CURVAS ALGEBRAICAS

ENRIQUE ARTAL BARTOLO

Índice

1. Variedades analíticas 1
2. Aplicaciones holomorfas y diferenciables 2
3. Ejemplos de variedades analíticas 4
4. Curvas algebraicas planas 5
5. Automorfismos proyectivos, rectas y cónicas 7
6. Cúbicas 9
7. Funciones meromorfas y divisores 11

1. Variedades analíticas

Recordemos la definición de variedad diferenciable.

Definición 1.1. Una *variedad diferenciable de dimensión n* es un espacio topológico M junto con un atlas diferenciable, es decir una familia $\{(V_i, U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i\in I}$ donde

(a) $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de M.
(b) $\mathbf{x}_i : U_i \to V_i$ es un homeomorfismo, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ abierto.
(c) $\forall i, j \in I$, $\mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \mathbf{x}_j^{-1}(V_i \cap V_j)$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Observación 1.2. Estrictamente hablando, una variedad diferenciable está asociada cuando el atlas es maximal, es decir cualquier aplicación que verifique (b) y (c) es un elemento del atlas. Un atlas (aunque no sea maximal) determina la estructura de variedad diferenciable.

A partir de este concepto se definen los de función y aplicación diferenciables.

Definición 1.3. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es *diferenciable* si para todos los miembros de un atlas $\{(V_i, U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i\in I}$ se cumple que $f \circ \mathbf{x}_i : U_i \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Definición 1.4. Una aplicación $f : M^m \to N^n$ entre variedades diferenciables es *diferenciable* si $\forall x \in M$ existen cartas $\mathbf{x} : U_x \to V_x \subset M$ e $\mathbf{y} : U_{f(x)} \to V_{f(x)} \subset N$ tales que $f(V_x) \subset V_{f(x)}$ y $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U_x \to U_{f(x)}$ es $\mathcal{C}^\infty$.

Para definir el concepto de variedad analítica y de funciones y aplicaciones analíticas debemos realizar los siguientes cambios:

- Reemplazamos $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ en la Definición 1.1(b).
- Reemplazamos $\mathcal{C}^\infty$ por *holomorfo* en la Definición 1.1(c) y en las Definiciones 1.3 y 1.4.

Propiedades 1.5. Recordemos algunas definiciones y propiedades de las funciones holomorfas.

($\mathscr{O}$1) Una función $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto, es *holomorfa* si es continua y si es holomorfa en cada variable.

($\mathscr{O}$2) Una aplicación $f : U \to V$, $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ abiertos, es *holomorfa* si cada componente lo es.

($\mathscr{O}$3) Las funciones holomorfas cumplen el principio de prolongación analítica: si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa, U es conexo, V es abierto, $\emptyset \neq V \subset U$ y $f_{|V} \equiv 0$, entonces, $f \equiv 0$.

($\mathscr{O}$4) Las funciones holomorfas cumplen el principio del módulo máximo: si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa, U conexo, y $|f|$ alcanza un máximo (relativo) en $x \in U$, entonces f es constante.

($\mathscr{O}$5) Las funciones holomorfas cumplen fórmulas de tipo Cauchy.

Notación 1.6. Habitualmente las variedades analíticas de dimensión 1 se llaman *superficies de Riemann*.

2. Aplicaciones holomorfas y diferenciables

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. El objeto fundamental asociado a f es su diferencial, que es una aplicación diferenciable $d^{\mathbb{R}} f : U \to \operatorname{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$, dada por la matriz jacobiana. La manera adecuada de interpretar $\operatorname{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ es como $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, de manera que la j-ésima columna de una matriz se corresponde con la imagen por la aplicación correspondiente del j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos ahora que $V \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto y que $f : U \to \mathbb{C}^m$ es una aplicación holomorfa. Mediante la matriz jacobiana (compleja) podemos definir una aplicación $d^{\mathbb{C}} f : U \to \operatorname{Mat}(m \times n; \mathbb{C})$ que es holomorfa. Podemos identificar $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ mediante las partes real e imaginaria; si interpretamos f como una aplicación de un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^{2m}$, podemos considerar $d^{\mathbb{R}} f : U \to \operatorname{Mat}(2m \times 2n; \mathbb{R})$.

Observación 2.1. Como antes, identificamos $\operatorname{Mat}(m \times n; \mathbb{C})$ con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ (utilizando las bases canónicas de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$). En la identificación $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$, la $\mathbb{C}$-base canónica $e_1, \dots, e_n$ se convierte en la $\mathbb{R}$-base canónica $e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n$. Esto permite identificar $\operatorname{Mat}(2m \times 2n; \mathbb{R})$ con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$.

Como $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, la correspondiente *inclusión* de $\operatorname{Mat}(m \times n; \mathbb{C})$ en $\operatorname{Mat}(2m \times 2n; \mathbb{R})$ se produce si reemplazamos cada entrada de una matriz $(a_{jk}) \in \operatorname{Mat}(m \times n; \mathbb{C})$ por la 2×2-caja $\left(\begin{smallmatrix} \Re a_{jk} & -\Im a_{jk} \\ \Im a_{jk} & \Re a_{jk} \end{smallmatrix}\right)$.

