un sencillo cálculo da $\frac{\partial F}{\partial x_r}(0) = g(0)$, por lo que lo tenemos.

Denotemos $y_1, \ldots, y_n$ las nuevas coordenadas. Es claro que

$$f \circ \psi^{-1}(y) = \pm y_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^{n} y_i y_j \hat{h}_{ij}(y),$$

para ciertas funciones simétricas $\hat{h}_{ij}$. Esto garantiza el siguiente paso de la inducción. □

**Corolario 3.4.** *Los puntos críticos no degenerados son puntos críticos aislados.*

Antes de demostrar el teorema 1.5 en su generalidad lo veremos para abiertos de $\mathbb{R}^n$.

**Proposición 3.5.** *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Dado $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, denotamos $f_\mu : U \to \mathbb{R}$ la función tal que $f_\mu(x) := f(x) - \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$. Entonces, existe un conjunto $A$ de medida nula en $\mathbb{R}^n$ tal que si $\mu \notin A$, entonces, $f_\mu$ solo tiene puntos críticos no degenerados.*

*Demostración.* Sea $g : U \in \mathbb{R}^n$ la aplicación gradiente de $f$, es decir, $g(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$. Sea $p \in U$ y $\mu \in \mathbb{R}^n$. Observemos que $p$ es punto crítico de $f_\mu$ si y solo si $g(p) = \mu$. Denotemos $\mu_p := g(p)$.

Además, como la matriz jacobiana de $g$ en $p$ es la matriz hessiana de $f_{\mu_p}$ en $p$, $p$ es punto crítico no degenerado de $f_{\mu_p}$ si y solo si $p$ es un punto crítico de $g$.

Por el teorema de Sard, podemos encontrar valores regulares $\mu$ tan cercanos como queramos a 0. Cualquiera de ellos sirve para este resultado. □

El objetivo ahora es demostrar el enunciado *intuitivo* del teorema 1.5, demostrando un resultado similar al anterior para variedades cualquiera. Sea $M$ una variedad diferenciable. Por el teorema de encaje de Whitney, podemos suponer que $M \subset \mathbb{R}^N$ para algún $N$ suficientemente grande, con $M$ subvariedad cerrada.

**Proposición 3.6.** *Sea $M \subset \mathbb{R}^N$ una subvariedad cerrada de dimensión $n$. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_N)$, denotamos $f_\mu : M \to \mathbb{R}$ la función tal que $f_\mu(x) := f(x) - \sum_{i=1}^N \mu_i x_i$. Entonces, existe un conjunto $A$ de medida nula en $\mathbb{R}^N$ tal que si $\mu \notin A$, entonces, $f_\mu$ solo tiene puntos críticos no degenerados.*

*Demostración.* Sea $p \in M$; sabemos que existen $n$ coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ y un entorno abierto $V_p$ de $p$ en $M$ tal que la restricción $\pi_p$ de la proyección en esas coordenadas a $V_p$ es un difeomorfismo. Como ya es habitual, podemos suponer que una cantidad numerable de estos abiertos cubren $M$.

Fijemos $V$ uno de ellos, y por comodidad supondremos que las coordenadas elegidas son $x_1, \ldots, x_n$. Dado $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^{N-n}$, consideremos la función $f_{(0,\mu)}$ como en el enunciado (0 es en este caso una $n$-tupla). Por el resultado anterior, concluimos que existe un subconjunto $A_{\hat{\mu}}$ de medida nula en $\mathbb{R}^n$ tal que si $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}^n \setminus A_{\hat{\mu}}$, entonces la función $f_{\tilde{\mu},\hat{\mu}}$ solo tiene puntos críticos no degenerados en $V$.

Como consecuencia del teorema de Fubini, deducimos que existe un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, de medida nula, tal que si $\mu \notin A$, entonces $f_\mu$ no tiene puntos críticos no degenerados en $V$. Como sabemos que hay una familia numerable de tales $V$ que cubren $M$, obtenemos el resultado. $\square$

## 4. Una familia de funciones de Morse

**Definición 4.1.** Diremos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable es de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

Es importante observar que en algunos libros, para que una función sea de Morse se añade que a puntos críticos distintos les correspondan valores críticos distintos. Como al final de la sección anterior, supondremos que $M$ es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^N$.

