La pluralidad de las singularidades

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

COEMAT La Laguna
26 Febrero 2015

Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Estrategia necesaria

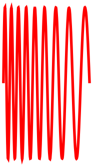
Acotar el problema.

Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Estrategia necesaria

Acotar el problema.



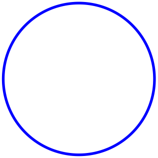
$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Estrategia necesaria

Acotar el problema.



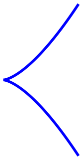
$g^{-1}(1), \quad g(x, y) = x^2 + y^2$

Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Estrategia necesaria

Acotar el problema.



$$h^{-1}(1), \quad h(x,y) = y^2 - x^3$$

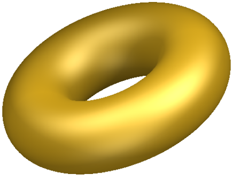
Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Estrategia necesaria

Acotar el problema.

$$t^{-1}(0), \quad t(x,y,z) = 5(x^2+y^2) - (x^2+y^2+z^2+1)^2$$



Objetivo (inalcanzable)

Comprender las funciones $f : X \to Y$ y los espacios $f^{-1}(y)$

Estrategia necesaria

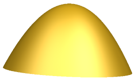
Acotar el problema.

Restricciones

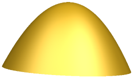
- Funciones polinómicas
- $F : R^n \to R,\ R = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{F}_q,\ q = p^n.$

Zoom sobre $z = x^2 + y^2$

Zoom sobre $z = x^2 + y^2$



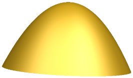
Zoom sobre $z = x^2 + y^2$



Teorema (Teorema Función Implícita, versión *light*)

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, $F(0) = 0$, $dF(0) \neq 0 \Longrightarrow X := F^{-1}(0)$ se parece a $\mathbb{R}^{n-1}$ cerca de 0.

Zoom sobre $z = x^2 + y^2$



Teorema (Teorema Función Implícita, versión *light*)

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, $F(0) = 0$, $dF(0) \neq 0 \Longrightarrow X := F^{-1}(0)$ se parece a $\mathbb{R}^{n-1}$ cerca de 0.

Definición

Una hipersuperficie $X = F^{-1}(0)$ es *lisa* en $p \in X$ si $dF(p) \neq 0$; si $dF(p) \neq 0$ se dice *singular* en p.

Discriminantes

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1$.
¿Cuándo tiene raíces múltiples?

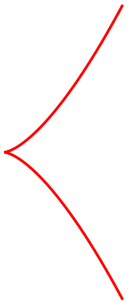
- Podemos suponer $a_n = 1$.
- Podemos suponer $a_{n-1} = 0$ (cambia $x \mapsto x - \frac{a_{n-1}}{n}$).

Discriminantes

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1$.
¿Cuándo tiene raíces múltiples?

- Podemos suponer $a_n = 1$.
- Podemos suponer $a_{n-1} = 0$ (cambia $x \mapsto x - \frac{a_{n-1}}{n}$).

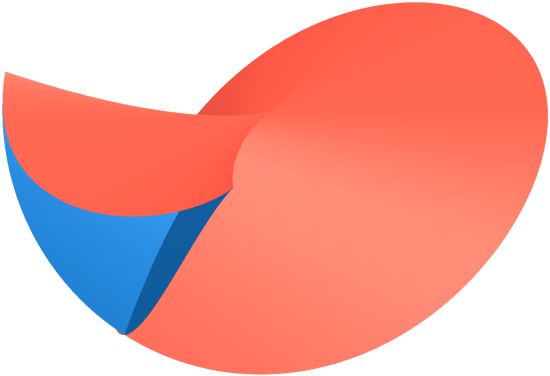
$n = 3$



Discriminantes

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1$.
¿Cuándo tiene raíces múltiples?

- Podemos suponer $a_n = 1$.
- Podemos suponer $a_{n-1} = 0$ (cambia $x \mapsto x - \frac{a_{n-1}}{n}$).

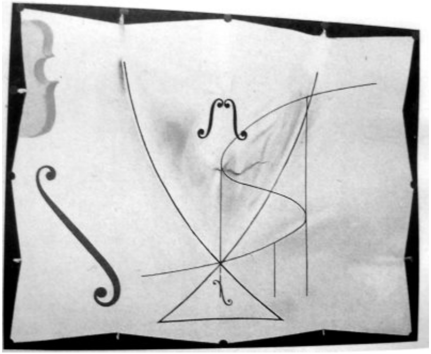


$n = 4$ (Cola de Golondrina)

Discriminantes

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado n, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1$.
¿Cuándo tiene raíces múltiples?

- Podemos suponer $a_n = 1$.
- Podemos suponer $a_{n-1} = 0$ (cambia $x \mapsto x - \frac{a_{n-1}}{n}$).



La visión de Dalí.

Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Recta proyectiva real

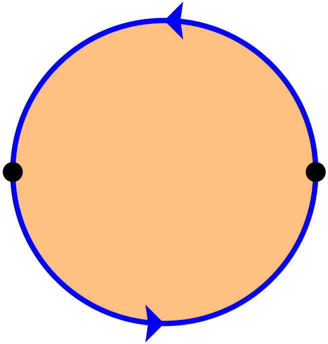
$\mathbb{R} + \text{dirección} \Longrightarrow \mathbb{S}^1$

Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Plano proyectivo real

$\mathbb{R}^2 +$ direcciones $\equiv \mathbb{S}^1 \Longrightarrow$



Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Fórmula de Harnack

Si $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es de grado m, tiene a lo más $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componentes conexas.

Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Fórmula de Harnack

Si $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es de grado m, tiene a lo más $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componentes conexas.

No todo es posible (por culpa de Bezout, entre otros)

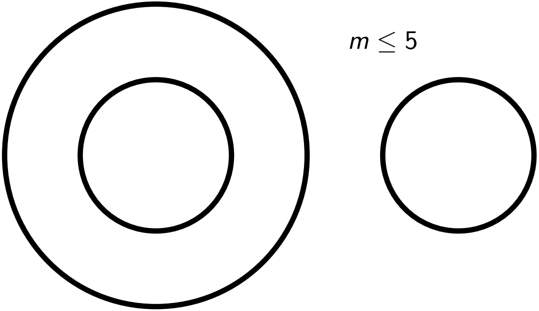
Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Fórmula de Harnack

Si $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es de grado m, tiene a lo más $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componentes conexas.

