

Una introducción al cálculo real y a L^AT_EX



Autor/a

Trabajo de fin de grado
Universidad de Zaragoza

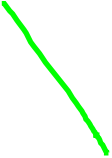
Director/a del trabajo:
Fecha:

Resumen

Preparamos este trabajo para presentar el Cálculo moderno y para poder practicar un poco de $\text{\LaTeX}$. Más información sobre los fundadores del Cálculo moderno puede encontrarse en Wikipedia sobre [Gottfried Wilhelm \(von\) Leibniz](#) y sobre [Sir Isaac Newton](#).

Lo hemos escrito en tres capítulos en los que presentaremos: las definiciones, propiedades y donde resolvemos algunos ejercicios.

En el **capítulo primero** daremos las definiciones de función diferenciable y veremos los primeros ejemplos. En el **capítulo segundo** vamos a presentar las definiciones más importantes de la derivación de funciones. Por último, en el **tercer capítulo** vamos a proponer algunos ejercicios para resolver.



Usa referencias cruzadas para los capítulos

Añade un índice

Definición y primeros ejemplos

En esta sección daremos una definición y describiremos algunos ejemplos del concepto de derivada de una función de una variable.

Incluye un glosario de términos

Que numere las secciones 1.1, etc

1. Definición

DEFINICIÓN 1.1. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ donde $D \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto y $x_0 \in D$. La aplicación f se dice diferenciable en x_0 si el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Numera la ecuación y cítala cuando la uses

existe. El valor de este límite se llama la derivada de f en x_0 y normalmente se denota como $f'(x_0)$. Una notación alternativa de $f'(x_0)$ que especifica la variable tomada es $\frac{df}{dx}(x_0)$.

2. Ejemplos

Una lista de ejemplos.

EJEMPLO 2.1. Comprobemos si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \sin(x)$, es diferenciable en $x_0 = 0$. Para este propósito, y de acuerdo con la definición de arriba hay que calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Como este límite existe, se puede afirmar que $f(x) = \sin(x)$ es diferenciable en 0 y que $f'(0) = 1$.

EJEMPLO 2.2. Comprobemos si la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x|$ es diferenciable en $x_0 = 0$. Para eso, y de acuerdo con la definición de arriba hay que calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

En cambio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

En negrita.

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe y así la función g no es diferenciable en 0 de acuerdo con la definición del principio. Se puede ver que g es diferenciable en cualquier otro punto de su dominio.

3. Una interpretación geométrica de derivada. La recta tangente

Una interpretación de la derivada $f'(x_0)$ viene dada como la pendiente del grafo de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto la ecuación de la recta tangente al grafo de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ tiene la siguiente forma

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Incluye un dibujo de la gráfica del seno en la sección 2 (1.2) y otro con la recta tangente en $x=0$ en la sección 3 (1.3)

Propiedades de la derivada

En este capítulo vamos a presentar las propiedades más importantes del operador derivada, así como una lista con las derivadas de funciones elementales.

1. Regla de la Cadena

La propiedad más útil del operador derivada es su comportamiento con respecto a la composición. Esta propiedad se conoce como la **Regla de la Cadena** y dice así.

TEOREMA 2.1 (Regla de la Cadena). Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales de una variable con $f(A) \subset B$. Si f es diferenciable en $x_0 \in A$ y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A$ y

Pon la regla de la cadena en un índice de términos al final.

$$(g \circ f(x_0))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

2. Derivadas de las funciones más frecuentes

Una lista de las derivadas de las funciones más frecuentes.

- (D1) $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- (D2) $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- (D3) $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$
- (D4) $f(x) = k \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$
- (D5) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- (D6) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
- (D7) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- (D8) $f(x) = u^n(x) \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$
- (D9) $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- (D10) $f(x) = \log u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- (D11) $f(x) = \log_b x \Rightarrow f'(x) = \frac{\log_b e}{x}$
- (D12) $f(x) = \log_b u(x) \Rightarrow f'(x) = \log_b e \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$
- (D13) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- (D14) $f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
- (D15) $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^x$
- (D16) $f(x) = b^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \log b \cdot b^{u(x)} \cdot u'(x)$
- (D17) $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- (D18) $f(x) = \operatorname{sen} u(x) \Rightarrow f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$
- (D19) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
- (D20) $f(x) = \cos u(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} u(x) \cdot u'(x)$
- (D21) $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
- (D22) $f(x) = \operatorname{tg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = (1 + \operatorname{tg}^2 u(x)) u'(x)$
- (D23) $f(x) = \operatorname{ctg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$

$$(D24) \quad f(x) = \operatorname{ctg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 u(x))u'(x)$$

$$(D25) \quad f(x) = \operatorname{arc sen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(D26) \quad f(x) = \operatorname{arc sen} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

$$(D27) \quad f(x) = \operatorname{arc cos} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(D28) \quad f(x) = \operatorname{arc cos} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

$$(D29) \quad f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(D30) \quad f(x) = \operatorname{arctg} u(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$(D31) \quad f(x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$$

$$(D32) \quad f(x) = \operatorname{arg senh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(D33) \quad f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x$$

$$(D34) \quad f(x) = \operatorname{arg cosh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(D35) \quad f(x) = \operatorname{tgh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$$

$$(D36) \quad f(x) = \operatorname{arg tgh} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Ejercicios

EJERCICIO 3.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \frac{2^x}{\pi + \sqrt[3]{\sin(x)}}.$$

Calcula $f'(x)$.

EJERCICIO 3.2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = e^{x+1} \operatorname{arctg}(\cosh(x^2)).$$

Calcula $f'(x)$.

DEMOSTRACIÓN. □

EJERCICIO 3.3. Prueba que $g'(x) = \frac{1}{x}$ para $g(x) = \log(x)$ solo usando que g es la función inversa de $g(x) = e^x$.

EJERCICIO 3.4. Si $f(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^5 + x^3 + x + 2)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de la curva cuya coordenada x es -1 .

EJERCICIO 3.5. Explica paso a paso cómo encontrar la curva que pasa por el punto $(2, 3)$ con la siguiente propiedad: el segmento de cualquier recta tangente a la curva contenido entre los ejes coordenados (positivos) está bisecada en el punto de tangencia.

Resuelve algún ejercicio (incluso usando sage), haciendo referencia a las propiedades que usas.

Añade lista de figuras, glosario e índice de términos.