**Teorema 4.2.** *Dado $q \in \mathbb{R}^N$, definimos $E_q : M \to \mathbb{R}$ la función dada por $E_q(p) := d(p,q)^2$, donde $d$ es la distancia euclídea. Entonces, existe $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que si $q \notin A$, entonces $E_q$ es una función de Morse.*

Veamos ahora cuál es la condición para que $p \in M$ sea un punto crítico de $E_q$. El siguiente resultado es útil ya que $L_q$ está globalmente definido en $\mathbb{R}^N$.

**Lema 4.3.** *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ función diferenciable y sea $N \subset M$ una subvariedad. Entonces $p \in N$ es punto crítico de $g := f_{|N}$ si y solo si $T_pN \subset \ker df_p$. Si $p \in N$ es punto crítico de $f$ (luego también de $g$), entonces $\operatorname{Hess}_p^g$ es la restricción de $\operatorname{Hess}_p^f$ a $T_pN$.*

Como consecuencia, los puntos críticos de $L_q$ son $q$ (si $q \in M$) y los puntos $p \in M$, $p \neq q$ tal que la recta que une $p$ con $q$ es perpendicular a $T_pM$. Además, si $q \in M$, entonces $q$ es punto crítico no degenerado (ya que su hessiano en $\mathbb{R}^N$ es definido positivo). Queda por caracterizar cuándo los demás puntos críticos son no degenerados. Para ello tenemos que introducir nuevas definiciones.

Ya nos hemos encontrado en los teoremas de aproximación de Whitney con la noción de fibrado normal $TM^\perp$ a una subvariedad $M^n$ de $\mathbb{R}^N$. Recordemos:

$$TM^\perp := \{(p,v) \in M \times \mathbb{R}^N | v \perp T_pM\}.$$

Recordemos que $TM^\perp$ es una variedad diferenciable de dimensión $N$. Tenemos por otra parte el fibrado tangente $TM$ que también es subvariedad de $M \times \mathbb{R}^N$;

identificaremos este espacio como subvariedad de $T\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ de forma que $\{p\} \times \mathbb{R}^N = T_p\mathbb{R}^N$.

**Definición 4.4.** Un campo de $M \times \mathbb{R}^N$ a lo largo de un abierto $V$ de $M$ es una aplicación $X : V \to M \times \mathbb{R}^N$ diferenciable tal que $pr_1(X_p) \in T_p\mathbb{R}^N$, $\forall p \in V$. Si $X(V) \subset TM$ diremos que el campo es tangencial y si $X(V) \subset TM^{\perp}$ diremos que el campo es normal.

**Notación 4.5.** Como dado un campo $X : V \to M \times \mathbb{R}^N$ pensaremos en las imágenes como vectores tangentes, escribiremos

$$X_p = \sum_{i=1}^{N} f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}_{|p}, \quad f_i : V \to \mathbb{R} \text{ diferenciable.}$$

**Lema 4.6.** *El espacio $\Gamma^V$ de todos los campos sobre $V$, el espacio $\mathfrak{X}(V)$ de todos los campos tangentes y el espacio $\mathfrak{X}^{\perp}(V)$ de todos los campos normales son $\mathcal{C}^{\infty}(V)$-módulos, donde $\mathcal{C}^{\infty}(V)$ es el álgebra de las funciones diferenciables de $V$ en $\mathbb{R}$.*

**Lema 4.7.** *Sean $X \in \Gamma^V$, $V \subset M$ abierto. Entonces existen una descomposición única $X = X^T + X^{\perp}$ tal que $X^T$ es tangencial y $X^{\perp}$ es normal; llamaremos a $X^T$ la componente tangencial de $X$ y a $X^{\perp}$ la componente normal. Las aplicaciones inducidas $\Gamma^V \to \mathfrak{X}(V)$ y $\Gamma^V \to \mathfrak{X}^{\perp}(V)$ son homomorfismos de $\mathcal{C}^{\infty}(V)$-módulos.*

**Definición 4.8.** Seann $X \in \mathfrak{X}(V)$ y $Y \in \Gamma^V$, $V \subset M$ abierto, con $Y = sum_{j=1}^{N} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Llamaremos derivada covariante de $Y$ con respecto a$X$ al campo $\nabla_X Y \in \Gamma^V$ tal que

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^{N} X(f_i) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

**Proposición 4.9.** *Dado $V \subset M$ abierto la aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(V) \times \Gamma^V \to \Gamma^V$ cumple:*

1. *$\nabla$ es $\mathbb{R}$-lineal.*
2. *Si $f \in \mathcal{C}^{\infty}(V)$, $X \in \mathfrak{X}(V)$, $Y \in \Gamma^V$ se tiene que $\nabla f X Y = f \nabla_X Y$ y $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.*
3. *Si $X \in \mathfrak{X}(V)$, $Y, Z \in \Gamma^V$, entonces $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.*

Consideremos el operador de traslación $\exp^{\perp} : TM^{\perp} \to \mathbb{R}^N$ definido por la fórmula $\exp^{\perp}(p, v) := p + v$. Vamos a relacionar los puntos críticos de esta aplicación con los de las funciones $L_q$.

