SUPERFICIES DE RIEMANN

ENRIQUE ARTAL BARTOLO

Índice

1. Definiciones y álgebra lineal

En este curso, nos vamos a ocupar de la teoría de superficies de Riemann, es decir del estudio de superficies reales diferenciables con una estructura analítica. Sea X un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable.

Definición 1.1. Llamaremos *atlas holomorfo* sobre X a una colección $\mathscr{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ que verifica las condiciones siguientes:

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un recubrimiento abierto de X;

(ii) $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ es un homeomorfismo sobre la imagen y $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de $\mathbb{C}$;

(iii) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces, la composición

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \to & U_\alpha \cap U_\beta & \to & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ z & \mapsto & \varphi_\alpha^{-1}(z) & \mapsto & \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(z)), \end{array}$$

que denotaremos $g_{\beta\alpha}$, es una función holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$.

Observación 1.2. Podemos definir de forma análoga atlas holomorfos de dimensión n, si reemplazamos en la anterior definición $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}^n$. Muchos resultados que vamos a presentar se pueden generalizar al caso de dimensión n.

Ejemplo 1.3. $\{(\mathbb{C}, 1_\mathbb{C})\}$ es un atlas holomorfo sobre $\mathbb{C}$. Si $\mathscr{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es un atlas holomorfo sobre un espacio X y V es un abierto de X, entonces, es claro que $\mathscr{A}_V := \{(U_\alpha \cap V, \varphi_{\alpha|U_\alpha\cap V}) \mid \alpha \in A,\ U_\alpha \cap V \neq \emptyset\}$ es un atlas holomorfo sobre V.

Como en el caso diferenciable, podemos definir funciones y aplicaciones holomorfas con respecto a los atlas holomorfos.

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable con un atlas holomorfo $\mathscr{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es $\mathscr{A}$-holomorfa (u holomorfa si no hay lugar a confusión) si $\forall\alpha \in A$ la composición $f_{|U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa.

Definición 1.5. Sean X e Y espacios topológicos Hausdorff y segundo numerables con atlas holomorfos $\mathscr{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ sobre X y $\mathscr{B} := \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ sobre Y; sea $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es holomorfa con respecto a $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ (u holomorfa si no hay lugar a confusión) si $\forall\alpha \in A, \forall\beta \in B$ tales que $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$ la composición

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \xrightarrow{f} V_\beta \xrightarrow{\psi_\beta} \psi_\beta(V_\beta)$$

es una función holomorfa entre abiertos de $\mathbb{C}$.

Sea X un espacio topológico Hausdorff y sea $\mathscr{H}_X$ el conjunto de atlas holomorfos sobre X. Supongamos que $\mathscr{H}_X \neq \emptyset$. Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathscr{H}_X$:

> *Dos atlas $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{H}_X$ son compatibles, denotado por $\mathscr{A} \sim_1 \mathscr{B}$ si y solo si $1_X : X \to X$ es una aplicación holomorfa con respecto a $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$*

Definición 1.6. Una estructura de *superficie de Riemann* sobre X es una clase de equivalencia para la relación de equivalencia $\sim_1$ de compatibilidad entre atlas sobre X.

Es inmediato que podemos definir funciones holomorfas y aplicaciones holomorfas en las superficies de Riemann como aquellas funciones o aplicaciones que sean holomorfas con respecto a atlas en las clases de equivalencia correspondientes.

Sea $\mathscr{R}$ el conjunto de superficies de Riemann. Definimos en este conjunto una relación de equivalencia:

> *Dos superficies de Riemann X e Y son equivalentes, denotado $X \sim_2 Y$ si y solo si existe una aplicación $f : X \to Y$ que es biholomorfa.*

Dado un espacio topológico X que admita estructuras de superficies de Riemann, sea $\mathscr{R}_X$ el conjunto de todas ellas; uno de los problemas fundamentales de la teoría de superficies de Riemann es describir el espacio de *moduli* de X, es decir, $\mathscr{M}_X := \mathscr{R}_X / \sim_2$.

Observación 1.7. Una superficie de Riemann X posee de manera natural una estructura de variedad diferenciable, sin más que considerar la identificación natural de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ (que identifica $z \in \mathbb{C}$ con $(\Re z, \Im z)$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x + iy$), ya que con esta interpretación, las funciones holomorfas son aplicaciones diferenciables que verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann: si U es un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa con $f = u + iv$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Una consecuencia inmediata de estas ecuaciones es que las superficies con estructura de superficies de Riemann son orientadas.

El espacio tangente –como estructura diferenciable– se puede interpretar desde un punto de vista complejo. Para ello, hagamos un poco de álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que $\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$. De manera natural, podemos ver V como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$. Consideremos el automorfismo $J : V \to V$, $J(v) := iv$, visto como aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Se trata de un automorfismo de polinomio mínimo $x^2 + 1$.

Recíprocamente, si tenemos un espacio vectorial real de dimensión $2n$ con un automorfismo J de polinomio mínimo $x^2 + 1$, tenemos una estructura de espacio vectorial complejo de dimensión n, donde la multiplicación por i viene dada por la acción de J.

Para que J posea vectores propios realizamos la operación siguiente: sea $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ el complexificado de V. Este espacio vectorial es un espacio vectorial complejo de dimensión $2n$, donde la acción de $\mathbb{C}$ viene dada por la multiplicación sobre el factor $\mathbb{C}$ (si $v \in V$ y $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene $w \cdot (v \otimes z) = v \otimes zw$). Se ve fácilmente que $V_{\mathbb{C}} = \{v \otimes 1 + w \otimes i \mid v, w \in V\}$; denotaremos $v \otimes 1$ mediante v y $v \otimes i$ mediante iv. La aplicación J se extiende naturalmente a un automorfimsmo J de $V_{\mathbb{C}}$.

Como $V_{\mathbb{C}}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, tenemos una descomposición $V_{\mathbb{C}} = V' \oplus V''$, donde $\dim_{\mathbb{C}} V' = \dim_{\mathbb{C}} V'' = n$, y V' (resp. V'') es el espacio propio de valor propio i (resp. $-i$) para el automorfismo J.

La restricción de la proyección $V_{\mathbb{C}} \to V'$ a V define un isomorfismo natural de espacios vectoriales complejos entre V (con la estructura compleja dada por J) y V' (con la estructura compleja heredada de $V_{\mathbb{C}}$). De la misma forma tenemos un isomorfismo entre el espacio vectorial complejo que define $-J$ sobre V (denotado $\overline{V}$) y V''.

Es fácil describir V' y V'':

$$V' = \{v \otimes 1 - J(v) \otimes i \mid v \in V\}, \quad V'' = \{v \otimes 1 + J(v) \otimes i \mid v \in V\}.$$

2. Fibrado tangente

Sea ahora X una superficie de Riemann y $P \in X$. Fijemos una carta $z : U \to \mathbb{C}$ tal que $P \in U$ y $z(P) = 0$. Denotemos x e y las partes real e imaginaria de z.

Sea $\mathcal{C}^\infty_{X,P}$ el álgebra de los gérmenes de funciones diferenciables reales en P. El plano tangente $T_P X$ a X en p es el espacio vectorial real de dimensión 2 formado por las derivaciones $\mathbb{R}$-lineales $\alpha : \mathcal{C}^\infty_{X,P} \to \mathbb{R}$. La carta nos proporciona una base de este espacio dada por $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$. Definimos un automorfismo $J : T_P X \to T_P X$ dado por $J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}$ y $J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann garantizan que ese automorfismo no depende de la carta elegida. Estamos en la situación anterior, pues J es exactamente de orden 4.

Consideremos $(T_P X)_\mathbb{C}$ como antes; es fácil ver que podemos identificar este espacio al conjunto de derivaciones $\mathbb{C}$-lineales $\mathcal{C}^\infty_{X,P,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, donde $\mathcal{C}^\infty_{X,P,\mathbb{C}}$ es la $\mathbb{C}$-álgebra de los gérmenes de funciones diferenciables complejas en P.

Consideremos $(T_P X)_\mathbb{C} = T'_P X \oplus T''_P X$, la descomposición anterior. Hemos obtenido dos espacios vectoriales complejos de dimensión 1, el primero de ellos canónicamente isomorfo a $T_P X$ dotado de la estructura compleja definida por J.

Una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Cauchy-Riemann es la siguiente. Sea $\mathscr{O}_{X,P}$ la $\mathbb{C}$-álgebra de gérmenes de funciones holomorfas en P. Entonces,

$$\mathscr{O}_{X,P} = \{f \in \mathcal{C}^\infty_{X,P,\mathbb{C}} \mid \alpha(f) = 0 \ \forall \alpha \in T''_P X\}.$$

Por tanto, $T'_P X$ se identifica con las derivaciones de $\mathscr{O}_{X,P}$.

Por los isomorfismos canónicos $T_P X \cong T'_P X$ y $T_P X$ y $T''_P X$ tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mapsto \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial x} \mapsto \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Observemos que si U es un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ es diferenciable, entonces

$$f \text{ es holomorfa} \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) = 0 \text{ en todo punto;}$$

y si f es holomorfa, $f' = \frac{\partial}{\partial z}(f)$.

El mismo razonamiento se puede hacer con el espacio vectorial dual $T^*_P X$. En este caso tenemos $T^*_P{}' X$ y $T^*_P{}'' X$ engendrados por $dz := dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$

(base dual de $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$). Es fácil ver que si $f : X \to \mathbb{C}$ es diferenciable, en $P \in X$ tenemos

$$df = \frac{\partial}{\partial x}(f)dx + i\frac{\partial}{\partial y}(f)dy = \frac{\partial}{\partial z}(f)dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f)d\bar{z}.$$

Hasta ahora, hemos definido las funciones holomorfas de las superficies de Riemann. Estas funciones presentan un problema cuando trabajamos con superficies de Riemann X que son compactas y conexas: *son escasas*. Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, como es en particular continua, ha de admitir un máximo (para ser más exactos, $|f|$ ha de poseer un máximo). Sin embargo, el principio del módulo máximo, implica que f es constante en un entorno del máximo; el principio de prolongación analítica se extiende a las superficies de Riemann conexas, por lo que f ha de ser constante. Vamos a permitir otro tipo de funciones.

Notación 2.1. Dada X superficie de Riemann y $x \in X$, diremos que z es una coordenada local centrada en x si existe un entorno $U \subset X$ de x y una carta $z : U \to \mathbb{C}$ compatible con la estructura de superficie de Riemann tal que $z(x) = 0$.

Definición 2.2. Sea X una superficie de Riemann y $P \subset X$ un subconjunto cerrado y discreto; diremos que una función holomorfa $f : X \setminus P \to \mathbb{C}$ es meromorfa si para cada $x \in P$ existe un entorno abierto U con una coordenada local z centrada en x tal que f está definida en $U \setminus \{x\}$ y el desarrollo en serie de Laurent de f en la coordenada z es de la forma

$$\sum_{n=-k}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_{-k} \neq 0, \quad k > 0.$$

Diremos que x es un polo de orden k de f (es fácil ver que k es independiente de la coordenada local) y llamaremos a $P = P(f)$ el lugar de polos de f. Tales funciones las denotaremos $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$.

Si una función meromorfa $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ se anula en un punto $x \in X$ podemos encontrar una coordenada local z centrada en x tal que f se expresa como

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^n, \quad a_k \neq 0, \quad k > 0.$$

Diremos que x es un cero de multiplicidad k y denotaremos $Z(f)$ el conjunto de los ceros de f. Observemos que $Z(f)$ es discreto y cerrado.

3. La esfera de Riemann

Consideremos la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1$ definida como sigue: $\mathbb{P}^1$ es el espacio cociente de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia $(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(x, y) = \lambda(z, w)$. Es decir, estamos considerando el conjunto de las rectas de $\mathbb{C}^2$ que pasan por el origen, dotado con la topología cociente inducida por $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1$.

Denotaremos la clase de equivalencia de (x, y) mediante las coordenadas homogéneas $[x : y]$. Es fácil demostrar que $\mathbb{P}^1$ es un espacio topológico Hausdorff. Si consideramos $S^3 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \ |x|^2 + |y|^2 = 1\}$, observamos que $\pi(S^3) = \mathbb{P}^1$, por lo que la recta proyectiva compleja es compacta. Vamos a construir un atlas holomorfo sobre $\mathbb{P}^1$.

Consideremos los subconjuntos $U_1 := \{[x : y] \in \mathbb{P}^1 \mid y \neq 0\}$ y $U_2 := \{[x : y] \in \mathbb{P}^1 \mid x \neq 0\}$. Es fácil ver que ambos son abiertos y que $U_1 \cup U_2 = \mathbb{P}^1$. Definimos dos funciones complejas sobre estos conjuntos:

$$\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \quad \varphi_1([x : y]) := \frac{x}{y}, \quad \varphi_1^{-1}(t) = [t : 1];$$
$$\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}, \quad \varphi_2([x : y]) := \frac{y}{x}, \quad \varphi_2^{-1}(t) = [1 : t].$$

Ambas aplicaciones son biyectivas y aplicando la definición de topología cociente, observamos que son homeomorfismos. Por otra parte, $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ y

$$g_{21}(z) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}.$$

Por tanto, $\mathbb{P}^1$ es una superficie de Riemann.