Las condiciones de Cauchy-Riemann se interpretan en el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{C}^m$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty$. Consideremos la diferencial (real) $d^{\mathbb{R}} f : U \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$. Entonces, f es holomorfa si y solo si $d^{\mathbb{R}} f(U) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$.*

Para las aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$ son esenciales los teoremas de la función implícita y de la función inversa.

Ejercicio 2.3. *Enuncia y demuestra el teorema de la función inversa holomorfo utilizando la Proposición* 2.2.

Veamos ahora una versión particular del teorema de la función implícita con una demostración que utiliza la variable compleja.

Teorema 2.4 (Teorema de la función implícita)**.** *Sea U un entorno abierto de $0 \in \mathbb{C}^2$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$. Entonces, existen V, W entornos abiertos de $0 \in \mathbb{C}$ y $h : V \to W$ holomorfa, tales que*

$$f^{-1}(0) \cap (V \times W) = \{(x, h(x)) \mid x \in V\}.$$

Demostración. Dado $r > 0$ denotaremos $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ y $\bar{\Delta}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\{0\} \times \bar{\Delta}_\varepsilon \subset U$. Por la condición sobre la derivada, existe $h : \bar{\Delta}_\varepsilon \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en Δ_ε tal que $f(0, y) = yh(y)$, $|y| \leq \varepsilon$ y $h(0) \neq 0$.

Es más, por continuidad podemos suponer, tomando ε más pequeño si es necesario, que h no se anula, por lo que $f(0, y) \neq 0$ si $0 < |y| \leq \varepsilon$. Como la circunferencia $|y| = \varepsilon$ es un compacto, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que$f(x, y) \neq 0$ si $|x| < \delta$ y $|y| = \varepsilon$.

Consideremos la función

$$\alpha : \Delta_\delta \to \mathbb{C}, \quad \alpha(x) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=\varepsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)} dy.$$

Está bien definida y es holomorfa. Recordemos el siguiente resultado de variable compleja.

Teorema 2.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ entorno abierto de 0 y sea $g : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Supongamos que $\bar{\Delta}_\varepsilon \subset U$ y que $g(y) \neq 0$ si $|y| = \varepsilon$. Sea $Z := \{x \in \Delta_\varepsilon \mid g(x) = 0\}$ (es un conjunto finito) y dado $x \in Z$, denotamos $m_g(x)$ su multiplicidad como cero de g. Entonces,*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=\varepsilon} \frac{g'(y)}{g(y)} dy = \sum_{x \in Z} m_g(x).$$

Del Teorema 2.5 deducimos por una parte que $\alpha(0) = 1$; por otra parte, $\operatorname{Im} \alpha \subset \mathbb{Z}$. Por continuidad, tenemos que α es constante igual a 1 por lo que podemos considerar una función $\beta : \Delta_\delta \to \Delta_\varepsilon$ tal que $\beta(x)$ es la única solución de $f(x, y) = 0$, para x fijo, $|y| \leq \varepsilon$.

El Teorema 2.5 tiene la siguiente generalización.

Teorema 2.6. *Con las hipótesis del Teorema 2.5, sea $h : U \to \mathbb{C}$ otra función holomorfa. Entonces,*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=\varepsilon} h(y) \frac{g'(y)}{g(y)} dy = \sum_{x \in Z} m_g(x) h(x).$$

Deducimos que

$$\beta(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|y|=\varepsilon} y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)} dy,$$

por lo que β es holomorfa y el resultado se tiene tomando $V = \Delta_\varepsilon$ y $W = \Delta_\delta$. □

Recordemos que una variedad diferenciable es orientable si existe un atlas que cumple que las matrices jacobianas de todos los cambios de cartas poseen determinante positivo. Si una variedad es analítica, al estudiar los cambios de carta estos son holomorfos. El siguiente resultado nos garantiza que todas las variedades analíticas son orientables (de hecho, orientadas).

Lema 2.7. *Sea $\psi : \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$ la aplicación obtenida como en la Observación 2.1. Entonces, $\det(\psi(A)) > 0$, $\forall A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$.*

Demostración. Como $\psi(I_n) = I_{2n}$, basta demostrar que $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ es conexo. Es trivialmente cierto para $n = 1$ y que se trata de $\mathbb{C}^*$. Por inducción se deduce el caso general. □

Ejercicio 2.8. *Desarrolla la inducción.*

3. Ejemplos de variedades analíticas

El primer ejemplo es obviamente $\mathbb{C}^n$ (tomando como atlas la identidad). En general, si X es una variedad analítica y $V \subset X$ es un abierto, V también es variedad analítica.

El primer ejemplo no trivial es el espacio proyectivo. Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces:

$$\mathbb{P}(V) := \{L \subset V \text{ subespacio vectorial } \mid \dim L = 1\} = V \setminus \{0\}/\sim, \quad v \sim v \Leftrightarrow w = \lambda v, \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Denotaremos $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$; la clase de equivalencia de $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se denota $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ (coordenadas homogéneas). Dos elementos en coordenadas homogéneas son iguales si estas son proporcionales y no tienen sentido las coordenadas homogéneas nulas.

Como espacios topológicos, consideramos su topología cociente; es fácil ver que $\mathbb{P}^n$ es Hausdorff y la aplicación

$$\psi : \mathbb{S}^{2n+1} := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{j=0}^{n} |x_j|^2 = 1\} \to \mathbb{P}^n,$$

$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_n) := [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$, demuestra que $\mathbb{P}^n$ es compacto.

