La monodromía: a vueltas entre la topología, la geometría y el álgebra

Enrique ARTAL BARTOLO

Departmento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

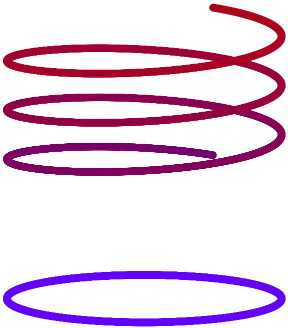
Discurso de ingreso
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza
24 de noviembre de 2009

- Monodromía $\mu o \nu o - \delta \rho o \mu \psi$: *recorrer una vez* o *recorrer uniformemente*

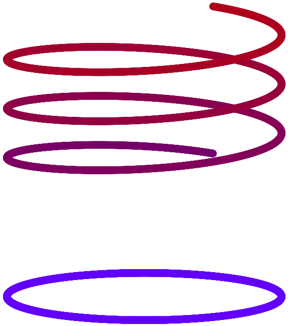
- Monodromía $\mu o\nu o - \delta\rho o\mu\psi$: *recorrer una vez* o *recorrer uniformemente*
- B. Riemann, *Beiträge zur theorie der durch die gauss'sche reihe* $f(\alpha,\beta,\gamma,x)$ *darstellbaren functionen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **7** (1857), 3–32.

- Monodromía $\mu o \nu o - \delta \rho o \mu \psi$: *recorrer una vez* o *recorrer uniformemente*
- B. Riemann, *Beiträge zur theorie der durch die gauss'sche reihe $f(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren functionen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **7** (1857), 3–32.
- La monodromía describe fenómenos parametrizados por un espacio base de manera que al realizar caminos cerrados en dicho espacio base, los fenómenos sufren una cierta transformación.

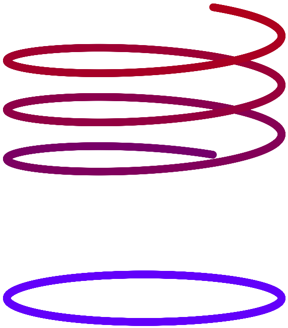
$$t \mapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t)$$



$$\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\}.$$



$$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}, \quad \exp(2\sqrt{-1}\pi t) \mapsto t + \mathbb{Z} := \{t + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



$k \mapsto k+1 \equiv$ monodromía; grupo $\mathbb{Z}$.

Ecuación diferencial

$$f'(t) = \alpha(t) f(t) + \beta(t), \quad \alpha, \beta : V \to \mathbb{C} \text{ holomorfas,}$$

$V \subset \mathbb{C}$ abierto simplemente conexo

$$V \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad (t, w) \mapsto f_w(t), \quad f_w(t_0) = w \quad f_w \text{ solución}$$

$$f'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

$$f'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

$$\log^{(0)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) :=$$
$$\log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

$\mathbb{R}_-$

$$f'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

$$\log^{(0)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) := \log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

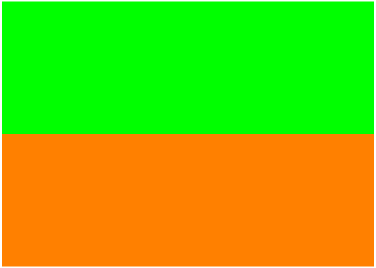
$$\log^{(1)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) := \log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-0, 2\pi)$$

$\mathbb{R}_-$

$\mathbb{R}_+$

$$f'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

$$\log^{(0)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) := \log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

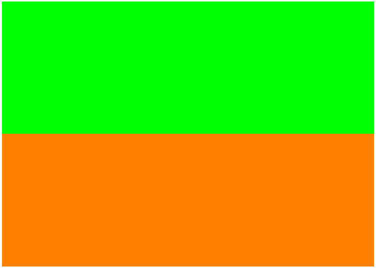


$$\log^{(1)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) := \log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-0, 2\pi)$$