**Definición 4.10.** Diremos que $e \in \mathbb{R}^N$ es un punto focal de $M$ con respecto a $p$, si existe $v \in T_pM^{\perp}$ tal que $(p, v)$ es un punto crítico de $\exp^{\perp}$ y $e = \exp^{\perp}(p, v)$. La multiplicidad de $e$ como punto focal con respecto a $p$ es $\dim \ker(d\tau)_{(p,v)}$. Diremos que $e$ es punto focal de $M$ si es un valor crítico de $\exp^{\perp}$.

Como consecuencia del teorema de Sard, el conjunto de puntos focales de $M$ es de medida nula.

**Definición 4.11.** Llamaremos segunda forma fundamental de $M$ en $\mathbb{R}^N$ al objeto que asocia a cada abierto $V \subset M$ una aplicación $II : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \to \mathfrak{X}^\perp(V)$ tal que si $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, entonces $II(X,Y) := (\nabla_X Y)^\perp$. Recordemos que la primera forma fundamental $I : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \to \mathcal{C}^\infty(V)$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

**Proposición 4.12.** *La segunda forma fundamental es $\mathcal{C}^\infty(V)$-bilineal y simétrica para todo abierto $V$ de $M$. En particular, si $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ y $p \in V$, $II(X,Y)_p$ solo depende de $X_p$ e $Y_p$. Por tanto, si $p \in M$ podemos definir una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal simétrica $II_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp$ como evaluación de $II$.*

Por supuesto, la primera forma fundamental también se evalua en cada punto y da lugar a un producto escalar $I_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.

**Corolario 4.13.** *Sea $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(V)$, $V$ abierto de $M$. Entonces $H_\eta : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \to \mathcal{C}^\infty(V)$ $\mathcal{C}^\infty(V)$-bilineal y simétrica. En particular, si $p \in M$ y $v \in T_pM^\perp$ se puede definir una forma $\mathbb{R}$-bilineal simétrica $H_(p,v) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.*

Recordemos que si $p \in M$, en $T_pM$ tenemos el producto escalar obtenido por restricción del producto escalar habitual de $\mathbb{R}^N$. El siguiente resultado es consecuencia inmediato de resultados de álgebra lineal.

**Proposición 4.14.** *Sea $p \in M$ y $v \in T_pM^\perp$ tal que $\|v\| = 1$.*

(1) *Entonces existe una base ortonormal $w_1, \dots w_p$ de $T_pM$ tal que la matriz de $H_{p,v}$ en esta base es diagonal de entradas $t_1, \dots, t_n$ todas reales y se llaman curvaturas principales de $p$ en la dirección de $v$. Los inversos de las curvaturas principales no nulas se llaman radios de curvatura.*

(2) *Existe una única aplicación lineal $S_{p,v} : T_pM \to T_pM$, llamada operador autoadjunto de $H_{p,v}$, tal que $\forall v_1, v_2 \in T_pM$ se tiene $H_{p,v}(v_1, v_2) = \langle S_{p,v}(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, S_{p,v}(v_2)\rangle$.*

Como ya vimos al hablar de fibrado normal, la aplicación $\exp^\perp$ es un difeomorfismo local en los puntos de la forma $(p, 0)$. Para estudiar lo que ocurre en los demás, los expresaremos de la forma $(p, tv)$ con $\|v\| = 1$. Para ello, necesitamos dar una descripción razonable de los espacios tangentes en $TM^\perp$.

**Lema 4.15.** *Sea $p \in M$; entonces $(p, 0)$ está en dos subvariedades de $TM^\perp$. Una de ellas es la sección nula $M \times \{0\}$; identificamos el espacio tangente a esta subvariedad en $(p, 0)$ con $T_pM$. Otra es $\{p\} \times T_pM^\perp$; identificamos el espacio tangente a esta subvariedad en $(p, 0)$ con $T_pM^\perp$. Estos dos subespacios solo se intersecan en el $0$ en $T_{(p,0)}TM^\perp$ y por dimensiones, su suma directa da el espacio total.*