Observemos que $\mathbb{P}^1 \setminus U_1$ solo contiene el punto $[1 : 0]$; es fácil comprobar que $\mathbb{P}^1$ se obtiene como la compactificación por un punto de U_1. Así, identificaremos U_1 con $\mathbb{C}$ y $\mathbb{P}^1$ con la compactificación por un punto ∞ de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Por la proyección estereográfica de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sabemos que S^2 es homeomorfo a la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^2$. Esto implica que podemos considerar $\mathbb{P}^1$ como una estructura de superficie de Riemann sobre la superficie orientable de género 0, es decir, la esfera S^2. De hecho, tenemos el siguiente teorema que demostraremos más adelante:

Teorema 3.1. *Sea X una superficie de Riemann homeomorfa a S^2. Entonces, X es biholomorfa a $\mathbb{P}^1$.*

Observación 3.2. Un enunciado similar es falso con el plano $\mathbb{R}^2$ ya que este admite dos estructuras de superficie de Riemann distintas. Sea $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| < 1\}$; entonces, tanto $\mathbb{C}$ como $\mathbb{D}$ son dos superficies de Riemann homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ pero no biholomorfas ya que si una función holomorfa sobre $\mathbb{C}$ está acotada, entonces, es constante.

A partir de ahora consideraremos indistintamente $\mathbb{P}^1$ y $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, con las identificaciones $[t : 1] \leftrightarrow t$ y $[1 : 0] \leftrightarrow \infty$.

Vamos a ver ahora que las funciones meromorfas de una superficie de Riemann se pueden interpretar como aplicaciones holomorfas en la esfera de Riemann.

Lema 3.3. *Sea X una superficie de Riemann y $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa. Entonces f se puede considerar como una aplicación holomorfa $f : X \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que $P(f) = f^{-1}(\infty)$. Recíprocamente, si $f : X \to \mathbb{P}^1$ es una aplicación holomorfa que no es constante en ninguna componente conexa sobre ∞, entonces f define una función meromorfa tal que $P(f) = f^{-1}(\infty)$.*

La demostración de este lema es inmediata.

Observación 3.4. Podríamos haber definido las funciones meromorfas como aquellas que son localmente cociente de dos aplicaciones holomorfas. Esta definición se extiende a cualquier dimensión. Sin embargo, si X es una variedad analítica compleja de dimensión $n > 1$ y $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa, es falso en general que podamos extender f a una aplicación holomorfa sobre $\mathbb{P}^1$. Por ejemplo, basta tomar $X = \mathbb{C}^2$ y $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Es fácil ver que f se extiende de forma natural a $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, pero que dicha extensión no se puede prolongar continuamente al origen.

Vamos a describir el cuerpo de funciones meromorfas de $\mathbb{P}^1$. Recordemos previamente que para cualquier superficie de Riemann X el conjunto de funciones meromorfas forma un cuerpo que denotaremos $\mathscr{M}(X)$.

El primer candidato para ser una función meromorfa de $\mathbb{P}^1$ sería la aplicación $[x : y] \mapsto f(x, y)$, con $f \in \mathbb{C}[X, Y]$. Chocamos con un problema: la aplicación no está bien definida. Si suponemos que f es homogénea de grado d, $f(tx, ty) = t^d f(x, y)$, $\forall t \in \mathbb{C}$, por lo que la aplicación sigue sin estar bien definida. Sin embargo, si tomamos otro polinomio homogéneo g de grado d, la función

$$[x:y] \mapsto \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

está bien definida como función meromorfa, ya que se puede interpretar como una aplicación de $\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^1$ definida por

$$[x:y] \mapsto [f(x, y) : g(x, y)].$$

Esta aplicación está bien definida en los puntos $[x : y]$ tales que f y g no se anulan simultáneamente. En los demás puntos, la aplicación esta bien definida, ya que podemos descomponer los polinomios f, g como producto de polinomios homogéneos de grado 1:

$$f(X, Y) = \prod_{i=1}^{n} (a_i X - b_i Y)^{r_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = d, \quad [a_i : b_i] \neq [a_k : b_k] \text{ si } i \neq k;$$

$$g(X, Y) = \prod_{j=1}^{m} (c_j X - d_j Y)^{s_j}, \quad \sum_{j=1}^{m} s_j = d, \quad [c_j : d_j] \neq [c_l : d_l] \text{ si } j \neq l.$$

En tal caso, simplificando los factores comunes, podremos considerar que f y g no se anulan simultáneamente.

Considerando $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, acabamos de demostrar que $\mathbb{C}(t)$, el cuerpo de fracciones racionales con coeficientes complejos, es un subcuerpo de $\mathscr{M}(\mathbb{P}^1)$.

Teorema 3.5. $\mathscr{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(t)$

Demostración. Sea $h : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa y $P := P(f)$ su lugar de polos. Si $x \in P \cap \mathbb{C}$, sea m_x su orden. Es claro que

$$g(t) := \prod_{x \in P \cap \mathbb{C}} (t-x)^{m_x} h(t)$$

define una función meromorfa $g \in \mathscr{M}(\mathbb{P}^1)$ que es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, podemos dar su desarrollo en serie

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En la carta de $\mathbb{P}^1$ centrada en ∞, la aplicación se escribe

$$s \mapsto \frac{1}{s} \mapsto g\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^{-n}.$$

Como esta función debe de tener un polo (o ser holomorfa) en ∞, tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$, $\forall n > n_0$. Es decir, g es una aplicación polinomial, por lo que $h \in \mathbb{C}(t)$. $\square$

Dada una superficie de Riemann X, denotaremos $\mathrm{Aut}(X) := \{\alpha : X \to X \mid \alpha \text{ biholomorfa}\}$ el grupo de los automorfismos biholomorfos de X.

Ejercicio 3.6. *Demostrar que*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \left\{ t \mapsto \frac{at+b}{ct+d} \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}.$$

Observemos que en coordendas homogéneas estas aplicaciones se escriben

$$[x:y] \mapsto [ax+by : cx+dy].$$

Es decir, según el ejercicio, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = PGL(2,\mathbb{C}) = PSL(2,\mathbb{C})$.

Veamos una idea de la demostración de 3.1. Admitamos el resultado siguiente (es la clave de la demostración):

Afirmación 3.7. *Si X es una superficie de Riemann homeomorfa a $\mathbb{P}^1$, entonces, existe una función meromorfa $h : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que $P(h)$ no tiene más que un único punto y este es un polo de orden* 1.

Supongamos también el resultado siguiente:

Proposición 3.8. *Sea Y una superficie de Riemann y $f : Y \dashrightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa no constante. Denotemos para cada $y \in P(f)$ (resp. $Z(f)$) su multiplicidad como polo (resp. cero) con $m(y)$ (resp. $n(y)$). Entonces*

$$\sum_{y\in P(f)} m(y) = \sum_{y\in Z(f)} n(y).$$

Aplicando la proposición a la función $h - t$, $t \in \mathbb{C}$, obtenemos que $h : X \to \mathbb{P}^1$ es inyectiva. Como es una aplicación abierta entre compactos, y $\mathbb{P}^1$ es conexo, es también sobreyectiva. Así, es una biyección holomorfa, es decir, una aplicación biholomorfa, lo que demuestra 3.1.

La proposición anterior se puede demostrar de dos maneras:

Demostración topológica de la Proposición 3.8. Sean X e Y dos superficies de Riemann compactas y $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante. Como antes f es una aplicación sobreyectiva. Dado $x \in X$ definimos la multiplicidad m_x en x utilizando cartas locales de la misma forma que definimos la multiplicidad de ceros y polos.

El conjunto $D(f) := \{x \in X \mid m_x \neq 1\}$ es finito y si $\Delta(f) := f(D(f))$, entonces la restricción $f_| : X \setminus f^{-1}(\Delta(f)) \to Y \setminus \Delta(f)$ es una cubierta de m hojas y f es una cubierta ramificada.

Por las propiedades de las cubiertas, al identificar funciones meromorfas con aplicaciones holomorfas sobre $\mathbb{P}^1$ tenemos que los dos miembros son iguales al número de hojas m de la cubierta que define la función meromorfa. ☐

Demostración analítica de la Proposición 3.8. Basta aplicar el teorema de los residuos a un disco en una carta local que no contenga ni ceros ni polos de la función. ☐

Existe un problema importante relacionado con la afirmación anterior:

Problema 3.9. *Sea X una superficie de Riemann. Sean $P := \{x_1, \dots, x_p\}$ y $Q := \{y_1, \dots, y_q\}$ dos subconjuntos de X y $m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N}$ distintos de cero. ¿Existe $f : X \to \mathbb{P}^1$ tal que $P = P(f)$, $Z = Z(f)$, x_i es un polo de multiplicidad m_i e y_j es un cero de multiplicidad n_j?*

Una condición necesaria es

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{j=1}^{q} n_j.$$

Proposición 3.10. *La condición anterior es suficiente para $X = \mathbb{P}^1$.*

Demostración. Haciendo actuar $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$ podemos suponer que $P, Z \subset \mathbb{C}$. Es fácil ver que

$$h(t) := \frac{\prod_{j=1}^{q}(t-y_j)^{n_j}}{\prod_{i=1}^{p}(t-x_i)^{m_i}}$$

es una función meromorfa que resuelve el problema. $\square$

Más adelante trataremos este problema para otras superficies de Riemann. Otro problema similar es el siguiente:

Problema de Mittag-Leffler 3.11. *Sea X una superficie de Riemann y consideremos $P := \{x_1, \ldots, x_p\} \subset X$. Fijemos coordenadas locales $z_1, \ldots, z_p$ centradas en cada punto y en cada una de ellas una parte principal*

$$h_i := \sum_{j=1}^{k_i} a_{i,j} z_i^{-j}.$$

¿Existe $f : X \to \mathbb{P}^1$ tal que $P = P(f)$ y la parte principal de f en x_i es h_i?

De la misma forma que antes vemos que el problema tiene solución para $\mathbb{P}^1$. Veremos que en general no es así.

4. Razón doble

Sea $P_\infty := [x_\infty : y_\infty]$, $P_0 := [x_0 : y_0]$ y $P_1 := [x_1 : y_1]$ tres puntos dos a dos distintos. Elijamos las coordenadas homogéneas de forma que $(x_1, y_1) = (x_\infty, y_\infty) + (x_0, y_0)$. Por álgebra lineal, es fácil ver que $\exists! \alpha \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $\alpha(\infty) = \alpha([1 : 0]) = P_\infty$, $\alpha(0) = \alpha([0 : 1]) = P_0$ y $\alpha(1) = \alpha([1 : 1]) = P_1$. Sea $P \in \mathbb{P}^2 \setminus \{P_\infty, P_0, P_1\}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tal que $\alpha(z) = P$.

La *razón doble* de los cuatro puntos P_∞, P_0, P_1, P es igual a $(P_\infty, P_0, P_1, P) = z$. Observemos que si $P = [x : y]$, entonces

$$(P_\infty, P_0, P_1, P) = \frac{\dfrac{x_\infty y_1 - y_\infty x_1}{x_1 y_0 - y_1 x_0}}{\dfrac{x_\infty y - y_\infty x}{x y_0 - y x_0}}.$$

Si aplicamos esta expresión a valores reales finitos vemos que se trata de una extensión de la razón doble en la recta proyectiva real. Con esta expresión, es fácil ver que la definición se extiende al caso en el que dos puntos coinciden (obteniendo los valores $0, 1, \infty$). Con la definición primitiva, es evidente que la razón doble se conserva por la acción de $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Veamos lo que ocurre al permutar los cuatro puntos. Sean P_i, $i = 1, \dots, 4$, tales que se tiene $(P_1, P_2, P_3, P_4) = z$. Entonces, utilizando las tres permutaciones siguientes que engendran todas las demás,

$$
\begin{aligned}
(P_3, P_4, P_1, P_2) &= z \\
(P_1, P_2, P_4, P_3) &= \frac{1}{z} \\
(P_1, P_3, P_2, P_4) &= 1 - z.
\end{aligned}
$$

Por tanto las razones dobles de los cuatro puntos y sus permutaciones son

$$
\left\{ z, \frac{1}{z}, 1 - z, \frac{1}{1-z}, \frac{z}{z-1}, \frac{z-1}{z} \right\}.
$$

Pregunta 4.1. *Sean* $X := \mathbb{P}^1 \setminus \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ *e* $Y := \mathbb{P}^1 \setminus \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, *homeomorfos a* S^2 *menos cuatro puntos. ¿Cuándo son* X *e* Y *biholomorfos?*

Supongamos que lo son; entonces si $\alpha : X \to Y$ es biholomorfa, utilizando la clasificación de las singularidades de funciones holomorfas en abiertos de $\mathbb{C}$, observamos que α extiende a un elemento de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ tal que $\alpha(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$. Como la razón doble se conserva existe un elemento $\sigma \in \Sigma_4$ tal que $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (Q_{\sigma(1)}, Q_{\sigma(2)}, Q_{\sigma(3)}, Q_{\sigma(4)})$. Si se cumple esta condición, es fácil ver que α existe.