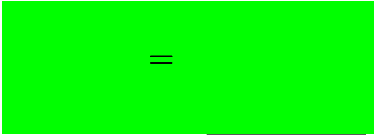
$\mathbb{R}_+$

$$f'(t)=\frac{1}{t},\quad t\in\mathbb{C}^*$$

$$\log^{(0)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right):=\log r+\sqrt{-1}\theta,\quad \theta\in(-\pi,\pi)$$



$$\log^{(1)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right):=\log r+\sqrt{-1}\theta,\quad \theta\in(-0,2\pi)$$



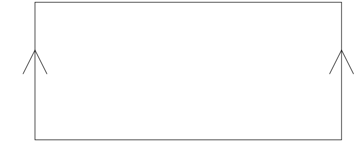
$$f'(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

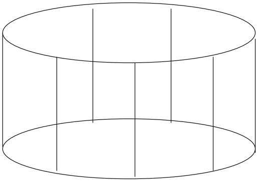
$$\log^{(0)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) :=$$
$$\log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

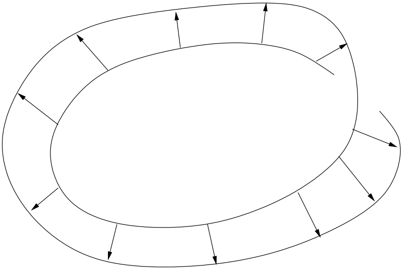
$$\log^{(1)}\left(r\exp(\sqrt{-1}\theta)\right) :=$$
$$\log r + \sqrt{-1}\theta, \quad \theta \in (-0, 2\pi)$$

$$=$$

$$+2\sqrt{-1}\pi$$



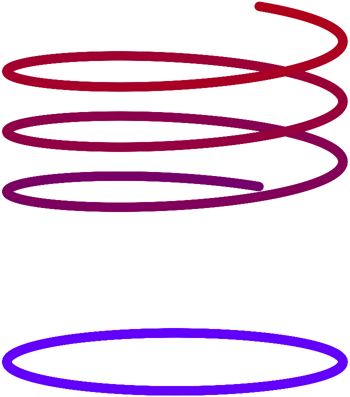




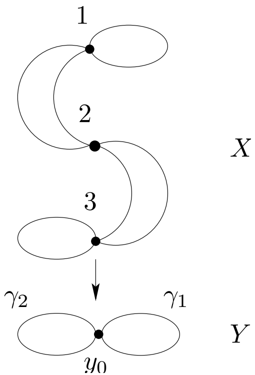
- $\pi_1(X; x_0)$ de un espacio topológico X.

- $\pi_1(X; x_0)$ de un espacio topológico X.
- $\pi_1(p) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\text{árbol})$ triviales.

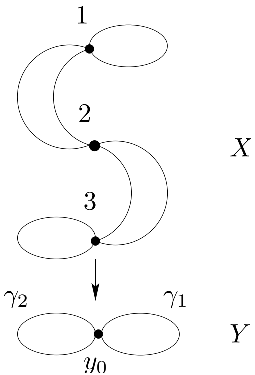
- $\pi_1(X; x_0)$ de un espacio topológico X.
- $\pi_1(p) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\text{árbol})$ triviales.
- $\pi_1(\mathbb{S}^1; 1) \cong \mathbb{Z}$: levantamiento de caminos.



- $\pi_1(X; x_0)$ de un espacio topológico X.
- $\pi_1(p) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\text{árbol})$ triviales.
- $\pi_1(\mathbb{S}^1; 1) \cong \mathbb{Z}$: levantamiento de caminos.
- Teorema de Seifert-van Kampen: $\pi_1(\mathbb{S}^n; 1)$ trivial, $\pi_1(\text{grafo}) = \mathbb{F}_m$



$G := \pi_1(Y; y_0)$ es libre engendrado por γ_1, γ_2.



$G := \pi_1(Y; y_0)$ es libre engendrado por γ_1, γ_2.
La monodromía $\rho : G \to \Sigma_3$ está dada por $\rho(\gamma_1) := (2,3)$ y $\rho(\gamma_2) := (1,2)$.