Dado $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, denotamos $U_j := \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_j \neq 0\}$. Recordemos que el valor de x_j no está bien definido en coordenadas homogéneas, pero si su nulidad o no. Es inmediato ver que U_j es abierto y que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0}^n U_j$.

Consideremos $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in U_j$; como $x_j \neq 0$, tenemos

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = [x_0 x_j^{-1} : x_1 x_j^{-1} \cdots : x_{j-1} x_j^{-1} : 1 : x_{j+1} x_j^{-1} : \cdots : x_n x_j^{-1}],$$

lo que permite establecer una biyección $\varphi_j : \mathbb{C}^n \to U_j$, ya que las restantes coordinadas están determinadas.

Es inmediato comprobar que $V_0 \cap V_1 = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 x_1 \neq 0\}$ y que

$$\varphi_0^{-1}(V_0 \cap V_1) = \varphi_1^{-1}(V_0 \cap V_1) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n \mid y_1 \neq 0\}.$$

Además:

$$(y_1, \ldots, y_n) \overset{\varphi_0}{\longmapsto} [1 : y_1 : \cdots : y_n] = [y_1^{-1} : 1 : y_2 y_1^{-1} \cdots : y_n y_1^{-1}] \overset{\varphi_1^{-1}}{\longmapsto} (y_1^{-1}, y_2 y_1^{-1}, \ldots, y_n y_1^{-1}).$$

Observamos que el cambio de carta es holomorfo; para los demás cambios de carta se procede análogamente y tenemos que $\mathbb{P}^n$ es una variedad analítica.

Ejemplo 3.1. Veamos el caso particular $n = 1$. En este caso $\mathbb{P}^1 \setminus U_0$ solo contiene un punto, $[0 : 1]$, y es inmediato ver que $\mathbb{P}^1$ es homeomorfo a la compactificación de Alexandroff de $U_0 \equiv \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, es decir, $\mathbb{P}^1$ es homeomorfo a la esfera de dimensión 2. Es habitual identificar $\mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde $[1 : t] \leftrightarrow t$, $t \in \mathbb{C}$, y $[0 : 1] \leftrightarrow \infty$. En esta situación, la aplicación $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, dada por $t \mapsto t^{-1}$, corresponde al cambio de cartas que debemos realizar cuando queramos estudiar propiedades en un entorno de ∞.

Ejemplo 3.2. Estudiaremos también el caso particular $n = 2$. En este caso denotaremos los tres abiertos como U_x, U_y, U_z, donde $U_x := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x \neq 0\}$; una definición similar se da para U_y y U_z. Identificaremos U_z con $\mathbb{C}^2$ con coordenadas x, y; se puede ver $\mathbb{P}^2$ como una compactificación de $\mathbb{C}^2$, donde estamos añadiendo $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{P}^1$, identificado con las direcciones (complejas) de $\mathbb{C}^2$.

Ejercicio 3.3. *Demuestra que si X es una variedad analítica compacta, las únicas funciones holomorfas definidas en X son las constantes.*

Las subvariedades analíticas se definen de la misma manera que en el caso diferenciable.

Ejercicio 3.4. *Las únicas subvariedades analíticas compactas y conexas de $\mathbb{C}^n$ son los puntos.*

Hay otras maneras de construir variedades analíticas. Sea X una variedad analítica y sea G un grupo con una acción sobre X, denotada por $g \cdot x$; denotaremos $\varphi_g : G \to G$ la *traslación* por g.

Definición 3.5. Diremos que la acción es:

(a) *Libre* si $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$, donde e es el elemento neutro de G.
(b) La acción es propiamente discontinua si $\forall x \in X$, $\exists V \subset X$ entorno abierto de x tal que $\#\{g \in G \mid \varphi_g(V) \cap V \neq \emptyset\} < \infty$; para una acción libre en un espacio Hausdorff, esto equivale a que $\forall x \in X$, $\exists V \subset X$ entorno abierto de x tal que $\varphi_g(V) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow g = e$.
(c) *Analítica* si $\forall g \in G$, φ_g es holomorfa (luego biholomorfa).

Consideremos el cociente $Y := X/G$ y la aplicación $\pi : X \to Y$. Esta aplicación es abierta y sobreyectiva por lo que se deduce que Y es segundo numerable. Además, es fácil ver Y es Hausdorff. Efectivamente, consideremos $Gp \neq Gq$ en Y; es decir, $p, q \in X$ no están en la misma órbita. Sean V_p, V_q entornos abiertos disjuntos de p, q en X como en la Definición 3.5(b). Entonces $\pi(V_p)$ y $\pi(V_q)$ son los entornos que separan Gp y Gq.

La estructura de variedad analítica viene dada como sigue: sea $Gp \in Y$. Escojamos V_p como en la Definición 3.5(b) tal que exista una carta $\mathbf{x} : U \to V_p$, U abierto de $\mathbb{C}^n$. Como $\pi(V_p)$ es un entorno abierto de Gp y $\pi : V_p \to \pi(V_p)$ es homeomorfismo, también lo es $\pi \circ \mathbf{x} : U \to \pi(V_p)$. Es fácil ver que de esta manera obtenemos un atlas.

El siguiente resultado se comprueba como en el caso diferenciable.