Respuesta. Las superficies X e Y son biholomorfas si y solo si existe un elemento $\sigma \in \Sigma_4$ tal que $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (Q_{\sigma(1)}, Q_{\sigma(2)}, Q_{\sigma(3)}, Q_{\sigma(4)})$. $\square$

La razón doble define una función holomorfa f en el espacio

$$
X := \left\{ (x, y, z, t) \in (\mathbb{P}^1)^4 \mid \#\{x, y, z, t\} \geq 3 \right\}
$$

dada por $f(x, y, z, t) = (x, y, z, t) \in \mathbb{C}$. Consideremos la acción del grupo simétrico de cuatro cifras Σ_4 sobre $(\mathbb{P}^1)^4$; el cociente $\mathrm{Sim}^4(\mathbb{P}^1) := (\mathbb{P}^1)^4/\Sigma_4$ es una variedad compleja lisa de dimensión 4 y X/Σ_4 es un abierto. La razón doble no define una función sobre $\mathbb{C}$. Sin embargo, si consideramos el cociente Y de $\mathbb{P}^1$ por la acción del subgrupo de automorfismos engendrado por $z \mapsto 1/z$ y $z \mapsto 1 - z$ (grupo isomorfo a Σ_3), entonces, la razón doble define una aplicación $X/\Sigma_4 \to Y$.

El espacio Y admite una estructura natural de *orbifold* $S^2(3, 2, 2)$; es decir, el espacio topológico subyacente es S^2, hay dos puntos cónicos de ángulo π y un punto cónico de ángulo $2\pi/3$. Los primeros son las órbitas $\{0, 1, \infty\}$, $\{-1, 2, 1/2\}$; el último corresponde a la órbita compuesta por las soluciones de $z^2 - z + 1 = 0$.

5. Estructuras de superficie de Riemann sobre el toro

Queremos determinar el grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$; sea $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación biholomorfa. Podemos interpretar α como una función meromorfa $\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{C}$ ya que la inyectividad implica que la singularidad de α en ∞ ha de ser un polo. Como α posee un único polo y este de orden 1, tenemos que α pertenece a $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Así $\alpha(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$. Como $\alpha(\infty) = \infty$, podemos suponer que $c = 0$, $d = 1$. Por tanto,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \alpha(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0\}.$$

Geométricamente, los automorfismos holomorfos de $\mathbb{C}$ son composiciones de traslaciones, giros y homotecias.

Consideremos un retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}$; es decir, Λ es un subgrupo abeliano libre (aditivo) de $\mathbb{C}$, de rango 2 que engendra $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Consideremos el cociente $T_\Lambda := \mathbb{C}/\Lambda$; T_Λ es un grupo abeliano. Si dotamos a T_Λ de la topología cociente inducida por la proyección $\pi : \mathbb{C} \to T_\Lambda$, vemos que T_Λ es homeomorfo a un toro de dimensión 2 (el producto cartesiano $S^1 \times S^1$); π es la cubierta universal.

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ dos generadores de Λ. El rectángulo R_{λ_1,λ_2} de vértices 0, λ_1, λ_2 y $\lambda_1 + \lambda_2$ es un dominio fundamental de T_Λ; es decir, la restricción de π a R_{λ_1,λ_2} es sobreyectiva, y restringida al interior inyectiva. Lo mismo se puede decir para los trasladados $w + R_{\lambda_1,\lambda_2}$, $w \in \mathbb{C}$.

Se puede demostrar que T_Λ posee una única estructura de superficie de Riemann de forma que $\pi : \mathbb{C} \to T_\Lambda$ sea holomorfa. Podemos cubrir el toro con cuatro cartas, que corresponden a inversas locales de π cuando consideramos los interiores de los rectángulos R_{λ_1,λ_2}, $\dfrac{\lambda_1}{2} + R_{\lambda_1,\lambda_2}$, $\dfrac{\lambda_2}{2} + R_{\lambda_1,\lambda_2}$ y $\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + R_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Observación 5.1. Más adelante nos ocuparemos del espacio de *moduli* del toro. Si X es una superficie de Riemann y $\pi : Y \to X$ es la cubierta universal, es fácil ver que Y admite una única estructura de superficie de Riemann de forma que π sea holomorfa. Además, se cumple que $\mathrm{Aut}(\pi)$, el grupo de los automorfismos de π es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(Y)$.

Sea X una superficie de Riemann homeomorfa al toro. Su cubierta universal π es homeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$. En este punto, recordamos el teorema de uniformización de Riemann, que dice que, salvo aplicaciones biholomorfas, solo hay tres superficies de Riemann simplemente conexas: $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| < 1\}$. Se puede demostrar también que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ no contiene subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ que actúen de forma propiamente discontinua y sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Por tanto, deducimos que la cubierta universal de X es $\mathbb{C}$, por lo que X es una de las superficies T_Λ. La siguiente proposición es el primer paso en la deteminación del espacio de *moduli* del toro.

Proposición 5.2. *Sean Λ, Λ' dos retículos de $\mathbb{C}$. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) *T_Λ y $T_{\Lambda'}$ son biholomorfas.*
(ii) *Λ y Λ' son proporcionales, es decir, $\exists w \in \mathbb{C}^*$ tal que $\Lambda' = \{w\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.*

Demostración. La implicación (ii)⇒(i) es inmediata, ya que la multiplicación por w induce una aplicación biholomorfa de T_Λ en $T_{\Lambda'}$ cuya inversa está inducida por la multiplicación por w^{-1}.

Estudiemos ahora (i)⇒(ii). Sea $\alpha : T_\Lambda \to T_{\Lambda'}$ una aplicación biholomorfa. Podemos suponer que $\alpha(0 + \Lambda) = 0 + \Lambda'$, componiendo α con una traslación de $T_{\Lambda'}$. Denotemos π_Λ y $\pi_{\Lambda'}$ las dos proyecciones.

Consideremos la aplicación holomorfa $\alpha \circ \pi_\Lambda : \mathbb{C} \to T_{\Lambda'}$. Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, sabemos que existe una única aplicación $\tilde{\alpha} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\alpha \circ \pi_\Lambda = \pi_{\Lambda'} \circ \tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}(0) = 0$; es fácil ver que $\tilde{\alpha}$ ha de ser holomorfa. Intercambiando los papeles de Λ y Λ', y utilizando α^{-1}, podemos ver que $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, por lo que, $\exists w \in \mathbb{C}^*$ tal que $\tilde{\alpha}(z) = wz$, lo que implica fácilmente que $\Lambda' = w\Lambda$. □

Nuestro siguiente objetivo es dar un método para construir funciones meromorfas sobre el toro. Este método está basado en las *funciones theta de Riemann*; como veremos más adelante estas funciones están ligadas a los fibrados vectoriales holomorfos sobre el toro. La referencia de este método es el libro de Clemens.

Consideremos un toro T_Λ; por la proposición anterior, podemos suponer que Λ está generado por 1 y por un complejo τ tal que $\Im(\tau) > 0$. Como T_Λ es compacto, ya sabemos que las únicas funciones holomorfas son las funciones constantes. Veamos una demostración alternativa de este resultado:

Sea $f : T_\Lambda \to \mathbb{C}$ una función holomorfa; podemos interpretar f como una función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que es doblemente periódica, es decir,

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+\tau) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Las funciones que verifican la periodicidad con 1 son funciones que admiten desarrollos en serie de Fourier; veámoslo. Consideremos la aplicación $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, dada por $\rho(z) = e^{2i\pi z}$; se trata de la cubierta universal de $\mathbb{C}^*$. El grupo de automorfismos de ρ está engendrado por la traslación $z \mapsto z + 1$. Utilizando la teoría de cubiertas, vemos que el conjunto de funciones holomorfas de $\mathbb{C}^*$ coincide con el conjunto de funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ que son 1-periódicas.

Así, si $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es holomorfa, sabemos que admite un desarrollo en serie de Laurent

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

que converge uniformemente sobre compactos.

Por tanto, la función $h \circ \rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 1-periódica, admite un desarrollo en serie

$$h \circ \rho(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi nz}$$

que converge uniformemente sobre compactos. En el primer desarrollo, podemos identificar los coeficientes a_n con residuos de ciertas funciones, lo que nos proporciona una fórmula integral en función de h ó $h \circ \rho$.

Las cubiertas ρ y π_Λ factorizan en una cubierta $\mathbb{C}^* \to T_\Lambda$, que es cíclica infinita. La monodromía de esta cubierta está engendrada por la transformación de $\mathbb{C}^*$ dada por $z \mapsto \tau_1 z$, donde $\tau_1 := e^{2i\pi\tau}$; obtenemos otro dominio fundamental para T_Λ, representado por la corona limitada por las circunferencias de radio 1 y radio $e^{-2\pi\Im(\tau)} < 1$. El toro se obtiene al identificar la gran circunferencia con la pequeña mediante un giro de ángulo $2\pi\Re(\tau)$.

Volvamos a nuestra función f doblemente periódica. Tenemos

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi nz}, \quad a_n = \tau_1^n a_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como $\Im(\tau) > 0$, τ_1 no es una raíz de la unidad, por lo que deducimos que $a_n = 0$ si $n \neq 0$. Por tanto, f es constante.

Vamos a construir una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que sea 1-periódica y tal que $f(z + \tau) = e^{-2i\pi(z+\frac{\tau}{2})} f(z)$ que se llamará *función theta*. Evidentemente, esta función no define una función holomorfa en el toro, pero la podemos interpretar con la ayuda de ρ. Sea $f^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ una función tal que $f = f^* \circ \rho$. Se tiene

$$f^*(\tau_1 z) = \tau_1^{-\frac{1}{2}} \frac{f^*(z)}{z}.$$

Consideremos un desarrollo en serie de Fourier de f,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi nz}.$$

Deducimos que

$$a_n e^{2i\pi\tau(n+\frac{1}{2})} = a_{n+1}.$$

Por tanto, el espacio vectorial de las f que buscamos es de dimensión ≤ 1. Si es de dimensión 1, estará generado por aquella que verifica $a_0 = 1$. Con esta condición y por inducción, se tiene:

$$a_n = e^{i\pi\tau n^2}.$$

Por tanto, la función debería ser igual a

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n(\tau n+2z)}. \tag{1}$$

Es fácil ver que esta serie converge uniformemente sobre compactos. En efecto, si suponemos que $|z|$ está acotado y que $n \gg 1$, entonces

$$\left|e^{i\pi n(\tau n+2z)}\right| = e^{-\pi n(\Im(\tau)n+2\Im(z))} < e^{-\pi\tau\frac{n^2}{2}}.$$

Como la serie de término general $e^{-\pi\tau\frac{n^2}{2}}$ es convergente, obtenemos el resultado.

Definición 5.3. La *función theta* asociada al toro T_Λ es la función holomorfa $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por el desarrollo en serie (1).

Propiedades 5.4. La función θ posee las siguientes propiedades.

(θ1) La función θ es par.
(θ2) La función θ posee un único cero en el interior de $R := R_{1,\tau}$ y dicho cero se encuentra en el centro $\frac{1}{2}(1+\tau)$.

Demostración. La propiedad (θ1) se comprueba verificando que $a_n = a_{-n}$. Estudiemos ahora (θ2). Consideremos un rectángulo $R_w = w + R$ que no posea ningún cero en su borde. Consideremos el camino cerrado ∂R_w recorrido en el sentido positivo. Calculemos el número de ceros utilizando el teorema de los residuos. El número de ceros contado con multiplicidad en el interior de R_w es

$$N := \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R_w} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz.$$

Debido a la 1-periodicidad, las integrales sobre los lados verticales se cancelan; sobre los lados horizontales utilizaremos la propiedad similar a la τ-periodicidad:

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_w^{w+1}\left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - \frac{\theta'(z+\tau)}{\theta(z+\tau)}\right)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_w^{w+1} 2i\pi dz = 1;$$

en efecto,

$$\frac{\theta'(z+\tau)}{\theta(z+\tau)} = \frac{\left(e^{-2i\pi(z+\tau/2)}\theta(z)\right)'}{e^{-2i\pi(z+\tau/2)}\theta(z)} = -2i\pi + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}.$$

Para calcular donde está el cero, volvemos a utilizar el teorema de los residuos. El único cero en el interior de R_w es

$$\begin{aligned}
z_0 =&\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R_w} z\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz\\
=&\frac{1}{2i\pi}\int_{w}^{w+\tau}\left((z+1)\,\frac{\theta'(z+1)}{\theta(z+1)}-z\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right)dz\\
+&\frac{1}{2i\pi}\int_{w}^{w+1}\left(z\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}-(z+\tau)\,\frac{\theta'(z+\tau)}{\theta(z+\tau)}\right)dz\\
=&\frac{1}{2i\pi}\int_{w}^{w+\tau}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz+\frac{1}{2i\pi}\int_{w}^{w+1}\left(2i\pi(z+\tau)-\tau\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right)dz=\\
=&\ \frac{1}{2i\pi}\log(\theta(z))\Big|_{w}^{w+\tau}+\frac{(z+\tau)^2}{2}\Big|_{w}^{w+1}-\frac{\tau}{2i\pi}\log(\theta(z))\Big|_{w}^{w+1}\\
=&A+B-C.
\end{aligned}$$

Mediante un sencillo cálculo vemos que $B=w+\tau+\frac{1}{2}$. Para calcular el primer y el tercer sumandos debemos elegir determinaciones apropiadas del logaritmo.