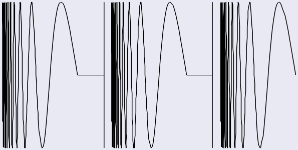
Cubiertas y subgrupos

Cubiertas de un espacio X $\leftrightarrow$ Subgrupos de $\pi_1(X; x)$

Cubiertas y subgrupos

Cubiertas de un espacio $X \leftrightarrow$ Subgrupos de $\pi_1(X;x)$

Casos patológicos: el círculo de Varsovia



Cubiertas (no) ramificadas

Topología Geométrica

- M 3-variedad compacta orientada es cubierta de $\mathbb{S}^3$ ramificada a lo largo de un nudo (Hilden y Montesinos).
- Thurston demostró la existencia de enlaces universales L: toda variedad es cubierta ramificada a lo largo de L.
- Hilden, Lozano y Montesinos demostraron que el nudo lasca, el enlace de Whitehead y los anillos de Borromeo son universales
- Este resultado permite extraer propiedades geométricas de las 3-variedades

Cubiertas (no) ramificadas

Geometría Algebraica

- Se relacionan cubiertas con extensiones de cuerpos y Teoría de Galois.
- Se puede construir el grupo fundamental algebraico de cualquier variedad algebraica (incluso en característica p).
- Las distintas inclusiones de cuerpos de números en $\mathbb{C}$ producen espacios *lejanos* con las mismas propiedades algebraicas.

Cubiertas (no) ramificadas

Teoría de Grupos

- Teorema de Kurosh: Todo subgrupo de un grupo libre es libre.
- Algoritmo de Reidemeister-Schreier: Encontrar una presentación de un subgrupo de un grupo finitamente presentado. ¡Efectivo!

Definición

Un fibrado es una aplicación que localmente se comporta como un producto.

Propiedades

Definición

Un fibrado es una aplicación que localmente se comporta como un producto.

Propiedades

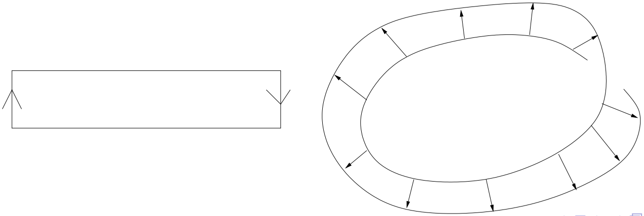
- Los fibrados sobre espacios contractibles son productos

Definición

Un fibrado es una aplicación que localmente se comporta como un producto.

Propiedades

- Los fibrados sobre espacios contractibles son productos
- Los fibrados sobre la circunferencia $\mathbb{S}^1$ vienen definidos por la *monodromía geométrica*.



- La monodromía geométrica solo está bien definida salvo isotopía

- La monodromía geométrica solo está bien definida salvo isotopía
- La monodromía no determina el fibrado cuando la base es más complicada.

- La monodromía geométrica solo está bien definida salvo isotopía
- La monodromía no determina el fibrado cuando la base es más complicada.
- Se pueden obtener condiciones de rigidez en la monodromía cuando el fibrado tiene propiedades suplementarias.

- La monodromía geométrica solo está bien definida salvo isotopía
- La monodromía no determina el fibrado cuando la base es más complicada.
- Se pueden obtener condiciones de rigidez en la monodromía cuando el fibrado tiene propiedades suplementarias.
- Fibrados vectoriales (simplécticos, hermíticos, riemannianos,etc).

- La monodromía geométrica solo está bien definida salvo isotopía
- La monodromía no determina el fibrado cuando la base es más complicada.
- Se pueden obtener condiciones de rigidez en la monodromía cuando el fibrado tiene propiedades suplementarias.
- Fibrados vectoriales (simplécticos, hermíticos, riemannianos,etc).
- Provienen de la física: Se miden magnitudes vectoriales con respecto a un sistema de coordenadas y se estudia cómo se comportan con respecto a los cambios de coordenadas.

Fibrados planos

- Son fibrados que admiten un concepto de derivación cercano al usual: existen secciones *localmente constantes*.

Fibrados planos

- Son fibrados que admiten un concepto de derivación cercano al usual: existen secciones *localmente constantes*.
- Dada un monodromía $\rho : \pi_1(X; x) \to \mathrm{GL}(k; \mathbb{C})$ se reconstruye el fibrado:
$$\tilde{X} \times_G \mathbb{C}^k, \quad (\tilde{m}, v)^g := (\tilde{m}^g, \rho(g^{-1}) \cdot v),$$
donde $\tilde{X} \to X$ es la cubierta universal de X.