Proposición 3.6. *Con las notaciones anteriores, sea $f : X \to Z$ una aplicación holomorfa tal que $\forall g \in G$ y $\forall x \in X$, $f(x) = f(g \cdot x)$. Entonces, existe una única aplicación holomorfa $h : Y \to Z$ tal que $h \circ \pi = f$.*

Ejercicio 3.7. *Considera la acción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}$ por traslación. Demuestra que la variedad analítica $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ es isomorfa a $\mathbb{C}^*$.*

Ejercicio 3.8. *Un retículo Λ en $\mathbb{C}^n$ es un subgrupo abeliano libre de rango $2n$ que engendra $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial. Demuestra que la acción de Λ en $\mathbb{C}^n$ por traslación es libre, propiamente discontinua y analítica. Demuestra que el cociente $\mathbb{C}^n/\Lambda$ es compacto y descríbelo para $n = 1$.*

4. Curvas algebraicas planas

Consideremos un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$. La curva plana afín asociada a f es $C_f := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Apoyados en el teorema de la función implícita, consideramos

$$C_f^* := \left\{ (x, y) \in C_f \;\middle|\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0) \right\}.$$

Ejercicio 4.1. *Encuentra polinomios f para los que $C_f^* = \emptyset$.*

Proposición 4.2. *Con las notaciones anteriores, C_f^* es una superficie de Riemann.*

Demostración. Dado $p_0 := (x_0, y_0) \in C_f^*$, tenemos dos posibilidades.

Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \neq 0$. En este caso, aplicando el teorema de la función implícita, tenemos entornos V_{p_0} y W_{q_0} de x_0 e y_0 en $\mathbb{C}$, y $\varphi_{p_0} : V_{p_0} \to W_{p_0}$ tales que $\varphi_{p_0}(x_0) = y_0$ y

$$U_{p_0} := C_f^* \cap (V_{p_0} \times W_{p_0}) = \{(x, \varphi_{p_0}(x)) \mid x \in V_{p_0}\}.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \neq 0$. Intercambiando los papeles de x e y tenemos V_{p_0} y W_{q_0} de x_0 e y_0 en $\mathbb{C}$, y $\varphi_{p_0} : W_{p_0} \to V_{p_0}$ tales que $\varphi_{p_0}(y_0) = x_0$ y

$$U_{p_0} := C_f^* \cap (V_{p_0} \times W_{p_0}) = \{(\varphi_{p_0}(y), y) \mid y \in W_{p_0}\}.$$

En el primer caso, obtenemos una carta $\mathbf{x}_{p_0} : V_{p_0} \to U_{p_0}$ y en el segundo $\mathbf{x}_{p_0} : W_{p_0} \to U_{p_0}$. Obtenemos un atlas ya que los cambios de cartas son holomorfos. En efecto, para dos cartas del mismo tipo el cambio de cartas es la identidad. Si tenemos un cambio de cartas entre una del primer tipo y otra del segundo, tenemos:

$$x \mapsto (x, \varphi(x)) \mapsto \varphi(x). \qquad \square$$

Ejercicio 4.3. *Demuestra que para $f(x, y) = x^d + y^d - 1$, $C_f = C_f^*$.*

Ejercicio 4.4. *Describe C_f^* que para $f(x, y) = x^d + y^d$; ¿cuántas componentes conexas tiene?*

Estudiemos lo que ocurre en $\mathbb{P}^2$. Si $f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, dado $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$, la expresión $f(x, y, z)$ no tiene ningún sentido, ya que en general, si $t \in \mathbb{C}^*$, $f(tx, ty, tz) \neq f(x, y, z)$. Hay polinomios que sin cumplir la igualdad están mejor situados para este problema.

Definición 4.5. Un polinomio $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ es homogéneo de grado d si es suma de monomios de grado d.

Observación 4.6. Esta definición equivale a pedir que $F(tx_0, tx_1, \ldots, tx_n) = t^d F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. En este caso, aunque sigue sin tener sentido evaluar $F(x, y, z)$ en coordenadas homogéneas, sí que lo tiene considerar si el valor es cero o no.

Definición 4.7. Dado $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinomio homogéneo, la curva proyectiva asociada a f es $C_F := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$.

Ejercicio 4.8. *Demuestra que C_F es cerrado en $\mathbb{P}^2$, luego compacto.*

Ejercicio 4.9. *Comprueba la identidad de Euler de un polinomio $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ homogéneo de grado d:*

$$\sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = d\ f.$$

Por analogía con el caso anterior, denotaremos

$$C_F^* := \left\{ [x : y : z] \in C \mid \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \right) \neq (0, 0, 0) \right\}.$$

Proposición 4.10. *Con las notaciones anteriores, C_F^* es una superficie de Riemann.*

Demostración. Debemos construir un atlas para C_F^*. Vamos a encontrar cartas cuyo dominio contenga cualquier punto y luego veremos que los cambios son analíticos. Sea $p_0 := [x_0 : y_0 : z_0]$; supongamos que $z_0 \neq 0$ y denotemos $a := x_0 z_0^{-1}$ y $b := y_0 z_0^{-1}$.