Como $\theta(w)=\theta(w+1)$, los logaritmos en los extremos difieren por un múltiplo entero de $2i\pi$, por lo que se tiene, $C=m'\tau$, con $m'\in\mathbb{Z}$.

De manera análoga tenemos, $A=-w-\frac{\tau}{2}+n'$, con $n'\in\mathbb{Z}$. En definitiva, encontramos que el cero se encuentra en $z_0=\frac{1}{2}(1+\tau)+m+n\tau$ donde $m,n\in\mathbb{Z}$ son tales que z_0 está en el interior de R_w. En particular, podemos tomar $w=0$, y tenemos el resultado. $\square$

Vamos a utilizar las funciones θ para responder a la Pregunta 3.9. Sean $P=\{p_1+\Lambda,\dots,p_r+\Lambda\}$ y $Z=\{q_1+\Lambda,\dots,q_r+\Lambda\}$. Definimos la aplicación meromorfa $f:\mathbb{C}\dashrightarrow\mathbb{C}$,

$$f(z)=\frac{\prod_{j=1}^r\theta(z-q_j-1/2-\tau/2)}{\prod_{j=1}^r\theta(z-p_j-1/2-\tau/2)}.$$

Evidentemente f es 1-periódica. Por otra parte,

$$f(z+\tau)=\frac{e^{-2i\pi\sum_{j=1}^r(z+q_j-\frac{1}{2}(1+\tau))}}{e^{-2i\pi\sum_{j=1}^r(z+p_j-\frac{1}{2}(1+\tau))}}f(z)=e^{2i\pi\sum_{j=1}^r(p_j-q_j)}f(z).$$

Impondremos la condición siguiente:

Condición de Abel 5.5. $\sum_{j=1}^r(q_j+\Lambda)=\sum_{j=1}^r(p_j+\Lambda)$.

Si Z, P verifican la condición de Abel, $f(z+\tau)=e^{2i\pi n\tau}f(z)$ donde $n\in\mathbb{Z}$ y solo depende de los representantes, p_j, q_j.

Por tanto, la función $g(z)=e^{-2i\pi nz}f(z)$ es meromorfa y doblemente periódica para τ y 1. Por las propiedades de θ g induce una función meromorfa $g:T_\Lambda\dashrightarrow\mathbb{C}$ tal que $Z(g)=Z$ y $P(g)=P$. Hemos demostrado la mitad del siguiente teorema:

Teorema de Abel 5.6. *La condición de Abel es necesaria y suficente para resolver* 3.9 *en el caso de* T_Λ.

Dejamos como ejercicio la necesidad de la condición de Abel (es una consecuencia del teorema de los residuos).

6. Curvas algebraicas planas

Definición 6.1. Sea $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polinomio irreducible. Diremos que $C = f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ es una curva algebraica afín. Si $(x_0,y_0) \in C$, diremos que es un punto liso si $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0)$; en caso contrario diremos que el punto es singular. Denotaremos C^* el conjunto de puntos lisos de C.

Utilizando la teoría de la resultante (el libro de Griffiths es una buena referencia) es fácil ver que una curva tiene a lo más un número finito de puntos singulares, y además, que toda curva posee infinitos puntos.

Recordemos el teorema siguiente cuya demostración (en el caso general) se puede encontrar en los libros de Griffiths-Harris o Gunning-Rossi, por ejemplo.

Teorema de la Función Implícita 6.2. *Sea* W *un abierto de* $\mathbb{C}^2$ *y* $f : W \to \mathbb{C}$ *una función holomorfa. Sea* $(x_0,y_0) \in W$ *tal que* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ *y denotemos* $t_0 = f(x_0,y_0)$*. Entonces, existen entornos abiertos* $U_{(x_0,y_0)}$ *de* x_0 *en* $\mathbb{C}$*,* $V_{(x_0,y_0)}$ *de* y_0 *en* $\mathbb{C}$ *y una función holomorfa* $h : U_{(x_0,y_0)} \to V_{(x_0,y_0)}$ *tales que* $U_{(x_0,y_0)} \times V_{(x_0,y_0)} \subset W$ *y*

$$(x,y) \in U_{(x_0,y_0)} \times V_{(x_0,y_0)} \cap f^{-1}(t_0) \Longleftrightarrow y = h(x).$$

Las curvas algebraicas proporcionan nuevos ejemplos de superficies de Riemann.

Proposición 6.3. C^* *es una superficie de Riemann no compacta.*

Demostración. En primer lugar, C^* es no compacta a causa del principio del módulo máximo. Veamos la estructura de superficie de Riemann.

Sea $p_0 := (x_0,y_0) \in C^*$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Denotemos U_{p_0}, V_{p_0} y $h_{p_0} : U_{p_0} \to V_{p_0}$ lo que nos proporciona el teorema de la función implícita en este caso.

Sea $p_0 := (x_0,y_0) \in C^*$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$. Cambiando los papeles de las variables obtenemos del teorema de la función implícita entornos $\tilde{U}_{(x_0,y_0)}$ de x_0, $\tilde{V}_{(x_0,y_0)}$ de y_0 y $\tilde{h}_{(x_0,y_0)} : \tilde{V}_{(x_0,y_0)} \to \tilde{U}_{(x_0,y_0)}$ tales que

$$(x,y) \in \tilde{U}_{(x_0,y_0)} \times \tilde{V}_{(x_0,y_0)} \cap f^{-1}(0) \Longleftrightarrow x = \tilde{h}_{(x_0,y_0)}(y).$$

En el primer caso, construimos un homeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} U_{(x_0,y_0)} \times V_{(x_0,y_0)} \cap C^* & \to & U_{(x_0,y_0)} \\ (x,y) & \mapsto & x; \end{array}$$

en el segundo,

$$\begin{array}{ccc}\tilde{U}_{(x_0,y_0)} \times \tilde{V}_{(x_0,y_0)} \cap C^* & \to & \tilde{V}_{(x_0,y_0)} \\ (x,y) & \mapsto & y.\end{array}$$

Es fácil verificar que se trata de homeomorfismos y que los cambios de cartas son holomorfos. $\square$

Consideremos ahora el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2$; se trata del espacio de rectas vectoriales de $\mathbb{C}^3$ y posee de forma natural estructura de variedad analítica compleja compacta de dimensión 2. Los elementos de $\mathbb{P}^2$ se presentarán mediante coordenadas homogéneas $[x\colon y\colon z]$; podemos ver $\mathbb{P}^2$ como una compactificación de $\mathbb{C}^2$, identificando (x,y) con $[x\colon y\colon 1]$.

Definición 6.4. Sea $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ un polinomio irreducible homogéneo de grado $d > 0$. Diremos que $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x,y,z) = 0\}$ es una curva proyectiva plana. Si $[x_0 : y_0 : z_0] \in C$, diremos que es un punto liso si $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right) \neq (0,0,0)$; en caso contrario diremos que el punto es singular. Denotaremos C^* el conjunto de puntos lisos de C.

Observemos que las igualdades y desigualdades que aparecen en la definición no dependen de los representantes elegidos.

Observación 6.5. Una de las propiedades principales de los polinomios homogéneos es la *identidad de Euler*; si F es homogéneo de grado d,

$$X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} = dF.$$

Hay varias relaciones entre curvas afines y curvas proyectivas. Estudiemos dos de ellas.

La inclusión $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ nos permite establecer la biyección entre los conjuntos de:

- Curvas afines de grado d,
- Curvas proyectivas de grado d que no contienen $\{Z = 0\}$,

donde a una curva afín C definida por $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ le hacemos corresponder la curva proyectiva $\bar{C}$ definida por $F := Z^d f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$; si $\bar{C}$ es una curva proyectiva definida por un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$, $F \neq Z$, le asociamos la curva afín definida por $f := F(X,Y,1)$.

Utilizando la identidad de Euler, si C y $\bar{C}$ son dos curvas correspondientes, tenemos una biyección

$$\{(x_0,y_0) \in C \mid (x_0,y_0) \text{ sing. en } C\} \longleftrightarrow \left\{[x_0\colon y_0\colon 1] \in \bar{C} \mid [x_0\colon y_0\colon 1] \text{ sing. en } \bar{C}\right\}.$$

También podemos encajar $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ identificando (x, z) con $[x : 1 : z]$, o (y, z) con $[1 : y : z]$. De esta forma, podemos ver toda curva proyectiva como unión de tres curvas afines.

Proposición 6.6. *Si C es una curva proyectiva C^* es una superficie de Riemann; C^* es compacta si y solo si $C = C^*$.*

Demostración. Utilizamos que podemos cubrir C con tres curvas afines; la parte lisa de C es la unión de las partes lisas de las curvas afines y las cartas de dichas curvas dan lugar al atlas holomorfo de C^*. Observemos que las tres inclusiones de $\mathbb{C}^2$ dan lugar a un cubrimiento abierto de $\mathbb{P}^2$; como la intersección de C con cada uno de los abiertos es una curva afín (un cerrado relativo), la curva C es un cerrado de $\mathbb{P}^2$ y por tanto un compacto, lo que da el resultado ya que los puntos singulares no son aislados. $\square$

Ejemplo 6.7. Dada una curva algebraica, queremos conocer detalles sobre su topología: género, número de componentes conexas. Vamos a estudiar un caso particular. Sea C_d la curva proyectiva definida por $F := X^d + Y^d + Z^d$; es fácil verificar que F es irreducible.

Sea $P_0 = [0 : 0 : 1]$; el punto P_0 no está en C_d. El haz de rectas proyectivas que pasan por P_0 es isomorfo a $\mathbb{P}^1$ y podemos definir una aplicación π de C_d en $\mathbb{P}^1$ de forma que a cada $P \in C_d$ le asociamos la recta que une P y P_0. Analíticamente, tenemos $\pi : C_d \to \mathbb{P}^1$, $\pi([x : y : z]) := [x : y]$. Dejamos comprobar que π es holomorfa (se trata de la restricción de una aplicación holomorfa $\mathbb{P}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\} \to \mathbb{P}^1$ dada por $[x : y : z] \mapsto [x : y]$).

Sea $[x_0 : y_0] \in \mathbb{P}^1$ tal que $x_0^d + y_0^d \neq 0$. Entonces, $\pi^{-1}([x_0 : y_0]) = \{[x_0 : y_0 : z_0] \mid z_0^d = -(x_0^d + y_0^d)\}$ es un conjunto de d puntos distintos.

Los puntos $[x_0 : y_0]$ en los que $x_0^d + y_0^d = 0$ son de la forma $P_k := [1 : \omega\zeta^k]$, $k = 1, \ldots, d$, con $w = e^{i\pi/d}$, $\zeta = e^{2i\pi/d}$. Para dichos puntos, el conjunto $\pi^{-1}(P_k) = \{[1 : \omega\zeta^k : 0]\}$ solo consta de un punto.

Por las propiedades de las aplicaciones holomorfas, π es una cubierta de d hojas (no necesariamente conexa) ramificada en los puntos $P_1, \ldots, P_d$, con índice de ramificación d en la preimagen de cada uno de ellos. La cubierta es cíclica ya que el grupo de automorfismos de π está engendrado por $\varphi : C_d \to C_d$, $\varphi([x : y : z]) = [x : y : \zeta z]$.

Estudiemos π en torno a la preimagen de un punto P_k. Como $Q_k = \pi^{-1}(P_k)$ está en el abierto afín de las variables Y, Z podemos tomar cartas en este abierto, donde la ecuación de C_d es $Y^d + Z^d = -1$ y $Q_k = (\omega\zeta^k, 0)$.

Utilizamos la siguiente carta centrada en Q_k. Sea U la componente conexa de $C_d \cap \{(y, z) \mid |z| < 1\}$ que contiene a Q_k. Es fácil ver que $\psi : U \to \mathbb{D}$, $\psi(y, z) = z$, es una carta de C_d, cuya inversa es $\psi^{-1}(z) = (r_k(z), z)$, donde r_k es la determinación de la raíz d-ésima de $-(1 + z^d)$ que envía 0 sobre $\omega\zeta^k$.

Así, $\pi \circ \psi^{-1}(z) = r_k(z)$. Deducimos que en la parte no ramificada de la cubierta podemos conectar los elementos de la fibra de un punto, por lo que C_d es conexa.

Con estos datos podemos aplicar la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$\chi(C_d) = d(2 - d) + d = d(3 - d) = 2\left(1 - \frac{(d-1)(d-2)}{2}\right).$$

Por tanto el género g_d de C_d es

$$g_d = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

El ejemplo anterior sirve para resolver el caso general: *Si C es una curva proyectiva plana de grado d entonces su género coincide con el de C_d.* Daremos una idea de la demostración.

Sea $V_d := \{F(X, Y, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z] \mid F$ homogéneo de grado $d\} \cup \{0\}$; es un espacio vectorial de dimensión $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Sea $\mathbb{P}_d := \mathbb{P}(V_d)$, el espacio proyectivo asociado a V_d; es una variedad analítica compleja de dimensión $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$ y el espacio de curvas proyectivas (irreducibles) de grado d es un abierto denso de $\mathbb{P}_d$.