Fibrados planos

- Son fibrados que admiten un concepto de derivación cercano al usual: existen secciones *localmente constantes*.
- Dada un monodromía $\rho : \pi_1(X; x) \to \mathrm{GL}(k; \mathbb{C})$ se reconstruye el fibrado:
$$\tilde{X} \times_G \mathbb{C}^k, \quad (\tilde{m}, v)^g := (\tilde{m}^g, \rho(g^{-1}) \cdot v),$$
donde $\tilde{X} \to X$ es la cubierta universal de X.
- Esta manera de presentar el fibrado, permite determinar fácilmente las secciones *localmente constantes*.

Fibrados planos

- Son fibrados que admiten un concepto de derivación cercano al usual: existen secciones *localmente constantes*.

- Con cartas cualesquiera, hay que resolver una ecuación diferencial
$$\begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_k \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} = 0$$
cuya condición de integrabilidad $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ tiene una interpretación geométrica: la curvatura se anula.

- La condición se cumple siempre cuando la dimensión de la base es 1: superficies de Riemann.
- Localmente obtienen ecuaciones diferenciales con *singularidades logarítmicas*:

$$f'(t) = \frac{\alpha}{t} f(t), \quad t \in \mathbb{C}^* \quad \Rightarrow \quad f(t) = ct^{\alpha}$$

- Problema 21 de Hilbert.

Elogio de los complejos

- Lo complejo es simple: geometría algebraica real con técnicas complejas.

Elogio de los complejos

- Lo complejo es simple: geometría algebraica real con técnicas complejas.
- Razones históricas: Cardano, Vieta y la ecuación cúbica.

Elogio de los complejos

- Lo complejo es simple: geometría algebraica real con técnicas complejas.
- Razones históricas: Cardano, Vieta y la ecuación cúbica.
- Razones estéticas: teorema de Bézout.

Elogio de los complejos

- Lo complejo es simple: geometría algebraica real con técnicas complejas.
- Razones históricas: Cardano, Vieta y la ecuación cúbica.
- Razones estéticas: teorema de Bézout.
- Razones geométricas: superficies de Riemann.

Elogio de los complejos

- Lo complejo es simple: geometría algebraica real con técnicas complejas.
- Razones históricas: Cardano, Vieta y la ecuación cúbica.
- Razones estéticas: teorema de Bézout.
- Razones geométricas: superficies de Riemann.
- Razones físicas: ecuaciones de Cauchy-Riemann y funciones armónicas.

Elogio de los complejos

- Lo complejo es simple: geometría algebraica real con técnicas complejas.
- Razones históricas: Cardano, Vieta y la ecuación cúbica.
- Razones estéticas: teorema de Bézout.
- Razones geométricas: superficies de Riemann.
- Razones físicas: ecuaciones de Cauchy-Riemann y funciones armónicas.
- Razones lógicas: Principio de Lefschetz.

Singularidades aisladas

Hipersuperficies

$f : U \to \mathbb{C}$, donde $0 \in U \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $n > 1$, y $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, $df(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, $V := f^{-1}(0)$.

$\mathbb{A}_1 : xy = 0$

$\mathbb{A}_2 : y^2 - x^3 = 0$

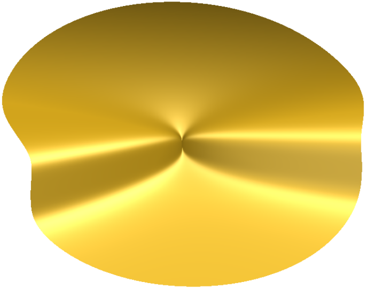
$\mathbb{E}_6 : y^3 - x^4 = 0$

$\mathbb{E}_8 : y^3 - x^5 = 0$

Singularidades aisladas

Hipersuperficies

$f: U \to \mathbb{C}$, donde $0 \in U \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $n > 1$, y $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, $df(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, $V := f^{-1}(0)$.