Para calcular el espacio tangente en los demás puntos, fijemos $(p, tv)$ como antes. Sea ahora $\eta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ tal que $\eta_p = v$ (su existencia queda garantizada por las particiones de la unidad. Consideremos la traslación $\tau_\eta^t : T_pM^\perp \to T_pM^\perp$ dada por $\tau_\eta^t(q, w) := (q, w + t\eta_q)$. Es claramente un difeomorfismo que envía $(p, 0)$ a $(p, tv)$. Por tanto, la descomposición anterior nos da lugar a una descomposición en suma directa de $T_{(p,tv)}TM^\perp$; denotaremos $(T_pM)_{\eta,t}$ al primer subespacio y $(T_pM)^\perp_{\eta,t}$; al segundo. Como la traslación respeta las fibras del fibrado podemos identificar de nuevo $(T_pM)^\perp_{\eta,t}$ con $(T_pM)^\perp$. Sin embargo $(T_pM)_{\eta,t}$ depende de $\eta$ aunque siempre es isomorfo a $T_pM$ mediante $(d\tau_\eta^t)_{(p,0)}$.

Consideremos $(d\exp^\perp)_{(p,tv)} : T_{(p,tv)}TM^\perp \to \mathbb{R}^N$. Un sencillo ejercicio nos da que esta aplicación es injectiva cuando es restringida a $(T_pM)^\perp_{\eta,t} = (T_pM)^\perp$ (con la identificación, es la inclusión). Por tanto, se puede probar:

**Lema 4.16.** *El punto $(p, tv)$ es crítico para $\exp^\perp$ si y solo si existe un vector en $(T_pM)_{\eta,t}$ cuya imagen está en $(T_pM)^\perp$.*

Debido a este lema tiene interés calcular, dado $w \in T_pM$, el elemento

$$\tilde{w} := (d\exp^\perp)_{(p,tv)} \circ (d\tau_\eta^t)_{(p,0)}(w) = (d(\exp^\perp \circ \tau_\eta^t))_{(p,0)}(w).$$

Fijemos una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. Entonces $\tilde{w} = \tilde{\alpha}'(0)$ donde $\tilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM^\perp$ es tal que $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + t\eta_{\alpha(s)})$. Por tanto, $\tilde{w} = \tilde{\alpha}'(0) = \alpha'(0) + t(\eta \circ \alpha)'(0)$ y este es el vector que tenemos que calcular.

**Lema 4.17.** *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo que extiende $w$, entonces $(\eta \circ \alpha)'(0) = t(\nabla_X \eta)_p$.*

Nos planteamos pues cuándo es posible que $w - t(\nabla_X \eta)_p$ tenga componente tangencial nula. Sea $Y$ un campo tangencial cualquiera; recordemos que $\langle \eta, Y\rangle$ es idénticamente nula:

$$\begin{aligned}(4.1)\quad \langle ((\nabla_X\eta)_p)^T, Y_p\rangle &= \langle (\nabla_X\eta)_p, Y_p\rangle = -\langle \eta_p, (\nabla_X Y)_p\rangle = \\ &= -\langle \eta_p, ((\nabla_X Y)_p)^\perp\rangle = -H_{\eta_p}(X_p, Y_p) = -\langle S_{\eta_p}(X_p), Y_p\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto $((\nabla_X\eta)_p)^T = S_{\eta_p}(w)$ y debemos pues calcular cuándo $w - tS_{\eta_p}(w)$.

Por tanto

**Proposición 4.18.** *Los puntos críticos de $\exp^\perp$ son los elementos de la forma $(p, tv)$ con $\|v\| = 1$ y $t$ radio de curvatura de $H_{p,v}$. Por tanto los puntos focales son de la forma $p + tv$ con $t$ radio de curvatura de $v$.*

**Teorema 4.19.** *Fijemos $q \in \mathbb{R}^N$ y consideremos $L_q : M \to \mathbb{R}$. Sea $p \in M$, $p \neq q$ un punto crítico de $L_q$. Denotemos $t := \|q - p\|$ y $v := (q - p)/t$. Entonces, el hessiano de $L_q$ en $p$ es la forma bilineal $I_p - tH_{p,v}$.*

**Corolario 4.20.** *Sea $M \subset \mathbb{R}^N$ una subvariedad diferenciable. Sea $q \in \mathbb{R}^N$ que no es un punto focal de $M$. Entonces, $L_q : M \to \mathbb{R}$ es una función de Morse.*

**Ejercicio 4.21.** *Interpretar cuál sera en ese caso el índice de los puntos críticos no degenerados $p \in M$ en función de los puntos focales que se encuentren entre $p$ y $q$.*