Sea $X := \{([x : y : z], [F]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}_d \mid F(x, y, z) = 0\}$; X es una variedad analítica compacta. La restricción $\pi : X \to \mathbb{P}_d$ de la segunda proyección es una aplicación holomorfa sobreyectiva propia.

Sea $U \subset \mathbb{P}_d$ el abierto denso que corresponde al espacio de curvas lisas. Es fácil ver que $\pi_| : \pi^{-1}(U) \to U$ es además una submersión.

Por la teoría de Ereshmann, $\pi_|$ es una fibración diferenciable localmente trivial. Por tanto, todas las fibras son difeomorfas. Las fibras de dicha fibración son las curvas proyectivas planas lisas de grado d, por lo que se trata de superficies de género $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Hay otros métodos para calcular este género.

7. Toros y cúbicas

Vamos a comenzar construyendo la función $\wp$ de Weierstrass. Fijemos un retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}$ y consideremos la serie

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

donde $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$. Esta serie aparece de manera natural cuando se quiere encontrar una función meromorfa con polos en Λ y partes principales $\dfrac{1}{(z-\lambda)^2}$, para cada $\lambda \in \Lambda$, utilizando el método de Mittag-Leffler. En efecto:

Proposición 7.1. *La serie anterior converge uniformemente sobre compactos de* $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Demostración. Esta demostración está sacada del libro de Kirwan. Basta demostrar el resultado siguiente:

$\forall R > 0, \exists \Lambda_R \subset \Lambda$ finito tal que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$ converge uniformemente en el disco $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| \leq R\}$.

Fijemos $\Lambda_R = \Lambda \cap \Delta_{2R}$; como Λ es discreto, este conjunto es finito. Fijemos una base λ_1, λ_2 de Λ. Entonces:

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. si } \lambda = m\lambda_1 + n\lambda_2,\ |\lambda| \geq \delta\sqrt{m^2+n^2}.$$

En efecto, consideremos la aplicación continua $f : S^1 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x+iy) := |x\lambda_1 + y\lambda_2|$. Como Λ es un retículo, se tiene que $f(x+iy) > 0$, $\forall x+iy \in S^1$. Como f es continua y S^1 es compacto, la función posee un mínimo $\delta > 0$. Por tanto,

$$|\lambda| = \sqrt{m^2+n^2}\left|\frac{\lambda}{\sqrt{m^2+n^2}}\right| = \sqrt{m^2+n^2} f\left(\frac{m+in}{\sqrt{m^2+n^2}}\right) \geq \sqrt{m^2+n^2}\delta.$$

Vamos a utilizar este resultado en los cálculos que siguen:

Supongamos que $|z| \leq R$. Entonces:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \left| \frac{z(2\lambda - z)}{(z-\lambda)^2\lambda^2} \right| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \frac{5/2R|\lambda|}{|\lambda|^2|\lambda^2|/4} = (1)$$

ya que $|2\lambda - z| \leq 2|\lambda| + |z| \leq 5/2|\lambda|$ y $|z-\lambda| \geq |\lambda| - |z| \geq 1/2|\lambda|$. Continuamos:

$$(1) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_R} \frac{10R}{|\lambda|^3} \leq \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} 10\delta^{-3} R \sqrt{m^2+n^2}^{-3} =$$

$$= 10\delta^{-3} R \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{\text{máx}\{|m|,|n|\}=k}}_{8k \text{ términos}} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 10\delta^{-3} R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2} < \infty.$$

Hemos mayorado uniformemente la serie lo que demuestra el resultado. $\square$

Corolario 7.2. *La aplicación $\wp$ posee las propiedades siguientes:*

(i) *$\wp$ es meromorfa en $\mathbb{C}$.*

(ii) $\wp'(z) = -2 \displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$.

(iii) $\wp$ *es par.*
(iv) $\wp(z+\lambda) = \wp(z)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son inmediatas (para la tercera basta reorganizar la serie al cambiar z por $-z$).

Reorganizando la serie de $\wp'$, observamos que $\wp'(z+\lambda) = \wp'(z)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Fijando un tal λ, tenemos que existe una constante $c(\lambda)$ tal que $\wp(z+\lambda) = \wp(z) + c(\lambda)$. Apliquemos esta igualdad a $z = -\lambda/2$; se tiene $\wp(\lambda/2) = \wp(-\lambda/2) + c(\lambda)$. Como $\wp$ es par, tenemos que $c(\lambda) = 0$, por lo que la cuarta propiedad es cierta. $\square$

Por tanto, $\wp$ define una función meromorfa $T_\Lambda \dashrightarrow \mathbb{C}$, o lo que es lo mismo, una aplicación holomorfa, $T_\Lambda \to \mathbb{P}^1$.

Proposición 7.3. *Como aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas, $\wp$ es una cubierta de dos hojas ramificada en cuatro puntos, correspondientes a las clases de $\Lambda/2$ módulo Λ.*

Demostración. Como $\wp$ es una aplicación abierta entre compactos conexos, es sobreyectiva. Ya sabemos que $\wp$ tiene un único polo en Λ y este de orden 2, por lo que es un punto de ramificación y la aplicación es una cubierta de dos hojas.

Sea $t \in \mathbb{C}$ y sea $z + \Lambda$ tal que $\wp(z) = t$. Por la condición de Abel sabemos que la otra preimagen módulo Λ es $-z + \Lambda$, por lo que la ramificación se produce en los puntos tales que $z + \Lambda = -z + \Lambda$, es decir, $z \in \Lambda/2$. Como hay tres clases de $\Lambda/2$ módulo Λ distintas de Λ, tenemos el resultado. $\square$

Consideremos ahora la función meromorfa $\wp(z) - z^{-2}$; esta función es holomorfa en un entorno del origen, donde se anula. Como además es par, el desarrollo en serie será de la forma:

$$\wp(z) - z^{-2} = az^2 + bz^4 + O(z^5).$$

Por tanto,

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 2az + 4bz^3 + O(z^4).$$

Para eliminar los términos de menor grado, consideramos

$$\wp(z)^3 = z^{-6} + 3az^{-2} + 3b + O(1)$$

y

$$\wp'(z)^2 = 4z^{-6} - 8az^{-2} - 16b + O(1).$$

Así, obtenemos:

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 = -20az^{-2} - 28b + O(1).$$

Finalmente definimos:

$$k(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20a\wp(z) + 28b = O(1).$$

Es claro que $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa Λ-periódica que se anula en el origen. Por tanto, $k \equiv 0$. Deducimos que $\wp$ y $\wp'$ satisfacen una ecuación algebraica. Si $p_\Lambda(X) = 4X^3 - 20aX - 28b$, entonces, $\wp'^2 - p_\Lambda(\wp) \equiv 0$. Vamos a calcular los coeficientes a, b.

Por los resultados anteriores sabemos que $\wp$ no es un homeomorfismo local si y solo si $z \in \Lambda/2 \Leftrightarrow z \in \Lambda$ o $\wp'(z) = 0$. Así,

$$z \in \Lambda/2 \setminus \Lambda \Leftrightarrow \wp'(z) = 0 \Leftrightarrow p_\Lambda(\wp(z)) = 0.$$

Hemos encontrado las tres raíces de p_Λ. Si λ_1, λ_2 forman una base de Λ, entonces:

$$p_\Lambda(X) := 4\left(X - \wp\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\right)\left(X - \wp\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\right)\left(X - \wp\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)\right).$$

Teorema 7.4. *La aplicación*

$$\begin{array}{cccccc} \pi_\Lambda : & T_\Lambda & \to & C_\Lambda & \subset \mathbb{P}^2 \\ z \notin \Lambda & z + \Lambda & \mapsto & [\wp(z) \colon \wp'(z) \colon 1] & \\ & \Lambda & \mapsto & [0 \colon 1 \colon 0] & \end{array}$$

es una aplicación biholomorfa de T_Λ en la cúbica lisa C_Λ de ecuación

$$Y^2 Z = Z^3 p_\Lambda\left(\frac{X}{Z}\right).$$

Demostración. La cúbica C_Λ es lisa por la afirmación general siguiente, fácil de demostrar:

La cúbica de ecuación $Y^2Z = a(X - bZ)(X - cZ)(X - dZ)$, con $a \in \mathbb{C}^*$, $b, c, d \in \mathbb{C}$ es lisa si y solo si b, c, d son tres complejos distintos.

Veamos que π_Λ es holomorfa. Es inmediato si tomamos puntos $z + \Lambda \neq \Lambda$. Estudiemos el único punto que queda. Recordemos que $\wp(z) = z^{-2}a(z)$, $\wp'(z) = z^{-3}b(z)$, donde a, b son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ y holomorfas en un entorno del origen, con $a(0) = 1$, $b(0) = -2$. Así, si $z \neq 0$,

$$\pi_\Lambda(z + \Lambda) = [z^{-2}a(z) \colon z^{-3}b(z) \colon 1] = [za(z) \colon b(z) \colon z^3],$$

por lo que π_Λ admite una extensión holomorfa en el origen.

Por las propiedades de $\wp$ y $\wp'$ es fácil ver que π_Λ es sobreyectiva e inyectiva, por lo que tenemos el resultado. $\square$

Hemos demostrado que todo toro es biholomorfo a una cúbica lisa. Se puede ver que toda cúbica lisa es biholomorfa a un toro. Los toros poseen una estructura de grupos topológicos; vamos a interpretar esta estructura geométricamente en las cúbicas.

Afirmación 7.5. *Los puntos* $\pi_\Lambda(z_1), \pi_\Lambda(z_2), \pi_\Lambda(z_3)$ *están alineados si y solo si* $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0$ *módulo* Λ*. Si* $z_1 \equiv z_2 \not\equiv z_3$*,* alineados *significa que la tangente a* C_Λ *por* $\pi_\Lambda(z_1)$ *pasa por* $\pi_\Lambda(z_3)$*; si* $z_1 \equiv z_2 \equiv z_3$*,* alineados *significa que* $\pi_\Lambda(z_1)$ *es un punto de inflexión de* C_Λ*.*

Recordemos la definición de punto de inflexión:

Definición 7.6. Sea C una curva afín que pasa por el origen y tal que la tangente a C en el origen es la recta $Y = 0$. Sea $f(X, Y) = 0$ una ecuación de C tal que la descomposición de f en formas homogéneas es $f(X, Y) = Y + f_2(X, Y) + \cdots + f_d(X, Y)$, f_j homogéneo de grado j. Entonces, el origen es un punto de inflexión de C si $f_2(X, 0) \equiv 0$.

Para ver si un punto es de inflexión basta tomar una carta afín y escoger coordenadas para estar en la situación de la definición.

Demostración de la Afirmación 7.5. Veremos solamente una de las dos direcciones.

Supongamos primero que $z_1, z_2, z_3 \in \Lambda$. Es inmediato que la imagen es un punto de inflexión.

Si $z_1 \in \Lambda$, $z_2, z_3 \notin \Lambda$, tenemos $\wp(z_2) = \wp(z_3)$ ($\wp$ es par) y $\wp'(z_2) = -\wp'(z_3)$. La recta $X - \wp(z_2)Z = 0$ pasa por los tres puntos. Si $z_2 \equiv z_3$, tenemos que $z_2 \in \Lambda/2$, y un cálculo sencillo muestra que la recta anterior es tangente a la cúbica en $\pi_\Lambda(z_2)$.

Supongamos que $z_1, z_2, z_3 \notin \Lambda$. Supongamos que los tres son distintos módulo Λ. En particular, $z_1 + z_2 \notin \Lambda$. Consideremos una función meromorfa $f : T_\Lambda \dashrightarrow \mathbb{C}$, $f := a\wp + b\wp' + c$ tal que $f(z_1) = f(z_2) = 0$; los coeficientes a, b, c se obtienen resolviendo una sistema homogéneno de ecuaciones lineales. Como $\wp(z_1) \neq \wp(z_2)$, se tiene $b \neq 0$. Por tanto, f posee un único polo de orden 3 en Λ; así, ha de poseer tres ceros y dos de ellos son z_1 y z_2. Llamemos w a un representante del tercero. Por la condición de Abel, $z_1 + z_2 + w \equiv 0$, de donde $w \equiv z_3$ y $f(z_3) = 0$. Esto implica que $\pi_\Lambda(z_1)$, $\pi_\Lambda(z_2)$ y $\pi_\Lambda(z_3)$ están en la recta de ecuación $aX + bY + cZ = 0$.