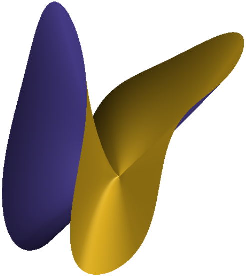


Singularidad $\mathbb{E}_8$ de superficie: $x^2 + y^3 + z^5 = 0$

Singularidades aisladas

Hipersuperficies

$f : U \to \mathbb{C}$, donde $0 \in U \subset \mathbb{C}^{n+1}$, $n > 1$, y $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, $df(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, $V := f^{-1}(0)$.



Singularidad superaislada de superficie: $x^2 z - y^3 + z^4 = 0$

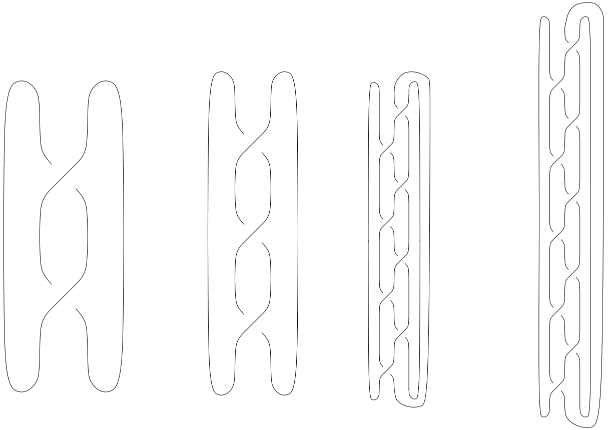
Teoría de Milnor

- $\mathbb{B}_\varepsilon^{2n+2}$ bola euclídea, radio ε centro 0
- $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1}$ esfera euclídea radio ε centro 0
- $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ se tiene $\mathbb{S}_\varepsilon^{2n+1} \pitchfork V$

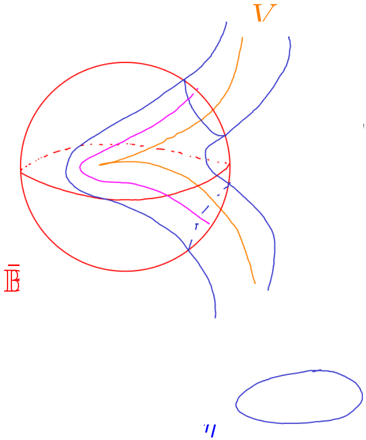
Teoría de Milnor

- $\mathbb{B}_{\varepsilon}^{2n+2}$ bola euclídea, radio ε centro 0
- $\mathbb{S}_{\varepsilon}^{2n+1}$ esfera euclídea radio ε centro 0
- $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ se tiene $\mathbb{S}_{\varepsilon}^{2n+1} \pitchfork V$
- $K^{2n-1} := \mathbb{S}_{\varepsilon}^{2n+1} \cap V$ variedad diferenciable orientada y compacta: *link*
- K es un invariante abstracto, $(\mathbb{S}^{2n+1}, K)$ invariante encajado

Teoría de Milnor

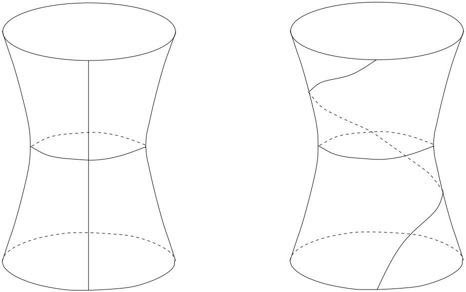


Monodromía I



$$:= f^{-1}(t)$$

Monodromía I



Picard-Lefschetz: monodromía y fibración de Milnor de una función de Morse

Monodromía II

- F^{2n} es la *fibra de Milnor*, orientable compacta, $\partial F = K$.
- F tiene el tipo de homotopía de un *bouquet* de μ n-esferas.
- El número μ *número de Milnor*:

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

- Monodromía geométrica $\Longrightarrow$ monodromía entera (racional, compleja) de f $\varphi^* : H^n(F; \mathbb{Z}) \to H^n(F; \mathbb{Z})$