No todo es posible (por culpa de Bezout, entre otros)



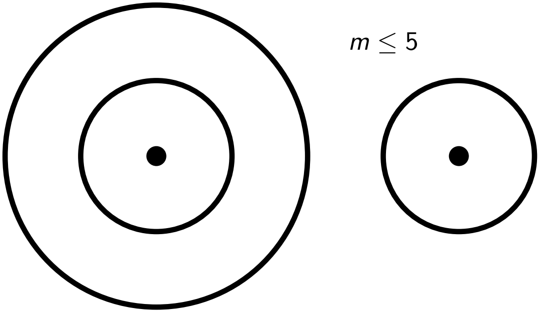
Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

Fórmula de Harnack

Si $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es de grado m, tiene a lo más $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componentes conexas.

No todo es posible (por culpa de Bezout, entre otros)



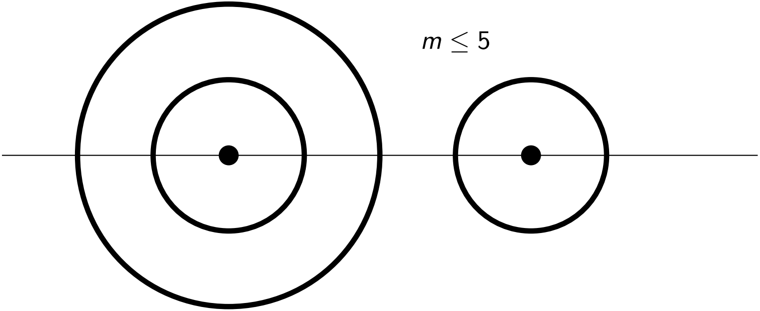
Problema 16 de Hilbert

Describir las configuraciones topológicas de las curvas algebraicas en el plano proyectivo real.

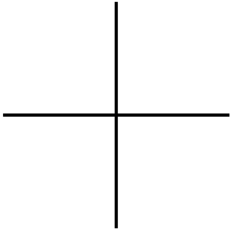
Fórmula de Harnack

Si $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es de grado m, tiene a lo más $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componentes conexas.

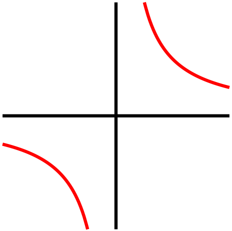
No todo es posible (por culpa de Bezout, entre otros)



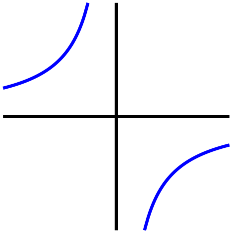
Borrando singularidades



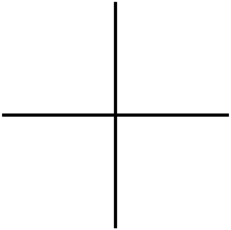
Borrando singularidades



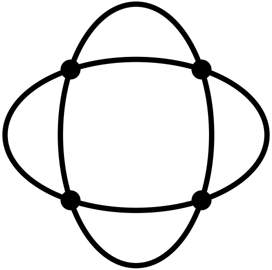
Borrando singularidades



Borrando singularidades

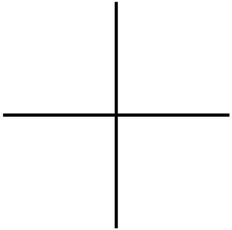


Ejemplo

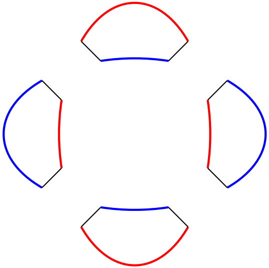


$m = 4$

Borrando singularidades

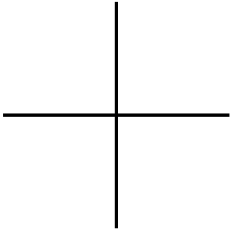


Ejemplo



$m = 4$

Borrando singularidades

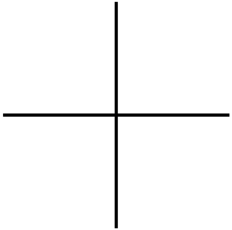


Ejemplo

Curva de Trott:

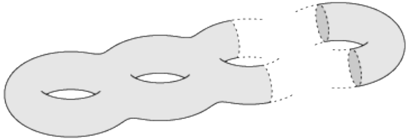
$$144(x^4 + y^4) - 225(x^2 + y^2) + 350x^2y^2 + 81 = 0$$

Borrando singularidades



Teorema

Si $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es de grado m es una superficie cerrada de género $\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$.



Reflexiones

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

Estudia

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

Estudia

- $y^2 - x^3 = 0$

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

Estudia

- $y^2 - x^3 = 0$
- $y^2 - x^5 = 0$

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

Estudia

- $y^2 - x^3 = 0$
- $y^2 - x^5 = 0$
- $y^2 - x^7 = 0$

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

Estudia

- $y^2 - x^3 = 0$
- $y^2 - x^5 = 0$
- $y^2 - x^7 = 0$
- $y^3 - x^4 = 0$

Reflexiones

- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

Estudia

- $y^2 - x^3 = 0$
- $y^2 - x^5 = 0$
- $y^2 - x^7 = 0$
- $y^3 - x^4 = 0$
- $-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$

Reflexiones

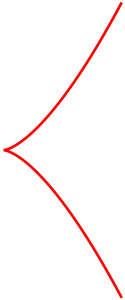
- Es más fácil trabajar sobre $\mathbb{C}$ que sobre $\mathbb{R}$ (o sobre $\mathbb{Q}$).
- Empezar con objetos *singulares* y deformarlos a objetos lisos: estrategia de éxito.
- El Teorema de la Función Implícita sugiere que cuando hacemos un *zoom* lo suficientemente grande todo lo liso se parece.
- ¿Qué ocurre con lo singular?