Supongamos ahora que $z_1 \equiv z_2$. Consideremos la recta tangente a C_Λ en $\pi_\Lambda(z_1)$. La ecuación de esta recta es

$$p'_\Lambda(\wp(z_1))X - 2\wp'(z_1)Y = p'_\Lambda(\wp(z_1))\wp(z_1) - 2\wp'(z_1)^2.$$

Consideremos la función $f : T_\Lambda \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) := p'_\Lambda(\wp(z_1))\wp(z) - 2\wp'(z_1)\wp'(z) - p'_\Lambda(\wp(z_1))\wp(z_1) + 2\wp'(z_1)^2.$$

Es evidente que $f(z_1) = 0$; al derivar la ecuación algebraica de $\wp$ obtenemos:

$$2\wp'(z)\wp''(z) = p'_\Lambda(\wp(z))\wp'(z).$$

Esto implica que $f'(z_1) = 0$. Por tanto, f posee en z_1 un cero de orden al menos dos. Como $z_1 \notin \Lambda/2$, se tiene $\wp'(z_1) \neq 0$, y f solo posee un polo de orden 3 en Λ. Vemos como antes que el tercer cero se encuentra en z_3, lo que implica sin problemas que $\pi_\Lambda(z_3)$ está en la recta tangente y que no hay ningún otro punto que ahí se encuentre. □

Este resultado tiene interpretaciones geométricas importantes. Por ejemplo, podemos interpretar la operación de grupo abeliano en una cúbica $C := C_\Lambda$ (de hecho en cualquier cúbica). El elemento neutro es el punto $O := [0 : 1 : 0]$, que es un punto de inflexión (punto del infinito correspondiente a las rectas verticales). Sean $P_1, P_2 \in C$; sabemos que si denotamos $R := -(P_1+P_2)$, se tiene, $P_1+P_2+R = O$, por lo que P_1, P_2, R están alineados, R es el tercer punto de intersección de la recta P_1P_2 con C. Sea $Q := P_1 + P_2 = -R$; como $O + R + Q = O$, se tiene que Q es el tercer punto de intersección de la recta OQ con C. Esto nos permite construir geométricamente la suma de dos puntos. Observemos que, en general, P y $-P$ están alineados con O, por lo que están en una recta vertical; es fácil ver que son simétricos con respecto al eje X.

Deducimos de lo anterior que los puntos de torsión dos (correspondientes a $\Lambda/2$) son los puntos con tangente vertical; como en T_Λ hay tres puntos de orden dos, vemos que en C hay tres tangentes verticales. Por otra parte, los puntos de inflexión se corresponden con el origen y los puntos de orden tres; estos puntos forman un grupo isomorfo al producto de dos cíclicos de orden 3. Por una parte deducimos que en una cúbica hay nueve puntos de inflexión; dados dos elementos, el opuesto de su suma está en el subgrupo, por lo que deducimos la siguiente propiedad clásica de las cúbicas:

La recta que une dos puntos de inflexión de una cúbica corta a esta cúbica en un tercer punto de inflexión. La configuración de rectas que unen los puntos de inflexión posee doce rectas y se llama configuración de Hesse.

8. Fibrados vectoriales y divisores

Definición 8.1. Sea X una superficie de Riemann, E una variedad compleja de dimensión dos y $\pi : E \to X$ una aplicación holomorfa. Diremos que (E, π), o E, es un fibrado vectorial holomorfo de rango 1, si existe un recubrimiento abierto $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que:

(a) para cada $i \in I$ existe una aplicación biholomorfa $\rho_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ tal que si $p_i : U_i \times \mathbb{C} \to U_i$ es la primera proyección, se tiene $p_i \circ \rho_i = \pi_{|\pi^{-1}(U_i)}$;

(b) para cada $(i, j) \in I^2$ existe una función holomorfa $g_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ tal que si $x \in U_i \cap U_j$ y $t \in \mathbb{C}$, se tiene $\rho_j \circ \rho_i^{-1}(x, t) = (x, g_{ji}(x)t)$.

En general, llamaremos fibrados sin más a esta clase de fibrados. Los abiertos U_i se llaman cartas de trivialización, las aplicaciones ρ_i se llaman trivializaciones y las funciones g_{ji} se llaman funciones de transición del fibrado o cambios de cartas. Observemos que dados $i, j, k \in I$, restringiéndonos a $U_i \cap U_j \cap U_k$, se tiene que $g_{ki} = g_{kj}g_{ji}$, multiplicación de funciones. En particular, $g_{ii}(x) = 1$ y $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$.

En cada trivialización las fibras de π tienen la estructura de espacio vectorial heredada de $\mathbb{C}$; observemos que $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$, y que la acción sobre $\mathbb{C}$ es lineal. Por tanto, los cambios de cartas respetan la estructura de espacio vectorial de las fibras. Así, para cada $x \in X$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión uno.

Ejemplo 8.2. Sea $E_k := \{([x : y], (u, v)) \mid x^k v = y^k u\}$; E_k es una variedad analítica de dimensión 2. Consideremos $\pi_k : E_k \to \mathbb{P}^1$ la restricción de la primera proyección. Vamos a ver que π_k es un fibrado.

Consideremos el recubrimiento abierto $\{U, V\}$ donde $U = \{[x : y] \mid y \neq 0\}$ y $V = \{[x : y] \mid x \neq 0\}$. Tenemos las trivializaciones:

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^{-1}(U) & \xrightarrow{\rho_U} & U \times \mathbb{C} \\ ([x:y],(u,v)) & \mapsto & ([x:y],v), \end{array} \quad \rho_U^{-1}([x:y],z) = \left([x:y], \left(\frac{x^k z}{y^k}, z\right)\right)$$

y

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^{-1}(V) & \xrightarrow{\rho_V} & V \times \mathbb{C} \\ ([x:y],(u,v)) & \mapsto & ([x:y],u), \end{array} \quad \rho_V^{-1}([x:y],z) = \left([x:y], \left(z, \frac{y^k z}{x^k}\right)\right).$$

El abierto $U \cap V = \{[x : y] \mid xy \neq 0\}$ es naturalmente isomorfo a $\mathbb{C}^*$, donde $t \in \mathbb{C}^*$ se identifica con $[t : 1] \in U \cap V$. Observemos que si $[x : y] \in U \cap V$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\rho_V \circ \rho_U^{-1}([x:y],z) = \rho_V\left([x:y], \left(\frac{x^k z}{y^k}, z\right)\right) = \left([x:y], \frac{x^k z}{y^k}\right).$$

Por tanto, tenemos la función de transición $g_{VU} : U \cap V \to \mathbb{C}^*$ con $g_{VU}([x : y]) = \frac{x^k}{y^k}$, es decir $g_{VU}(t) = t^k$. Las condiciones de compatibilidad determinan las demás funciones de transición.

En realidad, las funciones de transición determinan el fibrado salvo isomorfismo. Consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y una familia de funciones holomorfas $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^* \mid (i,j) \in I^2\}$ verificando la condición de compatibilidad que llamaremos de *cociclo*: $g_{ik} = g_{ij}g_{jk}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$ siempre que $i, j, k \in I$. Definimos en $\coprod_{i\in I} U_i \times \mathbb{C}$ la siguiente relación de equivalencia: si $(x, t_i) \in U_i \times \mathbb{C}$ e $(y, t_j) \in U_j \times \mathbb{C}$, entonces

$$(x, t_i)_i \sim (y, t_j)_j \Longleftrightarrow x = y, \quad t_j = g_{ji}(x)t_i.$$

Es fácil ver que el cociente

$$E := \coprod_{i\in I} U_i \times \mathbb{C} \Big/ \sim$$

es una variedad analítica de dimensión dos. Las proyecciones sobre el primer factor compuestas con la inclusión $U_i \times \mathbb{C} \to U_i \hookrightarrow X$ inducen una aplicación holomorfa $\pi : E \to X$; se trata de un fibrado donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de cartas de trivialización con funciones de transición $\{g_{ji}\}_{(i,j)\in I^2}$.

Definición 8.3. Sean $\pi : E \to X$ y $\pi' : E' \to X$ dos fibrados sobre una superficie de Riemann X. Diremos que $\varphi : E \to E'$ es un isomorfismo de fibrados si φ es holomorfa, $\pi' \circ \varphi = \pi$ y para cada $x \in X$ la aplicación inducida $\varphi_x : \pi^{-1}(x) \to \pi'^{-1}(x)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de cartas trivializadoras común a ambos fibrados, con aplicaciones biholomorfas ρ_i y ρ'_i, un isomorfismo de fibrados está determinado por funciones holomorfas $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ tales que si $x \in U_i$ y $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\rho'_i \circ \varphi_{|\pi^{-1}(U_i)} \circ \rho_i^{-1}(x, z) = (x, \varphi_i(x)z)$.

Ejemplo 8.4. El ejemplo más sencillo de fibrado es el fibrado $X \times \mathbb{C}$ para el que basta una carta trivializadora. Un fibrado se dice trivial si es isomorfo a $X \times \mathbb{C}$.

Pasemos a definir las secciones holomorfas y meromorfas de un fibrado $\pi : E \to X$.

Definición 8.5. Sea $U \subset X$ un abierto de X; una sección sobre U de π es una aplicación holomorfa $s : U \to E$ tal que $\pi \circ s$ es la inclusión $U \hookrightarrow X$. Si $U = X$, diremos que s es una sección global.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de cartas trivializadoras con trivializaciones ρ_i. Una sección global s determina (y es determinada por) una familia de funciones holomorfas $\{s_i : U_i \to \mathbb{C}\}_{i\in I}$ tales que si $x \in U_i$ y $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\rho_i \circ s(x) = (x, s_i(x))$. Observemos que restringidas a $U_i \cap U_j$, se tiene que $s_j = g_{ji} \cdot s_i$.

Recíprocamente, una sección global está definida por funciones s_i que verifican la condición anterior de compatibilidad.

Ejemplo 8.6. Consideremos una sección holomorfa $\sigma : \mathbb{P}^1 \to E_k$. Consideremos las funciones σ_U, σ_V.

Recordemos que existe un isomorfismo $\mathbb{C} \to U$, dado por $t \mapsto [t\colon 1]$. Por tanto, podemos pensar en σ_U como en una función holomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Su desarrollo en serie en el origen es:

$$s_U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Tenemos también un isomorfismo $\mathbb{C} \to V$, dado por $s \mapsto [1\colon s]$ y veremos σ_U como una función holomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. La función de transición $g_{VU} : U \cap V \to \mathbb{C}^*$ es (en la coordenada s), $g_{VU}(s) = s^{-k}$. Teniendo en cuenta la compatibilidad, sabemos que si $s \neq 0$, entonces

$$s_V(s) = s^{-k} s_U(s^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{-k-n}.$$

Por tanto, deducimos que $k \leq 0$ y que si $l = -k$, $a_n = 0$ si $n > l$.

Deducimos que E_k no tiene secciones aparte de la sección nula si $k > 0$. Si $k \leq 0$ y $l = -k$, podemos identificar las secciones con los polinomios homogéneos de grado l en dos variables X, Y.

La descripción de las secciones holomorfas en una trivialización, nos permiten definir las secciones meromorfas:

Definición 8.7. Una sección meromorfa de un fibrado $\pi : E \to X$ es una aplicación holomorfa $s : X \setminus D \to E$, donde D es un conjunto discreto, tal que $\pi \circ s$ es la inclusión y si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento trivializador de π, entonces las funciones s_i son meromorfas con polos en los puntos de D; denotaremos $s : X \dashrightarrow E$ estas secciones.

Del ejemplo anterior deducimos que para los fibrados E_k hay muchas secciones meromorfas, por ejemplo, aquellas que sobre una carta inducen las fracciones racionales.

Observación 8.8. Sean $s, t : X \dashrightarrow E$ dos secciones meromorfas de un fibrado E, t distinta de la sección nula. Podemos definir una función meromorfa $s/t : X \dashrightarrow \mathbb{C}$. En efecto, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento trivializador, s y t determinan funciones meromorfas $s_i, t_i : U_i \dashrightarrow \mathbb{C}$ tales que en $U_i \cap U_j$ tenemos $s_j = g_{ji} s_i$ y $t_j = g_{ji} t_i$. Por tanto, en $U_i \cap U_j$ tenemos $s_i/t_i = s_j/t_j$, es decir, las funciones s_i/t_i definen una función meromorfa bien definida s/t. Recíprocamente, dada una sección meromorfa s, todas las demás se obtienen multiplicando s por una función meromorfa.

Fijemos una sección meromorfa $s : X \dashrightarrow E$; si $x \in X$ es un polo de s podemos definir en las cartas locales el orden de polo (no depende de la carta elegida). Análogamente, si $x \in X$ es un cero de s, podemos definir el orden de ceros de s en x. Esto nos da lugar a una suma formal $(s) = \sum_{x \in X} m_x x$, donde

$$m_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ no es ni cero ni polo de } s \\ o(x) & \text{si } x \text{ es un cero de orden } o(x) \text{ de } s \\ -p(x) & \text{si } x \text{ es un polo de orden } p(x) \text{ de } s. \end{cases}$$

Llamaremos a (s) el divisor asociado a s; llamaremos soporte de s a $\mathrm{Supp}(s) = \{x \in X \mid m_x \neq 0\}$. Es un conjunto localmente finito de X. Para evitar problemas, supondremos a partir de ahora que X es compacta.

Definición 8.9. Sea X una superficie de Riemann conexa y compacta. El *conjunto de divisores de* X, $\mathrm{Div}(X)$, es el grupo abeliano libre de base $\{x \in X\}$. Un divisor D se escribe de la forma $D = \sum_{x \in X} m_x x$ y el *soporte de* D es $\mathrm{Supp}(D) = \{x \in X \mid m_x \neq 0\}$. El *grado* del divisor D es $\deg(D) = \sum_{x \in X} m_x$.

Observemos que $grad : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos. Estudiemos ahora los divisores asociados a secciones meromorfas.