Denotemos $f(x,y) := F(x,y,1)$. Veamos que $C_F^* \cap U_z = C_f^*$. Es obvio que $C_F^* \cap U_z = C_f^*$. Además, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,1)$$

y

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,1) = d\ f(x,y).$$

Con estos datos deducimos la igualdad $C_F^* \cap U_z = C_f^*$. Utilizando la Proposición 4.2, tenemos dos posibles tipos de cartas:

$$x \mapsto [x : h(x) : 1], \quad y \mapsto [h(y) : y : 1].$$

Una situación análoga se da para U_x y U_y. Es fácil ver que los cambios de carta son holomorfos. Si tenemos una carta del tipo $x \mapsto [x : h(x) : 1]$ y otra del tipo $z \mapsto [h(z) : 1 : z]$, obtendremos:

$$x \mapsto [x : h(x) : 1] = [xh(x)^{-1} : 1 : h(x)^{-1}] \mapsto h(x)^{-1}.$$

Las demás funcionan igual. □

Observación 4.11. En la demostración hemos visto que una curva proyectiva es unión de tres curvas afines. Una curva afín también determina una curva proyectiva. Sea $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ un polinomio de grado d; la *homogeneización* de este polinomio es el polinomio $F(x,y,z) := z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Observemos que $F(x,y,1) = f(x,y)$. Si C_f es la curva afín asociada a f, entonces C_F es la *proyectivización* de C_f.

Descompongamos $f(x,y) := \sum_{j=0}^d f_j(x,y)$, f_j polinomio homogéneo de grado j. Entonces, es fácil ver que $F(x,y,z) = \sum_{j=0}^d f_j(x,y) z^{d-j}$.

Ejercicio 4.12. *Demuestra que un polinomio homogéneo $f_d(x,y)$ de grado d se descompone de forma única como $cx^a y^b \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j y)^{m_j}$, donde $c \in \mathbb{C}^*$, $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$, dos a dos distintos, $r \geq 0$ y $m_j > 0$, $j = 1, \dots, r$.*

Ejercicio 4.13. *Demuestra que si $d > 0$, $C_F \setminus C_f$ es un conjunto finito (no vacío) de puntos.*

Ejercicio 4.14. *Demuestra que una curva algebraica (proyectiva o afín) no posee puntos aislados.*

5. Automorfismos proyectivos, rectas y cónicas

Sea $A \in \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{C})$; sabemos que A define un automorfismo lineal de $\mathbb{C}^{n+1}$ (identificado con los vectores columna), dado por $v \mapsto Av$.

Ejercicio 5.1. *Demuestra que A define una biyección $\psi_A : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, tal que $\psi_A([v]) = [Av]$ ($[v]$ es la recta vectorial engendrada por v), con las siguientes propiedades:*

(a) *$\psi_A = \psi_{tA}$ si $t \in \mathbb{C}^*$.*
(b) *ψ_A es biholomorfa.*
(c) *La aplicación envía rectas a rectas (de hecho, si $S \subset \mathbb{P}^n$ es un subespacio proyectivo de dimensión k, lo mismo ocurre con $\psi_A(S)$).*
(d) *Dados $P, Q \in \mathbb{P}^n$, $\exists A \in \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{C})$ tal que $\psi_A(P) = Q$.*
(e) *Dadas $L, M \subset \mathbb{P}^n$ rectas, $\exists A \in \mathrm{GL}(n+1;\mathbb{C})$ tal que $\psi_A(L) = M$.*

Ejercicio 5.2. *Si identificamos* $\mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$*, las aplicaciones* ψ_A *son de la forma* $t \mapsto \frac{a+bt}{c+td}$*, con* $ad - bc \neq 0$ *(con convenciones naturales para* ∞*).*

Examinemos las rectas de $\mathbb{P}^2$; gracias al Ejercicio 5.1(e) y (b), basta que estudiemos una recta particular, por ejemplo, la recta L de ecuación $z = 0$. Es inmediato comprobar que L es biholomorfa a $\mathbb{P}^1$, utilizando la aplicación $[x : y] \mapsto [x : y : 0]$.

Ejercicio 5.3. *Sea* L *una recta de* $\mathbb{P}^2$*. Demuestra que* $\mathbb{P}^2 \setminus L$ *es un abierto isomorfo a* $\mathbb{C}^2$*.*

Consideremos ahora las cónicas de $\mathbb{P}^2$, es decir, las curvas proyectivas de grado 2.

Ejercicio 5.4. *Sea* C_F *una cónica de* $\mathbb{P}^2$*. Entonces, existe una matriz* $S \in \operatorname{Sim}(3; \mathbb{C})$ *(matrices simétricas) tales que (identificando de nuevo* $\mathbb{C}^3$ *con los vectores columna) tal que*

$$C_F = \{[v] \in \mathbb{P}^2 \mid {}^t v A v = 0\},$$

donde el superíndice ^{t} *a la izquierda significa* matriz transpuesta. *La cónica se denotará también* C_S*.*

Ejercicio 5.5. *Dos cónicas* C_{S_1}, C_{S_2} *son iguales si y solo si* $\exists t \in \mathbb{C}^*$ *tal que* $S_2 = t S_1$*.*

Ejercicio 5.6. $\psi_A(C_S) = C_{{}^t A^{-1} S A^{-1}}$*. En particular, dos cónicas* C_{S_1}, C_{S_2} *están relacionadas por un automorfismo proyectivo si y solo si* $\operatorname{rk} S_1 = \operatorname{rk} S_2$*.*

Veamos cómo es una cónica de rango 2. Para ello, por el Ejercicio 5.6, basta que estudiemos una cónica particular, por ejemplo, la de ecuación $xz - y^2 = 0$, que se corresponde con la matriz

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fijemos un punto $P \in C_S$, por ejemplo $[1 : 0 : 0]$, y una recta L que no pase por P, por ejemplo, $x = 0$. Esta recta es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ por la aplicación $[s : t] \overset{\rho}{\mapsto} [0 : s : t]$. Consideremos la única recta que pasa por P y $[0 : s : t]$; se trata de la recta $L_{[s:t]}$ de ecuación $ty - sz = 0$.