Ejemplo

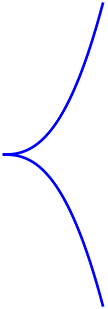
Estudia

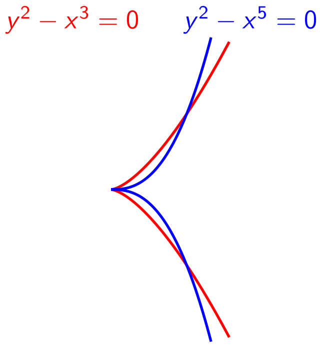
- $y^2 - x^3 = 0$
- $y^2 - x^5 = 0$
- $y^2 - x^7 = 0$
- $y^3 - x^4 = 0$
- $-y^6+x^5+6x^3y^2-2xy^4+4x^4-17x^2y^2+4y^4+4x^3+4xy^2-4y^2=0$
- $-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$

$y^2 - x^3 = 0$

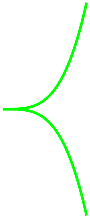


$y^2 - x^3 = 0$ $y^2 - x^5 = 0$

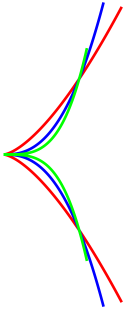



$y^2 - x^3 = 0$
$y^2 - x^5 = 0$

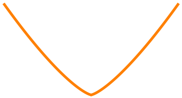
$y^2 - x^3 = 0$ $\quad$ $y^2 - x^5 = 0$ $\quad$ $y^2 - x^7 = 0$



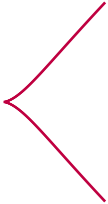
$y^2 - x^3 = 0$ $\quad$ $y^2 - x^5 = 0$ $\quad$ $y^2 - x^7 = 0$



$y^2 - x^3 = 0$ $y^2 - x^5 = 0$ $y^2 - x^7 = 0$ $y^3 - x^4 = 0$

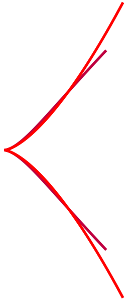


$y^2 - x^3 = 0 \qquad y^2 - x^5 = 0 \qquad y^2 - x^7 = 0 \qquad y^3 - x^4 = 0$



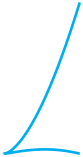
$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$

$y^2 - x^3 = 0$ $\quad y^2 - x^5 = 0$ $\quad y^2 - x^7 = 0$ $\quad y^3 - x^4 = 0$



$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$

$y^2 - x^3 = 0 \qquad y^2 - x^5 = 0 \qquad y^2 - x^7 = 0 \qquad y^3 - x^4 = 0$



$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$

$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

$$y^2 - x^3 = 0 \qquad y^2 - x^5 = 0 \qquad y^2 - x^7 = 0 \qquad y^3 - x^4 = 0$$
$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$
$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

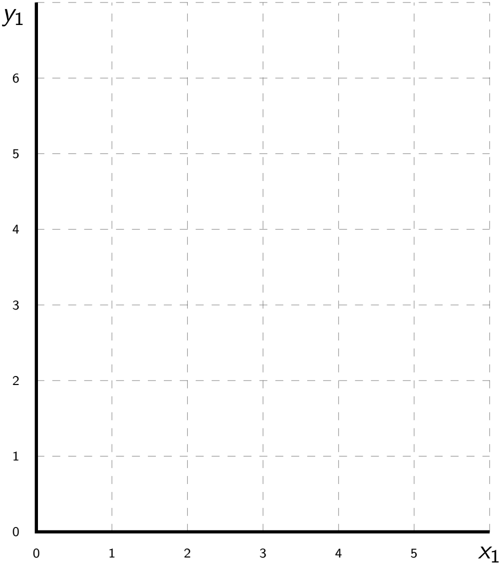
Conclusión

Los dibujos reales contienen información insuficiente y son difíciles de obtener.

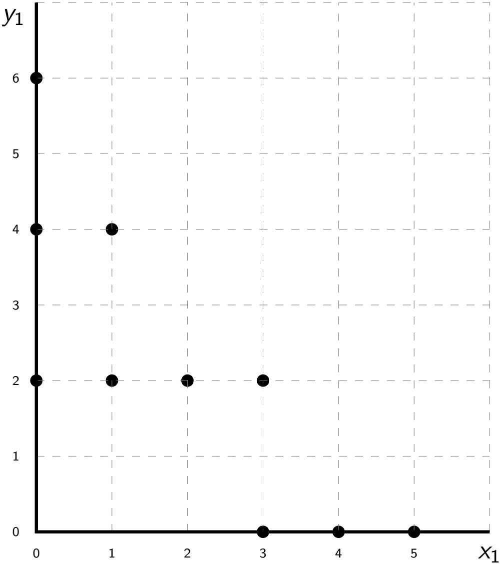
$$y^2 - x^3 = 0 \qquad y^2 - x^5 = 0 \qquad y^2 - x^7 = 0 \qquad y^3 - x^4 = 0$$
$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$
$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

Polígonos de Newton

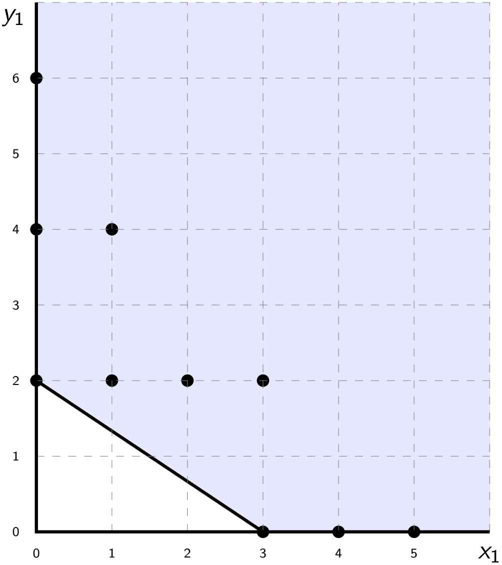
Para poder obtener estos dibujos utilizamos los polígonos de Newton.