Propiedades 8.10. Sea $s : X \dashrightarrow E$ una sección meromorfa no idénticamente nula de un fibrado.

(i) Si $t : X \dashrightarrow E$ es una sección meromorfa tal que $(s) = (t)$, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $t = \lambda s$.
(ii) Si $(s) = 0$, el fibrado E es trivial.
(iii) Si E es el fibrado trivial, entonces, $\deg(s) = 0$.
(iv) Si $t : X \dashrightarrow E$ es otra sección meromorfa no idénticamente nula, entonces, $\deg(s) = \deg(t)$. Por tanto, podemos definir el grado de un fibrado que admita secciones meromorfas no idénticamente nulas.
(v) Un fibrado de grado negativo no admite secciones holomorfas no nulas.

Demostración.

(i) Hemos visto que $\frac{s}{t}$ define una función meromorfa. La propiedad sobre los divisores implica que la función no tiene ni ceros ni polos. Por tanto, es una función holomorfa que no se anula nunca, es decir, una constante no nula, ya que X es compacta.

(ii) Tenemos que s es una sección holomorfa que no se anula nunca. Dado $e \in E$, como $s(\pi(e))$ es una base de $\pi^{-1}(\pi(e))$, espacio vectorial complejo de dimensión uno, existe un único $z(e) \in \mathbb{C}$ tal que $e = z(e)s(\pi(e))$. La aplicación $E \to X \times \mathbb{C}$ tal que $e \mapsto (\pi(e), z(e))$ es un isomorfismo de fibrados.

(iii) Sabemos que s es una función meromorfa en la que coinciden el número de ceros con el número de polos.

(iv) Tenemos claramente que $(s) - (t) = (\frac{s}{t})$. Como $\frac{s}{t}$ es una función meromorfa, su grado es nulo y ya está.

(v) Es inmediato.

□

Ejemplo 8.11. Vamos a construir secciones meromorfas de E_k para calcular su grado. Elegimos la función $\sigma_U : U \to \mathbb{C}$, $\sigma_U(t) = 1$. Por tanto, $\sigma_V(s) = s^{-k}\sigma_U(s^{-1}) = s^{-k}$. Por tanto, $(\sigma) = -k[1\colon 0]$ y el grado de E_k es igual a $-k$.

Vamos ahora a construir un fibrado a partir de un divisor; además del fibrado, construiremos las secciones meromorfas que nos devuelven el divisor del que partimos. Sea $D = \sum_{x \in X} m_x x$ un divisor. Sea $x \in \operatorname{Supp}(D)$. Elegimos un entorno Δ_x de x de forma que exista una carta $z_x : \Delta_x \to \mathbb{C}$ tal que $z_x(x) = 0$ y $z_x(\Delta_x)$ es el disco de radio 1 centrado en el origen. Sea $U_D := X \setminus \operatorname{Supp}(D)$.

Consideremos el recubrimiento abierto $\{U_D\} \cup \{\Delta_x \mid x \in \operatorname{Supp}(D)\}$. Para cada abierto del recubrimiento definimos funciones $f_D : U_D \to \mathbb{C}$, $f_D(y) = 1$, $f_x : \Delta_x \to \mathbb{C}$, $f_x(y) = z_x(y)^{m_x}$, $x \in \operatorname{Supp}(D)$.

Para definir un fibrado que trivialice en este recubrimiento basta dar una función de transición para cada par de abiertos no disjuntos. Los únicos que se encuentran en esta situación son U_D y Δ_x, para cada $x \in \operatorname{Supp}(D)$. La función $g_{Dx} : U_D \cap \Delta_x \to \mathbb{C}$, $g_{Dx} = f_D/f_x$ no se anula nunca ya que corresponde a la aplicación del disco unidad menos el origen que envía un punto z sobre z^{-m_x}.

Acabamos de asociar al divisor un fibrado $\pi : E_D \to X$ y una sección meromorfa s_D, dada por $(s_D)_{U_D} = f_D$, $(s_D)_{\Delta_x} = f_x$; se trata de una sección por la definición de las funciones de transición. Es claro que $(s_D) = D$.

Por tanto, dada una superficie de Riemann compacta X hemos construido una correspondencia biunívoca

$$\left\{(E, [s]) \mid E \text{ fibrado sobre } X, s \text{ sección meromorfa,}\right\} \leftrightarrow \operatorname{Div}(X),$$

donde $[s] := \{\lambda s \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$.

Definición 8.12. Llamaremos grupo de Picard de X, $\operatorname{Pic}(X)$, al conjunto de fibrados sobre X, módulo isomorfismo de fibrados.

Vamos a definir la operación del grupo $\mathrm{Pic}(X)$. Consideremos dos fibrados

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento trivializador para los fibrados p, q. Denotemos $f_{ij}, g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ las funciones de transición de p y q, respectivamente. Es evidente que las funciones $h_{ij} := f_{ij}g_{ij}$ (producto en $\mathbb{C}^*$) verifican las condiciones de compatibilidad; denotaremos $E \otimes F \xrightarrow{p\otimes q} X$ el fibrado correspondiente. La notación está justificada pues las fibras de este fibrado son de forma natural los productos tensoriales de las fibras de p con las fibras de q; para verlo, basta observar los cambios de base definidos por las funciones de transición. La clase de isomorfismos del resultado no depende del recubrimiento elegido. Se comprueba fácilmente que esta operación induce sobre $\mathrm{Pic}(X)$ una estructura de grupo abeliano. El inverso del fibrado E viene dado por funciones de transición g_{ij}^{-1}; las fibras de este fibrado son las duales de las fibras de E, por lo que se denota E^* y se llama fibrado dual. El isomorfismo $E \otimes E^* \cong X \times \mathbb{C}$, representa la evaluación de los elementos de E^* en los elementos de E.

Ejemplos 8.13. Ya vimos un ejemplo importante de fibrado, el fibrado tangente $TX \to X$. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X que da lugar a un atlas y sean $f_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ los cambios de carta holomorfos. Las funciones de transición de TX están dadas por f'_{ij}.

El fibrado dual o cotangente se denota T^*X; sus secciones son las formas diferenciales holomorfas o meromorfas. Estas secciones se comportan bien para las integrales. Veámoslo:

Sea U_i uno de los abiertos sobre los que hay una carta; podemos ver U_i como un abierto de $\mathbb{C}$. Dado un camino $\gamma : [0, 1] \to U_i$ diferenciable por trozos, y una función holomorfa $f : U_i \to \mathbb{C}$, sabemos darle un sentido a $\int_\gamma f$. El valor de esta integral va a depender de la carta elegida; si además el camino γ no está contenido en un abierto trivializador, necesitaremos utilizar varias cartas. En estos casos, vamos a utilizar la fórmula de cambio de variable; la consecuencia es que el objeto que se puede integrar a lo largo de un camino en X ya no es una función holomorfa en un entorno del camino, sino una forma diferencial holomorfa.

Definición 8.14. Un divisor $D = \sum_{x\in X} m_x x$ se dice positivo o efectivo, $D \geq 0$ si $m_x \geq 0$, $\forall x \in X$. Diremos que $D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2$ es positivo.

Definición 8.15. Dado $p : E \to X$ un fibrado, denotaremos $H^0(X;E)$ el espacio vectorial de las secciones holomorfas globales. Denotaremos $|E| := \mathbb{P}(H^0(X;E))$ el sistemal lineal asociado a E.

Sea D un divisor tal que $E_D = E$; sea s una sección meromorfa no nula de E. Entonces $f = \frac{s}{s_D}$ es una función meromorfa. Sabemos que $(s) = (s_D) + (f) = D + (f)$ y que s es holomorfa si y solo si $(s) \geq 0$. Luego hay una biyección

$$H^0(X;E) \setminus \{0\} \leftrightarrow \{f : X \dashrightarrow \mathbb{C} \mid (f) \geq -D\}.$$

Implícitamente hemos utilizado un homomorfismo de grupos $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$ que asocia a cada divisor D el fibrado E_D. El núcleo de este morfismo está formado por los divisores que corresponden a las funciones meromorfas de X. En la sección siguiente vamos a ver que es sobreyectivo, es decir, que todo fibrado admite secciones meromorfas no idénticamente nulas.

9. Cohomología de haces

Definición 9.1. Sea X un espacio topológico. Un *prehaz $\mathscr{F}$ de grupos abelianos (o $\mathbb{C}$-espacios vectoriales) sobre* X se define como sigue:

(i) A cada abierto $U \subset X$ le asociamos un grupo (o un $\mathbb{C}$-espacio vectorial) $\mathscr{F}(U)$; si $U = \emptyset$, $\mathscr{F}(U)$ solo contiene al elemento neutro.
(ii) Si $U \subset V$ son dos abiertos, les asociamos el homomorfismo *restricción* $\rho_{UV} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$; si $U \subset V \subset W$, se tiene $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$.

Ejemplos 9.2. Los primeros ejemplos son los prehaces de funciones continuas de X con valores complejos, $\mathcal{C}^0_X$. Si X es una variedad diferenciable, tenemos el prehaz de las funciones diferenciables con valores complejos, $\mathcal{C}^\infty_X$. Si X es una variedad analítica, tenemos el prehaz de las funciones holomorfas, $\mathscr{O}_X$. Todos ellos son prehaces de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Si tomamos los prehaces de funciones que no se anulan nunca, obtenemos prehaces de grupos abelianos.

Si X es una superficie de Riemann y $\pi : E \to X$ es un fibrado tenemos los prehaces de secciones (continuas, diferenciables, holomorfas) del fibrado. Este último lo denotaremos $\mathscr{O}(E)$.

Definición 9.3. Un prehaz $\mathscr{F}$ sobre X es un haz si se cumple siempre que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, con U_i abiertos, $\rho_i := \rho_{U_i U}$, $\rho_{ij} := \rho_{U_i\cap U_j, U_j}$:

(i) Si $f, g \in \mathscr{F}(U)$ y $\rho_i(f) = \rho_i(g)$, $\forall i \in I$, entonces, $f = g$.
(ii) Si tenemos una familia $f_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tal que $\rho_{ij}(f_j) = \rho_{ji}(f_i)$, $\forall i, j \in I$, entonces, existe $f \in \mathscr{F}(U)$ tal que $f_i = \rho_i(f)$, $\forall i \in I$.

Todos los prehaces de los ejemplos son haces. Dado un prehaz $\mathscr{F}$ podemos construir los gérmenes en un punto $x \in X$. Definimos el espacio $\mathscr{F}_x$ de gérmenes de $\mathscr{F}$ en x como el límite directo de $\mathscr{F}(U)$, $x \in U$, con las restricciones ρ_{UV} si $x \in U \subset V$. Si $x \in U$ tenemos un homomorfismo canónico $\rho_{xU} : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ que a cada $f \in \mathscr{F}(U)$ le asocia su germen f_x en x.

Denotamos $\overline{\mathscr{F}} := \coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x$. Consideremos la aplicación canónica $\pi : \overline{\mathscr{F}} \to X$. Vamos a construir una topología sobre $\overline{\mathscr{F}}$ de forma que π sea un homeomorfismo local. Para ello definimos una base de abiertos indexada por la reunión disjunta de los $\mathscr{F}(U)$ cuando U recorre los abiertos no vacíos de X. Dado U y $f \in \mathscr{F}(U)$, definimos $\mathscr{F}(U, f) := \{f_x \mid x \in U\} \subset \overline{\mathscr{F}}$. Se verifica fácilmente que tenemos una base y que π es un homeomorfismo local.

Dada una superficie de Riemann X el espacio topológico $\overline{\mathscr{O}_X}$ es Hausdorff, debido al principio de prolongación analítica. Lo mismo ocurre con los haces de secciones holomorfas de un fibrado.

En general, dado un prehaz $\mathscr{F}$ sobre X, podemos considerar la proyección $\pi : \overline{\mathscr{F}} \to X$; el prehaz de secciones locales continuas de π es claramente un haz, llamado haz asociado al prehaz $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{F}$ ya era un haz, entonces $\mathscr{F}$ y su haz asociado son canónicamente isomorfos.

Pasemos a estudiar la cohomología de un haz, en su versión de cohomología de Čech. Fijamos un espacio topológico X y un haz $\mathscr{F}$. Consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X. Definimos las cocadenas de $\mathscr{F}$ con respecto a $\mathcal{U}$ como sigue:

$$\mathcal{C}^j(\mathcal{U}; \mathscr{F}) := \prod_{(i_0,\ldots,i_j)\in I^{j+1}} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_j}) \quad j \geq 0.$$

Podemos definir aplicaciones coborde:

$$\begin{array}{cccc} \delta_j : & \mathcal{C}^j(\mathcal{U}, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{j+1}(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \\ & (f_{(i_0,\ldots,i_j)})_{(i_0,\ldots,i_j)\in I^{j+1}} & \longmapsto & \left(\sum_{k=0}^{j}(-1)^k f_{(i_0,\ldots,\widehat{i_k},\ldots i_{j+1})}\right)_{(i_0,\ldots,i_{j+1})\in I^{j+2}} . \end{array}$$

Hemos omitido las correspondientes restricciones para no cargar la notación. Observemos que

$$\delta_0((f_i)_{i\in I}) = (f_i - f_j)_{(i,j)\in I^2} \quad \delta_1((f_{(i,j)})_{(i,j)\in I^2}) = (f_{(i,j)} - f_{(i,k)} + f_{(j,k)})_{(i,j,k)\in I^3}.$$

Es fácil ver que $\delta_{j+1} \circ \delta_j = 0$. Por tanto, tenemos un complejo. Nos interesan los primeros grupos de cohomología:

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathcal{U}; \mathscr{F}) & := & \ker \delta_0 \\ H^1(\mathcal{U}; \mathscr{F}) & := & \ker \delta_1 / \operatorname{Im} \delta_0. \end{array}$$

Observemos que $H^0(\mathcal{U};\mathscr{F}) = \{(f_i) \mid f_i = f_j \text{ en } U_i \cap U_j\}$. Por las propiedades de haz, para cada $(f_i) \in H^0(\mathcal{U};\mathscr{F})$ existe un único $f \in \mathscr{F}(X)$ tal que $f = f_i$ en U_i, $\forall i \in I$. Es decir, $H^0(\mathcal{U};\mathscr{F}) = \mathscr{F}(X)$ y no depende del recubrimiento.