Monodromía III

Teorema (Brieskorn, Deligne, Grothendieck)

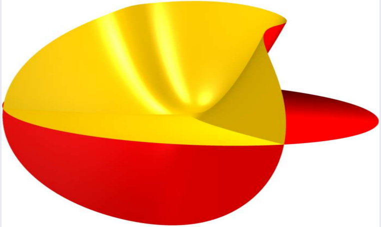
La monodromía compleja de una singularidad aislada de hipersuperficie verifica:

1. *El polinomio característico es producto de ciclotómicos, es decir, sus raíces son raíces de la unidad*
2. *Los bloques de Jordan son de tamaño k, $k \leq n+1$, salvo para los correspondientes al valor propio 1, que son de tamaño menor o igual que n.*

Monodromía III

Resolución

Reemplazar la singularidad por una unión de espacios lisos menos complicados que se cortan como hiperplanos coordinados.



La monodromía se calcula a partir de la resolución.

Monodromía y aritmética

- $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$

Monodromía y aritmética

- $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- Estudiar $f^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$.

Monodromía y aritmética

- $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- Estudiar $f^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$.
- p primo, $k \in \mathbb{N}$

$$N_k := \#\{\mathbf{x} \in \left(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\right)^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \equiv 0 \mod p^k\}.$$

Monodromía y aritmética

- $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- Estudiar $f^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$.
- p primo, $k \in \mathbb{N}$

$$N_k := \#\{\mathbf{x} \in \left(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\right)^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \equiv 0 \mod p^k\}.$$

- $P(T) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{N_k}{p^{(n+1)k}} T^k$

Monodromía y aritmética

- $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- Estudiar $f^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$.
- p primo, $k \in \mathbb{N}$

$$N_k := \#\{\mathbf{x} \in \left(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\right)^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \equiv 0 \mod p^k\}.$$

- $P(T) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{N_k}{p^{(n+1)k}} T^k$
- Shafarevich y Borevich conjeturaron que $P(T)$ es una función racional en T. Demostrado por Igusa mediante técnicas de singularidades.

Monodromía y aritmética

- $\mathbf{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; sea $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- Estudiar $f^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$.
- p primo, $k \in \mathbb{N}$

$$N_k := \#\{\mathbf{x} \in \left(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\right)^{n+1} \mid f(\mathbf{x}) \equiv 0 \mod p^k\}.$$

- $P(T) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{N_k}{p^{(n+1)k}} T^k$
- Shafarevich y Borevich conjeturaron que $P(T)$ es una función racional en T. Demostrado por Igusa mediante técnicas de singularidades.
- Funciones relacionadas: funciones zetas de Igusa, topológica, motívica

Conjetura de la Monodromía (Igusa)

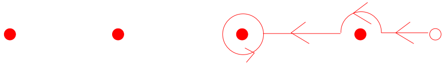
Para casi todo primo p, si s_0 es un polo de la función zeta de Igusa, entonces $\exp(2\sqrt{-1}\pi\Re s_0)$ es valor propio de la monodromía en algún punto complejo de $f^{-1}(0)$.

Conjetura de la Monodromía (Denef-Loeser)

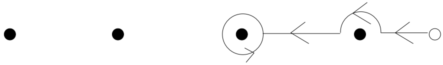
Si s_0 es un polo de la función zeta topológica, entonces $\exp(2\sqrt{-1}\pi s_0)$ es valor propio de la monodromía en algún punto de $f^{-1}(0)$.

- Riemann: estudio de funciones multivaloradas f en $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$.

- Riemann: estudio de funciones multivaloradas f en $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$.
- Superficie de Riemann de f definida por: $\rho : \mathbb{F}_r \to \Sigma_n$

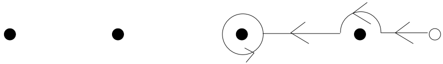


- Riemann: estudio de funciones multivaloradas f en $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$.
- Superficie de Riemann de f definida por: $\rho : \mathbb{F}_r \to \Sigma_n$



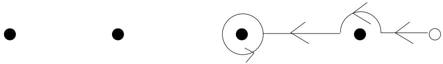
- Zariski: funciones multivaloradas f en $\mathbb{C}^2 \setminus C$.