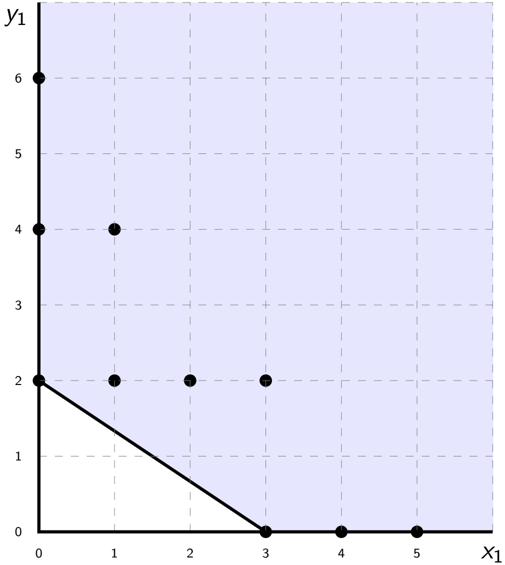
$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$



$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$

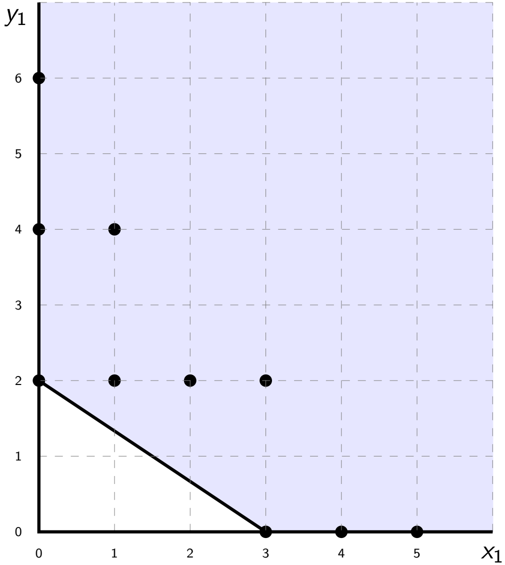


$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$



$$-4(y^2 - x^3)$$

$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$

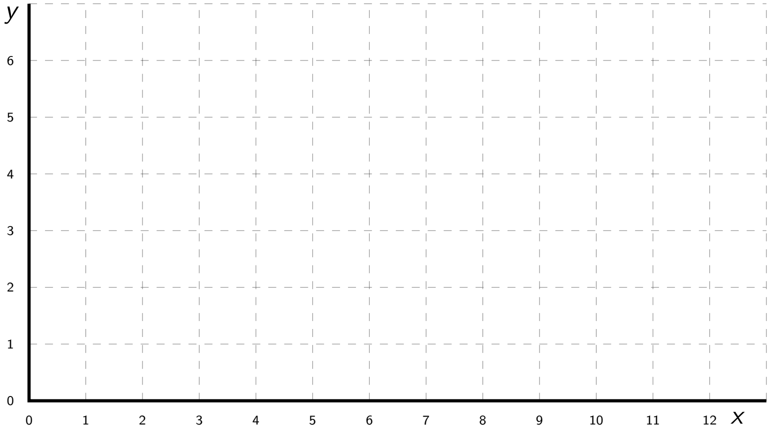


$$-4(y^2 - x^3)$$

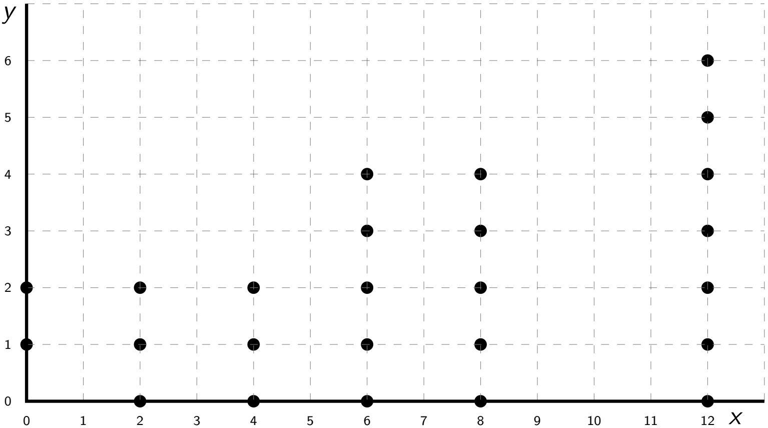
$$x = x_1^2$$

$$y = x_1^3(y_1 + 1)$$

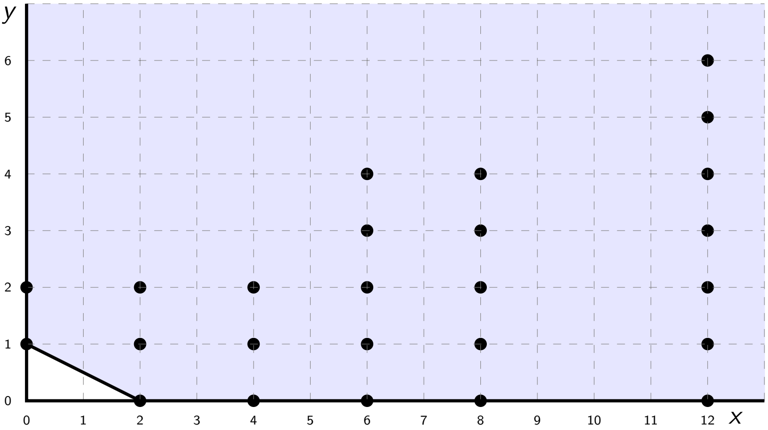
$$-y^6 + x^5 + 6x^3y^2 - 2xy^4 + 4x^4 - 17x^2y^2 + 4y^4 + 4x^3 + 4xy^2 - 4y^2 = 0$$



