Una introducción al cálculo real y a LaTeX

Autor/a

Trabajo de fin de grado

Universidad de Zaragoza

Director/a del trabajo:

Fecha:

Resumen

Preparamos este trabajo para presentar el Cálculo moderno y para poder practicar un poco de LaTeX. Más información sobre los fundadores del Cálculo moderno puede encontrarse en Wikipedia sobre Gottfried Wilhelm (von) Leibniz y sobre Sir Isaac Newton.

Lo hemos escrito en tres capítulos en los que presentaremos: las definiciones, propiedades y donde resolvemos algunos ejercicios.

En el capítulo §1 daremos las definiciones de función diferenciable y veremos los primeros ejemplos. En el capítulo §2 vamos a presentar las definiciones más importantes de la derivación de funciones. Por último, en el capítulo §3 vamos a proponer algunos ejercicios para resolver.

Índice general

Capítulo 1

Definición y primeros ejemplos

En esta sección daremos una definición y describiremos algunos ejemplos del concepto de derivada de una función de una variable.

1.1. Definición

Definición 1.1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ donde $D \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto y $x_0 \in D$. La aplicación f se dice ***diferenciable*** en x_0 si el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.1}$$

existe. El valor de este límite (1.1) se llama la derivada de f en x_0 y normalmente se denota como $f'(x_0)$. Una notación alternativa de $f'(x_0)$ que especifica la variable tomada es $\frac{df}{dx}(x_0)$.

1.2. Ejemplos

Una lista de ejemplos.

Ejemplo 1.2.1. Comprobemos si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, es diferenciable en $x_0 = 0$ (ver Figura 1.1). Para este propósito, y de acuerdo con (1.1) en Definición 1.1 hay que calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1. \tag{1.2}$$

Como este límite existe, se puede afirmar que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es diferenciable en 0 y que $f'(0) = 1$ por (1.2).

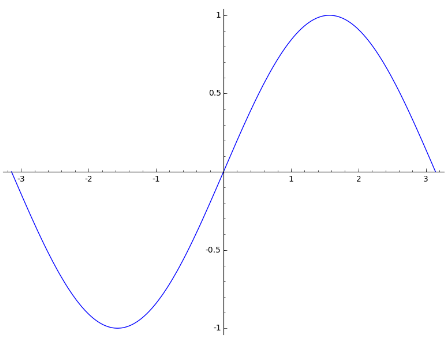

Figura 1.1: La función $\operatorname{sen}(x)$

Ejemplo 1.2.2. Comprobemos si la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x|$ es diferenciable en $x_0 = 0$. Para eso, y de acuerdo con (1.1) en Definición 1.1 hay que calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

En cambio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe y así la función g no es diferenciable en 0 de acuerdo con la Definición 1.1. Se puede ver que g es diferenciable en cualquier otro punto de su dominio.

1.3. Una interpretación geométrica de derivada. La recta tangente

Una interpretación de la derivada $f'(x_0)$ viene dada como la pendiente del grafo de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto la ecuación de la recta tangente al grafo de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ tiene la siguiente forma

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

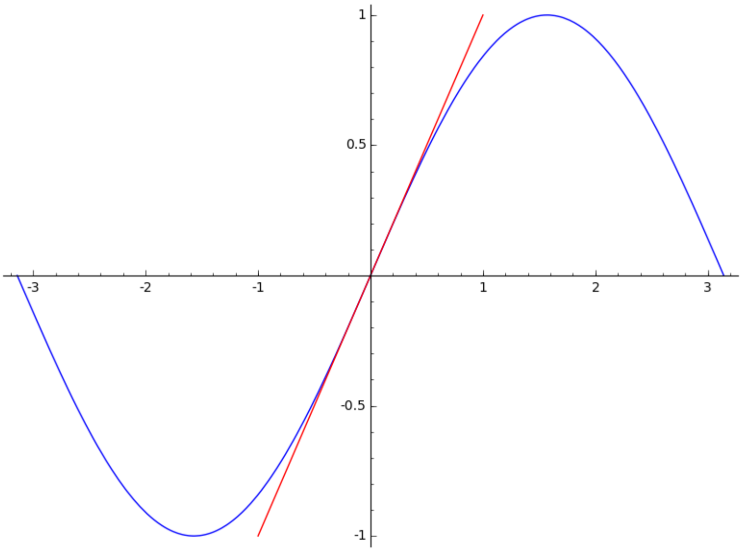

Figura 1.2: La función sen(x) con su recta tangente en $x_0 = 0$

Capítulo 2

Propiedades de la derivada

En este capítulo vamos a presentar las propiedades más importantes del operador derivada, así como una lista con las derivadas de funciones elementales.

2.1. Regla de la Cadena

La propiedad más útil del operador derivada es su comportamiento con respecto a la composición. Esta propiedad se conoce como la ***Regla de la Cadena*** y dice así.

Teorema 2.1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones reales de una variable con $f(A) \subset B$. Si f es diferenciable en $x_0 \in A$ y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A$ y*

$$(g \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

2.2. Derivadas de las funciones más frecuentes

Una lista de las derivadas de las funciones más frecuentes.

1. $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
2. $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = k \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
5. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
6. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{u^2(x)}$
7. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
8. $f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
9. $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
10. $f(x) = \log u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
11. $f(x) = \log_b x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\log_b e}{x}$
12. $f(x) = \log_b u(x) \Rightarrow f'(x) = \log_b e \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
13. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
14. $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
15. $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^x$
16. $f(x) = b^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^{u(x)} \cdot u'(x)$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
18. $f(x) = \operatorname{sen} u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$
19. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
20. $f(x) = \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} u(x) \cdot u'(x)$
21. $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
22. $f(x) = \operatorname{tg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = (1 + \operatorname{tg}^2 u(x))u'(x)$
23. $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \cot^2 x$
24. $f(x) = \cot u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)} = -(1 + \cot^2 u(x))u'(x)$
25. $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

26. $f(x) = \operatorname{arc\,sen} u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

27. $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

28. $f(x) = \arccos u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

29. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

30. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

31. $f(x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$

32. $f(x) = \operatorname{arg\,senh} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

33. $f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x$

34. $f(x) = \operatorname{arg\,cosh} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

35. $f(x) = \operatorname{tgh} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$

36. $f(x) = \operatorname{arg\,tgh} x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \frac{2^x}{\pi + \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}.$$

Calcula $f'(x)$.

Ejercicio 3.2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = e^{x+1} \operatorname{arc\,tg}(\cosh(x^2)).$$

Calcula $f'(x)$.

Demostración. □

Ejercicio 3.3. Prueba que $g'(x) = \frac{1}{x}$ para $g(x) = \log(x)$ solo usando que g es la función inversa de $g(x) = e^x$.

Ejercicio 3.4. Si $f(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x + 2)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de la curva cuya coordenada x es -1.

Ejercicio 3.5. Explica paso a paso cómo encontrar la curva que pasa por el punto $(2,3)$ con la siguiente propiedad: el segmento de cualquier recta tangente a la curva contenido entre los ejes coordenados (positivos) está bisecada en el punto de tangencia.

Índice de figuras

Índice alfabético