- Riemann: estudio de funciones multivaloradas f en $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$.
- Superficie de Riemann de f definida por: $\rho : \mathbb{F}_r \to \Sigma_n$



- Zariski: funciones multivaloradas f en $\mathbb{C}^2 \setminus C$.
- Problema: Calcular $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$.

- Riemann: estudio de funciones multivaloradas f en $X := \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$.
- Superficie de Riemann de f definida por: $\rho : \mathbb{F}_r \to \Sigma_n$



- Zariski: funciones multivaloradas f en $\mathbb{C}^2 \setminus C$.
- Problema: Calcular $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$.
- Método de Zariski-van Kampen .

Curvas algebraicas

- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es lisa.

Curvas algebraicas

- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es lisa.
- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es nodal: Zariski+Severi $\Rightarrow$ Conjetura de Zariski.

Curvas algebraicas

- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es lisa.
- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es nodal: Zariski+Severi $\Rightarrow$ Conjetura de Zariski.
- Resuelta por Fulton y Deligne; Harris da validez a la demostración de Zariski.

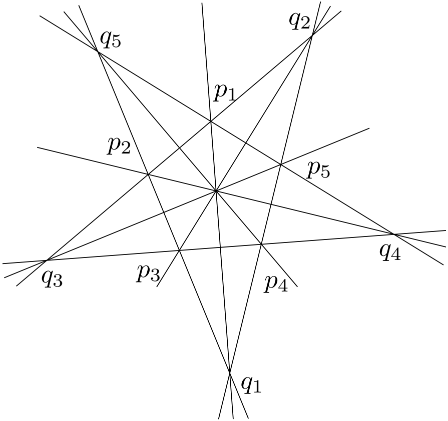
Curvas algebraicas

- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es lisa.
- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es nodal: Zariski+Severi $\Rightarrow$ Conjetura de Zariski.
- Resuelta por Fulton y Deligne; Harris da validez a la demostración de Zariski.
- Chisini, Moishezon $\Rightarrow$ Monodromía de trenzas

Curvas algebraicas

- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es lisa.
- $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ abeliano si C es nodal: Zariski+Severi $\Rightarrow$ Conjetura de Zariski.
- Resuelta por Fulton y Deligne; Harris da validez a la demostración de Zariski.
- Chisini, Moishezon $\Rightarrow$ Monodromía de trenzas
- Libgober, Kharlamov, Kulikov, Carmona.

El pentágono

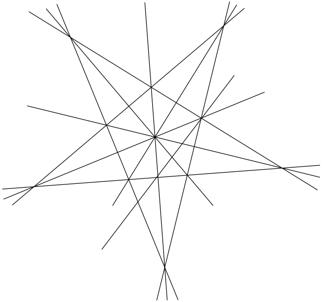


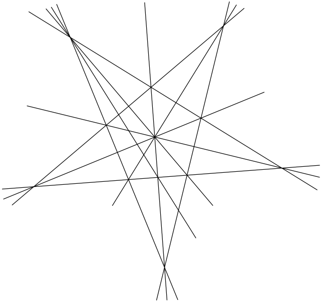
- Una aplicación abstracta intercambia los dos pentágonos respetando índices.

- Una aplicación abstracta intercambia los dos pentágonos respetando índices.
- Una aplicación proyectiva intercambia los dos pentágonos permutando índices.

- Una aplicación abstracta intercambia los dos pentágonos respetando índices.
- Una aplicación proyectiva intercambia los dos pentágonos permutando índices.
- Un morfismo de Galois intercambia los dos pentágonos respetando índices (pero no se extiende a $\mathbb{C}$).

- Una aplicación abstracta intercambia los dos pentágonos respetando índices.
- Una aplicación proyectiva intercambia los dos pentágonos permutando índices.
- Un morfismo de Galois intercambia los dos pentágonos respetando índices (pero no se extiende a $\mathbb{C}$).
- Monodromía de trenzas $\Rightarrow$ No hay homeomorfismo de $\mathbb{P}^2$ que intercambie índices.





He dicho . . .