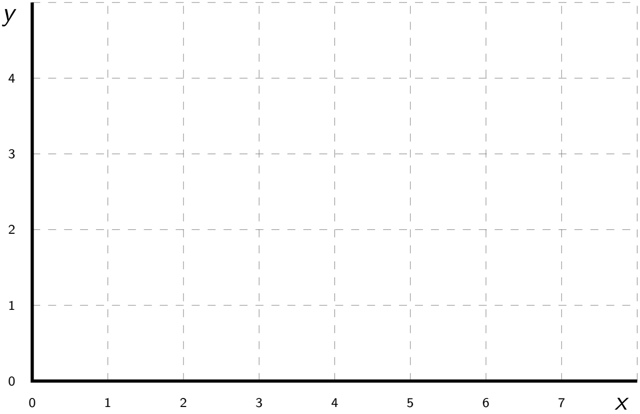
$$
\begin{aligned}
&- x_1^{12}y_1^6 - 6x_1^{12}y_1^5 - 15x_1^{12}y_1^4 - 20x_1^{12}y_1^3 - 15x_1^{12}y_1^2 - 6x_1^{12}y_1 - x_1^{12}\\
&- 2x_1^8y_1^4 - 8x_1^8y_1^3 - 12x_1^8y_1^2 + 4x_1^6y_1^4 - 8x_1^8y_1 + 16x_1^6y_1^3 - 2x_1^8\\
&+ 30x_1^6y_1^2 + 28x_1^6y_1 + 10x_1^6 - 17x_1^4y_1^2 - 34x_1^4y_1 - 16x_1^4 + 4x_1^2y_1^2\\
&+ 8x_1^2y_1 + 8x_1^2 - 4y_1^2 - 8y_1 = 0
\end{aligned}
$$



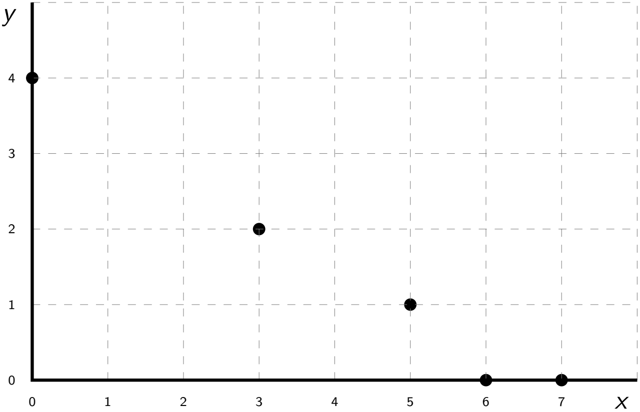
$$
\begin{aligned}
&- x_1^{12}y_1^6 - 6x_1^{12}y_1^5 - 15x_1^{12}y_1^4 - 20x_1^{12}y_1^3 - 15x_1^{12}y_1^2 - 6x_1^{12}y_1 - x_1^{12} \\
&- 2x_1^8y_1^4 - 8x_1^8y_1^3 - 12x_1^8y_1^2 + 4x_1^6y_1^4 - 8x_1^8y_1 + 16x_1^6y_1^3 - 2x_1^8 \\
&+ 30x_1^6y_1^2 + 28x_1^6y_1 + 10x_1^6 - 17x_1^4y_1^2 - 34x_1^4y_1 - 16x_1^4 + 4x_1^2y_1^2 \\
&+ 8x_1^2y_1 + 8x_1^2 - 4y_1^2 - 8y_1 = 0
\end{aligned}
$$



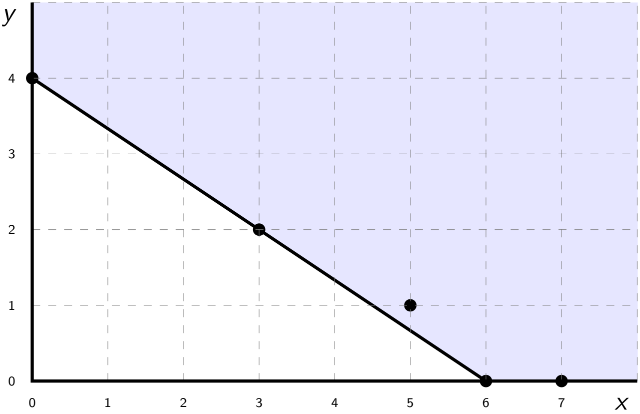
$$
\begin{aligned}
&- x_1^{12}y_1^6 - 6x_1^{12}y_1^5 - 15x_1^{12}y_1^4 - 20x_1^{12}y_1^3 - 15x_1^{12}y_1^2 - 6x_1^{12}y_1 - x_1^{12} \\
&- 2x_1^8y_1^4 - 8x_1^8y_1^3 - 12x_1^8y_1^2 + 4x_1^6y_1^4 - 8x_1^8y_1 + 16x_1^6y_1^3 - 2x_1^8 \\
&+ 30x_1^6y_1^2 + 28x_1^6y_1 + 10x_1^6 - 17x_1^4y_1^2 - 34x_1^4y_1 - 16x_1^4 + 4x_1^2y_1^2 \\
&+ 8x_1^2y_1 + 8x_1^2 - 4y_1^2 - 8y_1 = 0
\end{aligned}
$$



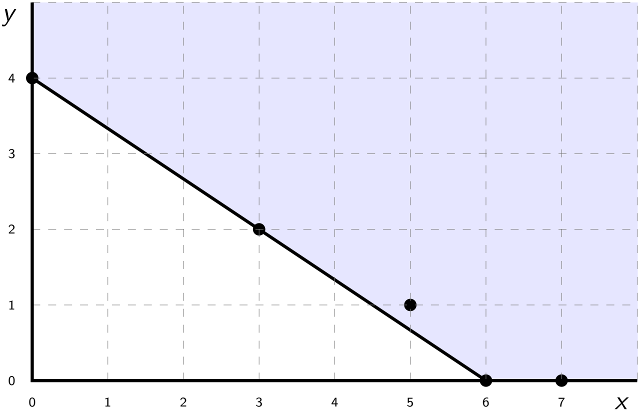
$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$