Para encontrar la intersección es mejor proceder como sigue. Vamos a *deshomogenizar* $[s : t]$ tomando $s = 1$. Trabajamos con la recta $z = ty$. Si reemplazamos z en la ecuación de la cónica obtenemos $y(tx - y) = 0$. La solución $y = 0$ se corresponde con el punto P. La otra solución es el punto de intersección de $y = tx$ con $z = ty$, que es el punto $[1 : t : t^2]$. Ahora nos quedan dos alternativas; la más costosa es realizar los cálculos para el caso $s =$; la más simple es *homogeneizar* la anterior expresión para conseguir $[s^2 : st : t^2]$. Tenemos pues un aplicación $\psi : \mathbb{P}^1 \to C_S$, dada por $\psi([s : t]) = [s^2 : st : t^2]$.

La inversa de ψ se obtiene al proyectar desde el punto P que está en la cónica. En efecto, consideramos un punto Q de la cónica y tomamos la única recta que pasa por P y Q (que será la tangente a C_S en P si $Q = P$). Esta recta (distinta de L) corta a L en un único punto y terminamos en $\mathbb{P}^1$ utilizando ρ^{-1}.

Ejercicio 5.7. *La aplicación* ψ *es biholomorfa (utiliza cartas).*

Veamos otra manera de estudiar las cónicas. Ahora elegimos el punto $P := [0 : 1 : 0]$, que no está en la cónica y vamos a proyectar en la recta L de ecuación $y = 0$, que se identifica a $\mathbb{P}^1$ mediante $[s : 0 : t] \mapsto [s : t]$. De nuevo, tomamos un punto $[x_0 : y_0 : z_0] \in C_S$; tomamos la recta que une este punto y P, de ecuación $z_0 x - x_0 z = 0$. Es fácil ver que esta recta corta a L en $[x_0 : 0 : z_0]$ por lo que hemos construído una aplicación $\varphi : C_S \to \mathbb{P}^1$ dada por $\varphi([x_0 : y_0 : z_0]) := [x_0 : z_0]$.

Geométricamente se comprueba que todos los puntos, salvo por los que se puede trazar una tangente desde P poseen dos preimágenes. Analíticamente vemos que las dos preimágenes de $[s : t]$, salvo $[1 : 0]$ y $[0 : 1]$, son $[s : \sqrt{st} : t]$.

Vamos a *interpretar* la *inversa* de φ. Estudiemos la aplicación φ en cartas. Tenemos una carta de C_S de la forma $t \overset{x}{\mapsto} [1 : t : t^2]$; identificando como antes $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en la carta, φ se expresa como $t \mapsto t^2$. Por tanto, la inversa de φ se expresa como $t \mapsto \sqrt{t}$.

Obviamente $\sqrt{t}$ no es una función bien definida. Sin embargo, si en lugar de considerarla definida sobre $\mathbb{C}$ la definimos sobre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces, tenemos definidas dos raíces cuadradas. Podemos utilizar dos argumentos:

- El primero es más teórico. Las dos raíces cuadradas están bien definidas en un entorno de cualquier punto distinto del cero, y las podemos *conectar* por prolongación analítica. Esto siempre se puede hacer sobre un subconjunto simplemente conexo de $\mathbb{C}^*$ que es el caso de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- El segundo es concreto. Una de las raíces cuadradas se define como $t := re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, escogiendo $\theta \in (0, 2\pi)$. La otra raíz cuadrada es la opuesta.

Observemos que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ es homeomorfo a $\mathbb{C}$ (o a un disco), por lo que $\varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0})$ es homeomorfo a dos discos abiertos. Por otra parte, con argumentos similares podemos ver $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ es homeomorfo a dos intervalos (las raíces positivas y las negativas), y $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, y que es la frontera común de los dos discos abiertos anteriores, por lo que C_S es homeomorfo a dos discos cerrados pegados según sus bordes, es decir, una esfera $\mathbb{S}^2$.

Ejercicio 5.8. *Estudia las cónicas correspondientes a matrices de rango* 1 *y* 2*.*

6. Cúbicas

El siguiente resultado no es difícil de demostrar (aunque omitiremos la prueba).

Teorema 6.1. *Sea C una cúbica que no contiene ninguna recta. Entonces, tras la acción de un apropiado automorfismo proyectivo, C es de ecuación $y^2 z - x(x-a)(x-b) = 0$. Es más, si $(a, b) \neq (0, 0)$, podemos suponer $a = 1$; y si $a = 0$, podemos suponer $b = -1$.*

Vamos a estudiar la cúbica C_0 de ecuación $y^2 z - x^3 = 0$.