Estudiemos el primer grupo de cohomología; llamaremos cociclos a los elementos de $\ker \delta_1$ y cobordes a los elementos de $\operatorname{Im} \delta_0$ (con respecto a un recubrimiento). Para ello, debemos hacer variar los recubrimientos abiertos. Sea $\mathcal{V} := \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$; es decir, para cada abierto de $\mathcal{V}$ existe un abierto de $\mathcal{U}$ que lo contiene. Fijemos una aplicación de refinamiento $\sigma : A \to I$; esta aplicación verifica que $\forall\alpha \in A$, se tiene $V_\alpha \subset U_{\sigma(\alpha)}$.

Omitiendo las restricciones de la notación, esta aplicación define morfismos

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{C}^j(\mathcal{U};\mathscr{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^j(\mathcal{V};\mathscr{F}) \\ & (f_{(i_0,\dots,i_j)})_{(i_0,\dots,i_j)} & \longmapsto & (f_{(\sigma(\alpha_0),\dots,\sigma(\alpha_j))})_{(\alpha_0,\dots,\alpha_j)} \end{array}$$

que conmutan con las diferenciales, y que por tanto, definen morfismos en cohomología $\sigma : H^j(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^j(\mathcal{V};\mathscr{F})$. Para $j = 0$, esta aplicación conmuta con la identidad en el espacio de secciones globales.

Lema 9.4. *$\sigma : H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^1(\mathcal{V};\mathscr{F})$ es un monomorfismo.*

Demostración. Consideremos un elemento del núcleo de σ. Estará representado por un cociclo $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathscr{F})$, es decir, que verifica $f_{ik} = f_{ij} + f_{jk}$. Como la imagen es nula, existe una cocadena $(g_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{V};\mathscr{F})$ tal que $f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} = g_\alpha - g_\beta$ en $V_\alpha \cap V_\beta$.

Fijemos un índice $i \in I$; consideremos el recubrimiento abierto $\{U_i \cap V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de U_i. Tenemos $h_{i\alpha} := g_\alpha + f_{i\sigma(\alpha)} \in \mathscr{F}(U_i \cap V_\alpha)$. En $U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta$ se tiene

$$h_{i\alpha} - h_{i\beta} = g_\alpha + f_{i\sigma(\alpha)} - g_\beta - f_{i\sigma(\beta)} = f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} + f_{i\sigma(\alpha)} - f_{i\sigma(\beta)} = 0$$

por la condición de cociclo. Por la definición de haz, existe un único $h_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tal que la restricción de h_i a $U_i \cap V_\alpha$ es igual a $h_{i\alpha}$. Se tiene en $U_i \cap U_j \cap V_\alpha$,

$$h_i - h_j = g_\alpha + f_{i\sigma(\alpha)} - g_\alpha - f_{j\sigma(\alpha)} = f_{ij}$$

por lo que la $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ es un coborde. Es decir, σ es inyectiva. □

Supongamos que tenemos otra aplicación de refinamiento $\tau : A \to I$ y consideremos la aplicación $\tau : H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^1(\mathcal{V};\mathscr{F})$.

Lema 9.5. *$\sigma = \tau$ en H^1.*

Demostración. Consideremos un elemento de $H^1(\mathcal{U};\mathscr{F})$ representado por un cociclo $(f_{ij})_{(i,j)\in I^2}$. Mediante las aplicaciones de refinamiento σ y τ definimos dos cociclos $(f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$ y $(f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$.

Observemos que $V_\alpha \subset U_{\sigma(\alpha)} \cap U_{\tau(\alpha)}$. Vamos a definir una 0-cocadena $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$, donde $g_\alpha \in \mathscr{F}(V_\alpha)$ es la restricción de $f_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)}$ a V_α. Observemos que

$$g_\alpha - g_\beta = f_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)} - f_{\sigma(\beta)\tau(\beta)} =$$
$$= (f_{\sigma(\alpha)\tau(\alpha)} + f_{\tau(\alpha)\sigma(\beta)}) - (f_{\tau(\alpha)\sigma(\beta)} + f_{\sigma(\beta)\tau(\beta)}) = f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} - f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}.$$

Deducimos que los dos cociclos difieren por un coborde, por lo que la clase de cohomología que definen es la misma. $\square$

Por tanto, para cada recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X hemos construido un grupo $H^1(\mathcal{U};\mathscr{F})$ y para cada refinamiento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ hemos construido una aplicación inyectiva $H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^1(\mathcal{V};\mathscr{F})$.

Definición 9.6. Llamaremos primer grupo de cohomología de X con valores en $\mathscr{F}$ a

$$H^1(X;\mathscr{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}).$$

Observemos que la aplicación canónica $H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^1(X;\mathscr{F})$ es inyectiva. Los dos teoremas siguientes nos van a permitir calcular los espacios de cohomología en los casos que nos interesan:

Teorema de Leray 9.7. *Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto tal que $H^1(U_i;\mathscr{F}_{|U_i}) = 0$, $\forall i \in I$. Entonces $H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^1(X;\mathscr{F})$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ya sabemos que la aplicación es inyectiva. Veamos que es sobreyectiva. Para ello basta demostrar la siguiente afirmación:

Afirmación. *Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$. Entonces la aplicación $H^1(\mathcal{U};\mathscr{F}) \to H^1(\mathcal{V};\mathscr{F})$ es sobreyectiva.*

Fijemos una aplicación $\sigma : A \to I$ tal que $V_\alpha \subset U_{\sigma(\alpha)}$. Consideremos un elemento de $H^1(\mathcal{V};\mathscr{F})$ representado por un cociclo $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$.

Sea $\mathcal{V}_i := \{U_i \cap V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ recubrimiento de U_i. El cociclo anterior define un cociclo asociado al recubrimiento $\mathcal{V}_i$ con valores en el haz $\mathscr{F}_i := \mathscr{F}_{|U_i}$. La hipótesis del teorema implica que dicho cociclo es un coborde. Es decir, existe una cocadena $(g_{i\alpha})_{\alpha\in A}$, $g_{i\alpha} \in \mathscr{F}_i(U_i \cap V_\alpha)$, tal que $f_{\alpha\beta} = g_{i\alpha} - g_{i\beta}$ en $U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta$.

Fijemos un par de índices $i, j \in I$. Observemos que en $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$ tenemos

$$(g_{i\alpha} - g_{j\alpha}) - (g_{i\beta} - g_{j\beta}) = f_{\alpha\beta} - f_{\alpha\beta} = 0.$$

Por tanto, existe un único $h_{ij} \in \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ tal que $h_{ij} = g_{i\alpha} - g_{j\alpha}$ en $U_i \cap U_j \cap V_\alpha$.

Es inmediato comprobar que $(h_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ es una cocadena con respecto a $\mathcal{U}$. Como localmente es un coborde, es forzosamente un cociclo. Es inmediato que los cociclos $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$ y $(h_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)})_{(\alpha,\beta)\in A^2}$ difieren por el coborde dado por $(g_{\sigma(\alpha)\alpha})_{\alpha\in A}$. $\square$

El teorema de Leray, en combinación con el siguiente teorema permite calcular la cohomología de haces de una superficie de Riemann con coeficientes en el haz de secciones holomorfas de un fibrado.

Teorema de Mittag-Leffler 9.8. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Entonces, si $\mathscr{O}$ es el haz de gérmenes de funciones holomorfas de U, se tiene $H^1(U;\mathscr{O}) = 0$.*

Demostración. Necesitamos el siguiente resultado analítico:

Afirmación. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función $\mathcal{C}^\infty$. Entonces, existe una función $\mathcal{C}^\infty$ $u : U \to \mathbb{C}$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$, donde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.*

Consideremos un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de U. Vamos a ver que $H^1(\mathcal{U};\mathscr{O}) = 0$.

Podemos suponer, pasando a un refinamiento, que $\mathcal{U}$ es localmente finito y que existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Es decir, una familia $\{\alpha_i : U \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ de funciones $\mathcal{C}^\infty$ tales que $\operatorname{Supp}\alpha_i \subset U_i$ y $\sum_{i\in I}\alpha_i \equiv 1$.

Fijemos un cociclo $(c_{ij})_{(i,j)\in I^2}$; es decir, $c_{ij} \in \mathscr{O}(U_i \cap U_j)$ y $c_{ik} = c_{ij} + c_{jk}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Fijemos un índice $i \in I$. Entonces, para cada $j \in I$ construimos una función $\beta_{ij} : U_i \to \mathbb{C}$ tal que

$$\beta_{ij}(x) = \begin{cases} c_{ij}(x)\alpha_j(x) & \text{si } x \in U_i \cap U_j \\ 0 & \text{si } x \in U_i \setminus (U_i \cap U_j). \end{cases}$$

Estas funciones son $\mathcal{C}^\infty$ por la condición sobre el soporte. Por la condición de finitud local se puede definir la función $\mathcal{C}^\infty$ $t_i : U_i \to \mathbb{C}$, dada por $t_i := \sum_{j\in I}\beta_{ij}$. Observemos que,

$$t_i - t_j = \sum_{k\in I}(\beta_{ik} - \beta_{jk}) = \sum_{k\in I}(c_{ik} - c_{jk})\alpha_k = \sum_{k\in I} c_{ij}\alpha_k = c_{ij}.$$

Es decir, t_i define un cociclo con valores en el haz de gérmenes de funciones $\mathcal{C}^\infty$ cuyo coborde es c_{ij}. Habríamos resuelto el teorema si las funciones t_i fueran holomorfas.

Para ello, utilicemos que c_{ij} son holomorfas:

$$\frac{\partial t_i}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial t_j}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial \bar{z}} = 0$$

Por tanto, existe una función $\mathcal{C}^\infty$ $\psi : U \to \mathbb{C}$ tal que $\psi_{|U_i} = \dfrac{\partial t_i}{\partial \bar{z}}$. Por el resultado que hemos citado al principio, existe una función $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi : U \to \mathbb{C}$ tal que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \psi$.

Por tanto, $s_i := t_i - \varphi_{|U_i}$ define una cocadena holomorfa cuyo coborde es c_{ij}, por lo que tenemos el resultado. $\square$

Vamos a terminar dando una interpretación cohomológica de los fibrados. Sea X una superficie de Riemann compacta. Consideremos el haz $\mathscr{O}^*$ de gérmenes de funciones holomorfas que no se anulan nunca; es un haz de grupos abelianos con respecto al producto. Es inmediato que $H^0(X;\mathscr{O}^*) = \mathbb{C}^*$.

Vamos a interpretar $H^1(X;\mathscr{O}^*)$. Fijemos un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X. Consideremos el grupo abeliano $Z^1(\mathcal{U};\mathscr{O}^*)$ de los cociclos en $\mathcal{U}$. Podemos interpretar las funciones de transición como cociclos, lo que da lugar a una aplicación natural $\kappa : Z^1(\mathcal{U};\mathscr{O}^*) \to \operatorname{Pic}(X)$. La descripción de la operación de Pic demuestra que κ es un homomorfismo.

Fijemos un cociclo $\eta = (f_{ij})$. Entonces $\eta \in \ker\kappa$ si y solo si $\kappa(\eta)$ es el fibrado trivial. Un fibrado es trivial si y solo si admite una sección global holomorfa que no se anula nunca. Es decir, si y solo si existen funciones holomorfas $g_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ tales que $g_j = f_{ij}g_j$. En términos de coborde, $\eta \in \ker\kappa$ si y solo si $\eta \in B^1(\mathcal{U};\mathscr{O}^*)$.

Es decir, κ induce un monomorfismo $\kappa : H^1(\mathcal{U};\mathscr{O}^*) \to \operatorname{Pic}(X)$. Este homomorfismo es compatible con los refinamientos, por lo que tenemos un homomorfismo $\kappa : H^1(X;\mathscr{O}^*) \to \operatorname{Pic}(X)$. Por las propiedades de los límite directos, κ es inyectiva. La existencia de trivialización en cualquier fibrado implica que el homomorfismo también es sobreyectivo. Por tanto, $\kappa : H^1(X;\mathscr{O}^*) \to \operatorname{Pic}(X)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.