$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

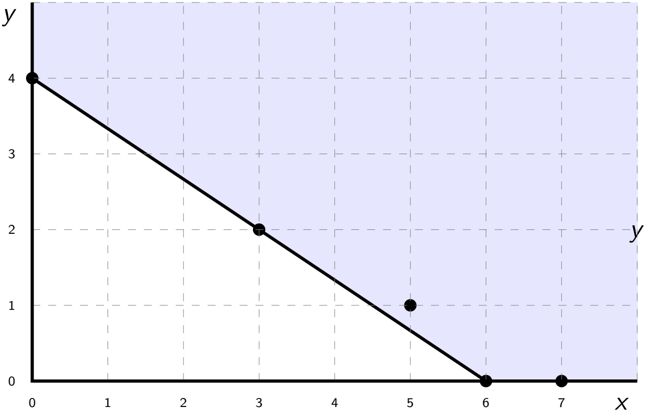


$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$



$$(y^2 - x^3)^2$$

$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

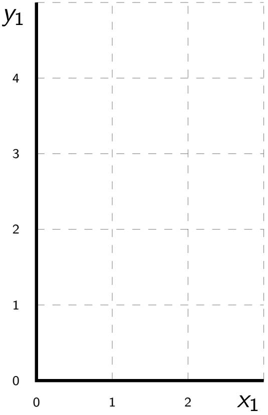


$$(y^2 - x^3)^2$$

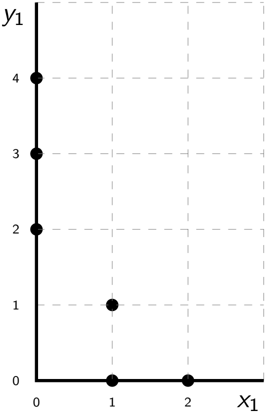
$$x = x_1^2$$

$$y = x_1^3(y_1 + 1)$$

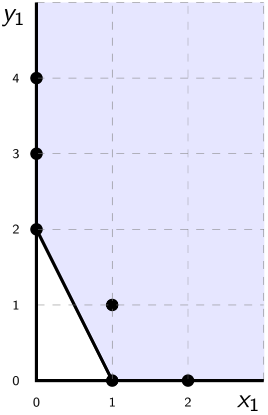
$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$



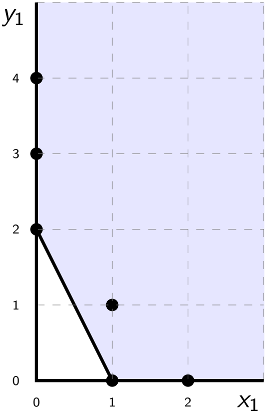
$$y_1^4 + 4y_1^3 - x_1^2 - 4x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1 = 0$$



$$y_1^4 + 4y_1^3 - x_1^2 - 4x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1 = 0$$

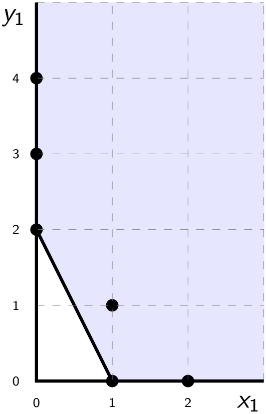


$$y_1^4 + 4y_1^3 - x_1^2 - 4x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1 = 0$$



$4(y^2 - x)$

$$y_1^4 + 4y_1^3 - x_1^2 - 4x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1 = 0$$



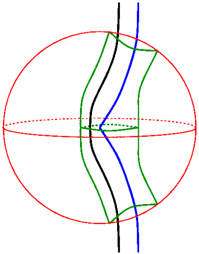
$$4(y^2 - x)$$

$$x_1 = x_2^2$$

$$y_1 = x_2(y_2 + 1)$$

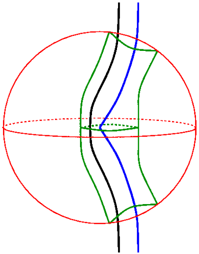
$$y_1^4 + 4y_1^3 - x_1^2 - 4x_1y_1 + 4y_1^2 - 4x_1 = 0$$

El caso complejo



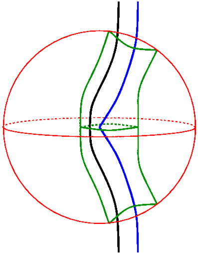
El caso complejo

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$



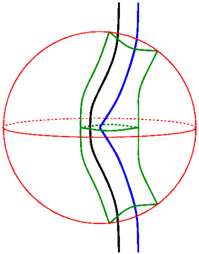
El caso complejo

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$
- $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2\}$



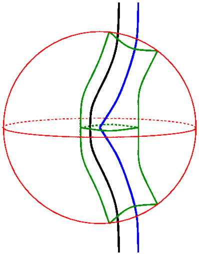
El caso complejo

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$
- $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2\}$
- $\mathbb{S}^3_\varepsilon = \partial\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$



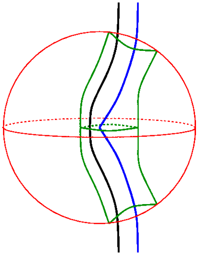
El caso complejo

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$
- $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2\}$
- $\mathbb{S}^3_\varepsilon = \partial\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$
- $K_\varepsilon = \mathbb{S}^3_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$



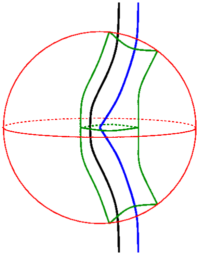
El caso complejo

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$
- $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2\}$
- $\mathbb{S}^3_\varepsilon = \partial\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$
- $K_\varepsilon = \mathbb{S}^3_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$
- Milnor: la topología de $K_\varepsilon \hookrightarrow \mathbb{S}^3_\varepsilon$ no cambia si ε no es lo suficientemente pequeño