Ejercicio 6.2. *Demuestra que $C_0^* = C_0 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$.*

Consideremos la recta L de ecuación $z = 0$, que es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ mediante $[s : t : 0] \mapsto [s : t]$. Construímos una aplicación $\mathbb{P}^1 \to C_0$ como sigue.

Partimos de $[s : t] \in \mathbb{P}^1$; consideremos su imagen en L que es $[s : t : 0]$. Tomemos la recta $L_{[s:t]}$ que pasa por $[s : t : 0]$ y $P := [0 : 0 : 1]$, de ecuación $tx - sy = 0$. Estudiaremos la intersección de esta recta con C_0 como en §5, es decir, deshomogenizamos y consideramos $s = 1$. Al sustituir y en la ecuación de C_0 obtenemos $x^2(t^2 z - x) = 0$. La primera solución es independiente de t y no nos interesa. La segunda da lugar al punto, $[t^2 : t^3 : 1]$. Como en §5, al homogeneizar, obtenemos la aplicación $[s : t] \mapsto [st^2 : t^3 : s^3]$.

Ejercicio 6.3. *Demuestra que C_0^* es una superficie de Riemann isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Aplicamos el mismo método a la curva $\tilde{C}_0$ de ecuación $y^2z - x^2(x+z) = 0$.

Ejercicio 6.4. *Demuestra los siguientes apartados:*

(a) $\tilde{C}_0^* = \tilde{C}_0 \setminus \{[0:0:1]\}$.

(b) *Demuestra que hay una aplicación sobreyectiva* $\mathbb{P}^1 \to \tilde{C}_0$ *dada por* $[s:t] \mapsto [s(t^2-s^2) : t(t^2-s^2) : s^3]$.

(c) *Demuestra que* $\tilde{C}_0^*$ *es isomorfo a* $\mathbb{C}^*$.

Para estudiar el resto de las cúbicas vamos a particularizar en la curva C de ecuación $y^2z - x(x^2-z^2) = 0$.

Ejercicio 6.5. *Demuestra que* $C = C^*$.

Consideremos el punto $P := [0:1:0]$; vamos a restringir la proyección $\phi : \mathbb{P}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{P}^1$, dada por $\phi([x:y:z]) := [x:z]$ a C y estuiaremos lo que ocurre en un entorno de P.

Recordemos que geométricamente ϕ consiste en lo siguiente: dado $Q \neq P$, tomar la recta que los une y consideremos el único punto de intersección con la recta de ecuación $y = 0$ que se identifica con $\mathbb{P}^1$. De esta manera, dado $[s:t] \in \mathbb{P}^1$, sus preimágenes son los puntos de C (distintos de P) que están sobre la recta $tx - sz = 0$ que une P y $[s:0:t]$. Empezamos estudiando el caso $t = 1$. En este caso, tenemos $x = sz$; al sustituir en la ecuación de C obtenemos $z(y^2 - s(s^2-1)z^2) = 0$.

La solución $z = 0$ corresponde a P, por lo que estamos interesados en las demás. Como estas cumplen $z \neq 0$, las soluciones viven en la carta U_z, por lo que tomando $z = 1$, se trata de los puntos $[x:y:1]$ que cumplen $y^2 = x(x^2-1)$. Observemos que en la carta U_z se encuentra $C \setminus \{P\}$.

Basta que estudiemos lo que ocurre en un entorno de P, por lo que estudiaremos la carta U_y, $y = 1$. En esta carta, nuestra curva tiene ecuación $z - x(x^2 - z^2) = 0$. Utilizando el teorema de la función implícita, en un entorno pequeño de 0 existe una función holomorfa h, $h(0) = 0$, tal que cerca de P los puntos de C son de la forma $[x:1:h(x)]$ con $h(x) = x(x^2 - h(x)^2)$.

Ejercicio 6.6. *Demuestra que el primer término no nulo del desarrollo en serie de* $h(x)$ *es* x^3*, es decir,* $h(x) = x^3 g(x)$.

En particular, la expresión de ϕ en la carta es $x \mapsto [x : h(x)] = [1 : x^2 g(x)]$, por lo que la restricción de ϕ se extiende a P con el valor $\phi(P) = [1:0]$.

La conclusión final es la siguiente; $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ es una aplicación holomorfa, tal que todos los puntos de $\mathbb{P}^1$ salvo los de $A := \{[0:1],[1:1],[-1:1],[1:0]\}$ tienen exactamente dos preimágenes. Estudiemos la aplicación $\psi := \phi_| : C \setminus \varphi^{-1}(A) \to \mathbb{P}^1 \setminus A$.

La podemos restringir a una carta y estudiaremos la aplicación $\check{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$, $(x,y) \mapsto x$, donde $\check{C} := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq 0, \pm 1, y^2 = x(x^2-1)\}$.

Para estudiar $\check{C}$, debemos considerar las raíces cuadradas de la función $x(x^2-1)$. Utilizando criterios de prolongación analítica, utilizamos el resultado siguiente.

Proposición 6.7. *Sea* $U \subset \mathbb{C}$ *un abierto simplemente conexo, y se* $F : U \to \mathbb{C}^*$ *una función holomorfa. Entonces, existe una función* $f : U \to \mathbb{C}^*$*, holomorfa tal que* $f(z)^2 = F(z)$*; la otra función que cumple esta condición es* $-f$.