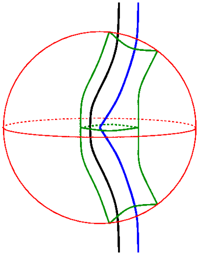
El caso complejo

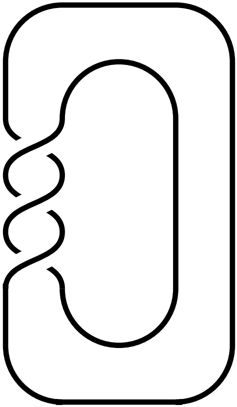
- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$
- $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2\}$
- $\mathbb{S}^3_\varepsilon = \partial\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$
- $K_\varepsilon = \mathbb{S}^3_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$
- Milnor: la topología de $K_\varepsilon \hookrightarrow \mathbb{S}^3_\varepsilon$ no cambia si ε no es lo suficientemente pequeño
- $\mathbb{R} + \infty \to \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{R}^2 + \infty \to \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{R}^3 + \infty \to \mathbb{S}^3$



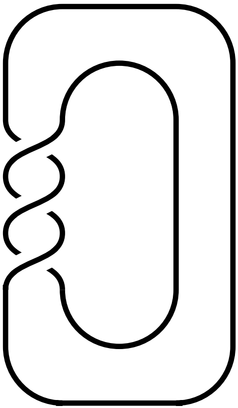
El caso complejo

- $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$
- $\overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \le \varepsilon^2\}$
- $\mathbb{S}^3_\varepsilon = \partial \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2\}$
- $K_\varepsilon = \mathbb{S}^3_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$
- Milnor: la topología de $K_\varepsilon \hookrightarrow \mathbb{S}^3_\varepsilon$ no cambia si ε no es lo suficientemente pequeño
- $\mathbb{R} + \infty \to \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{R}^2 + \infty \to \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{R}^3 + \infty \to \mathbb{S}^3$
- K_ε es un nudo (o un enlace) en $\mathbb{R}^3 + \infty$

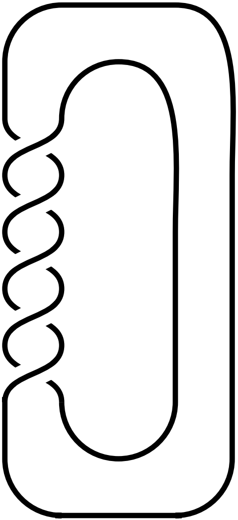




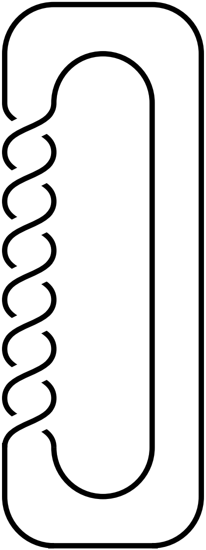
$$y^2 - x^3 = 0$$



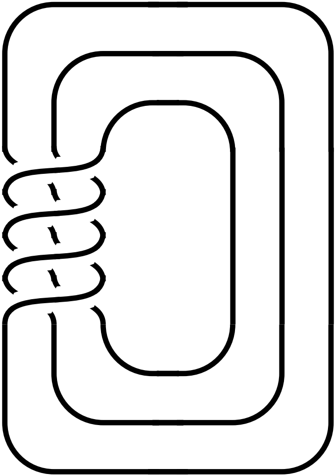
$$-y^6+x^5+6x^3y^2-2xy^4+4x^4-17x^2y^2+4y^4+4x^3+4xy^2-4y^2=0$$



$$y^2 - x^5 = 0$$



$$y^2 - x^7 = 0$$



$$y^3 - x^4 = 0$$

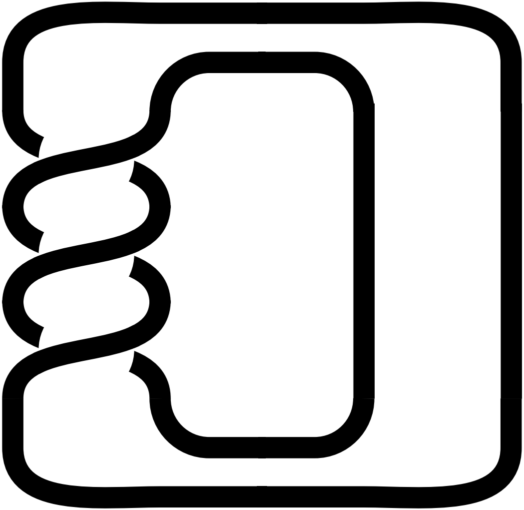


Fig.

$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

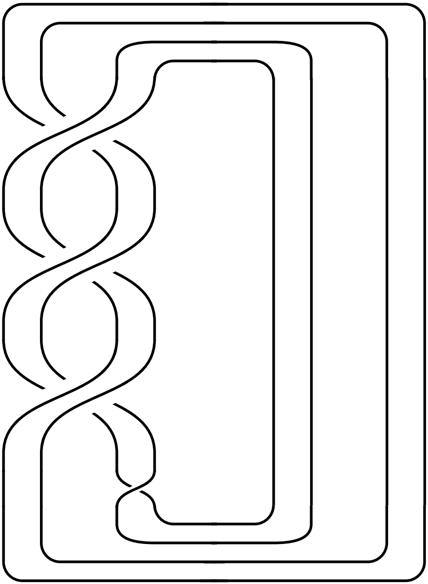


Fig.

$$-x^7 + x^6 - 4x^5y - 2x^3y^2 + y^4 = 0$$

Configuraciones de rectas

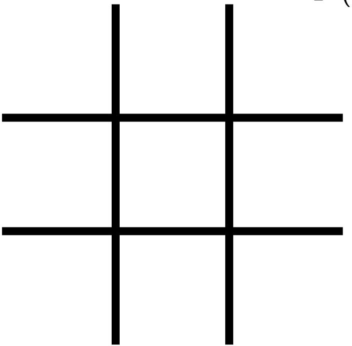
¿Qué se necesita para determinar la topología de una familia de rectas en el plano?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: distintos

Configuraciones de rectas

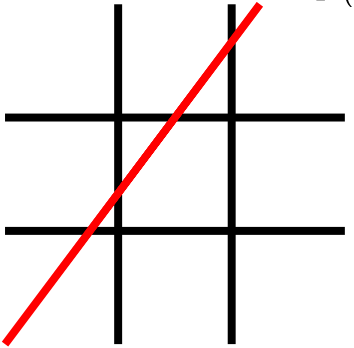
¿Qué se necesita para determinar la topología de una familia de rectas en el plano?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: distintos



Configuraciones de rectas

¿Qué se necesita para determinar la topología de una familia de rectas en el plano?