Por tanto, podemos encontrar una función holomorfa $f : \mathbb{C} \setminus [-1, \infty) \to \mathbb{C}^*$ tal que $f^2(x) = x(x^2-1)$.

Observación 6.8. Utilizando teoría de cubiertas, se puede probar que podemos f se puede extender a $\mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [1, \infty))$. Por tanto, vemos que $\check{C}$ se puede ver como la unión de dos copias de $\mathbb{P}^1$ menos dos segmentos disjuntos, es decir, de dos cilindros. Al añadir las preimágenes de esos dos segmentos obtenemos que C es un toro.

7. Funciones meromorfas y divisores

Como hemos visto, si C es una superficie de Riemann compacta, entonces las únicas funciones holomorfas son las constantes, por lo que debemos buscar otros objetos. Veamos una definición equivalente de función holomorfa.

Definición 7.1. Sea X una variedad analítica. Una *función holomorfa* se obtiene como una familia $\{U_i, f_i\}_{i\in I}$, donde $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X, $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$ mediante una relación de equivalencia natural.

Esta manera de enfocar las cosas nos permite la siguiente definición.

Definición 7.2. Sea X una variedad analítica. Una *función meromorfa* se obtiene como una familia $\{U_i, \frac{f_i}{g_i}\}_{i\in I}$, donde $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X, $f_i, g_i : U_i \to \mathbb{C}$ holomorfas, $g_i \not\equiv 0$, y $f_i g_{j|U_i\cap U_j} = g_i f_{j|U_i\cap U_j}$ mediante una relación de equivalencia natural.

Veamos a lo que da lugar una función meromorfa h en una superficie de Riemann compacta X. Sea $p \in X$; consideremos una carta centrada en p en la que h se exprese como cociente de dos funciones f, g. Restringiendo el entorno si es preciso, podemos suponer $f = z^a\tilde{f}$, $g = z^b\tilde{g}$, con $\tilde{f}, \tilde{g}$ funciones que no se anulan en la carta. Por tanto, $\tilde{h} := \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ es una función bien definida en la carta, y podemos escribir $h = z^{a-b}\tilde{h}$. Es fácil ver que el número $a - b$ es independiente de la elección concreta de carta y funciones.

Definición 7.3. En la situación anterior, si $a > b$, diremos que p es un *cero* o *punto de multiplicidad* $a - b$ de h. Si $a = b$ diremos que p es un *punto de multiplicidad* $a - b$. Si $a > b$ diremos que p es un *polo de multiplicidad* $b - a$ o un *cero de multiplicidad* $a - b$.

Es claro que el conjunto de polos es discreto, luego finito. Por tanto h determina una función holomorfa en C menos el conjunto de polos.

Teorema 7.4. *Una función meromorfa h de una superficie de Riemann determina una aplicación holomorfa $h : C \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que ∞ es la imagen de los polos. Recíprocamente, una aplicación holomorfa $C \to \mathbb{P}^1$ (no constante igual a ∞) determina una función meromorfa. En torno a los polos, podemos estudiar las funciones meromorfas tomando la otra carta de $\mathbb{P}^1$ que se obtiene al considerar $t \mapsto t^{-1}$.*

Ejemplo 7.5. Es claro que un polinomio homogéneo $f(s, t)$ no determina una función de $\mathbb{P}^1$. Sin embargo, no es difícil ver que si f, g son polinomios homogéneos del mismo grado, $\frac{f(s,t)}{g(s,t)}$ determina una función meromorfa. Identificando $\mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ estas funciones se expresan como $\frac{f(t)}{g(t)}$, con $f, g \in \mathbb{C}[t]$. La imagen de ∞ depende de la relación entre los grados de f y g.

Teorema 7.6. *Las funciones del Ejemplo 7.5 son las únicas funciones meromorfas de $\mathbb{P}^1$.*

Demostración. Sea h una función meromorfa y sean $t_1, \ldots, t_r$ los polos de h en $\mathbb{C}$, de multiplicidades $m_1, \ldots, m_r$. Es fácil ver que $g := h\prod_{j=1}^{r}(t - t_j)^{m_j}$ es una función meromorfa que es holomorfa en $\mathbb{C}$, es decir, se expresa como una serie de potencias $\sum_{j\geq 0} a_j t^j$. Para estudiar lo que ocurre cerca del infinito, tomamos la carta $s = t^{-1}$, en la que nuestra función es $\sum_{j\geq 0} a_j s^{-j}$; como debe ser meromorfa en ∞, es decir $s = 0$, $\exists m_\infty$ tal que $a_j = 0$ si $j > m_\infty$. Por tanto, g es un polinomio y h una función racional. $\square$

Definición 7.7. Un *divisor* en una superficie de Riemann compacta C es un elemento del grupo abeliano libre de base C, es decir una expresión $\sum_{p\in C} m_p p$, donde $m_p \in \mathbb{Z}$ y además se anula salvo en un número finito de casos. El *grado* de un divisor es $\sum_{p\in C} m_p$.

Ejemplo 7.8. Dada una función meromorfa h, si m_p es la multiplicidad en p con respecto a h, tenemos un divisor $(h) := \sum_{p\in C} m_p p$.

Ejercicio 7.9. *Un divisor en $\mathbb{P}^1$ es de la forma (h) para una función meromorfa si y solo si su grado es cero.*