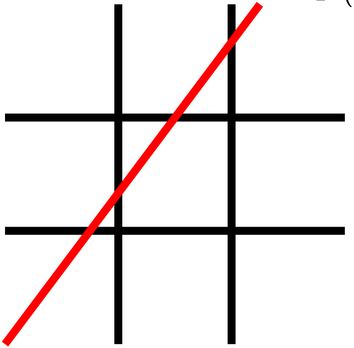


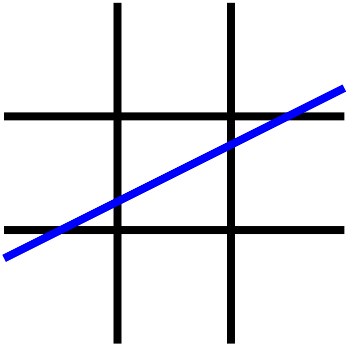
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: distintos

Configuraciones de rectas

¿Qué se necesita para determinar la topología de una familia de rectas en el plano?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: distintos

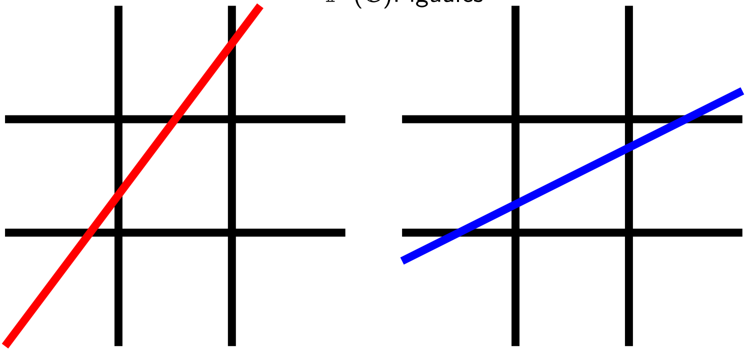


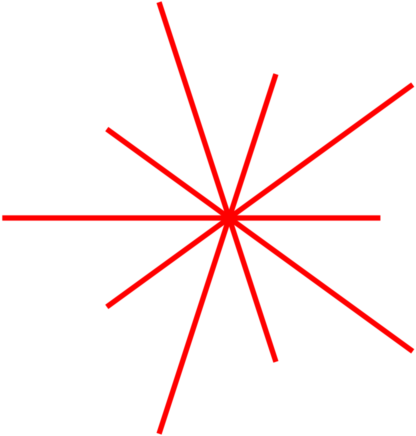


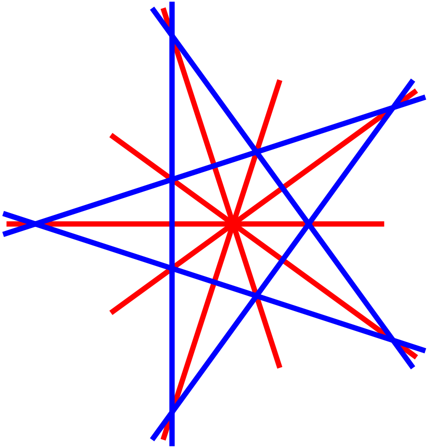
Configuraciones de rectas

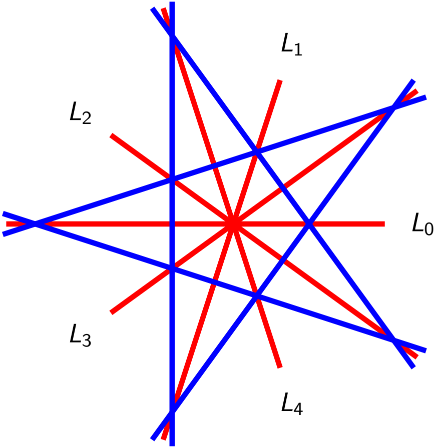
¿Qué se necesita para determinar la topología de una familia de rectas en el plano?

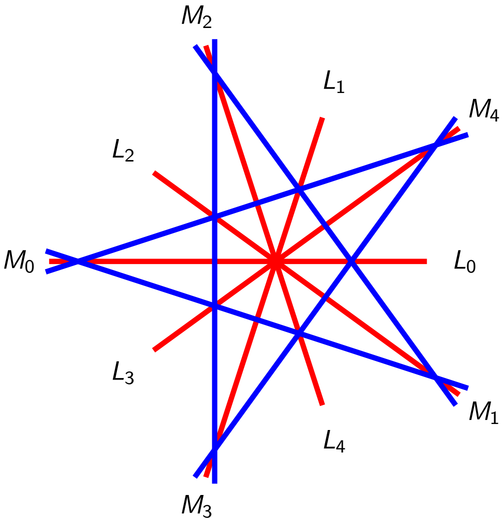
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$: iguales

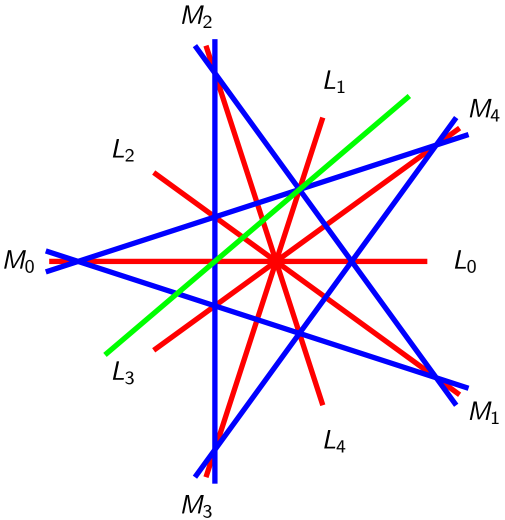


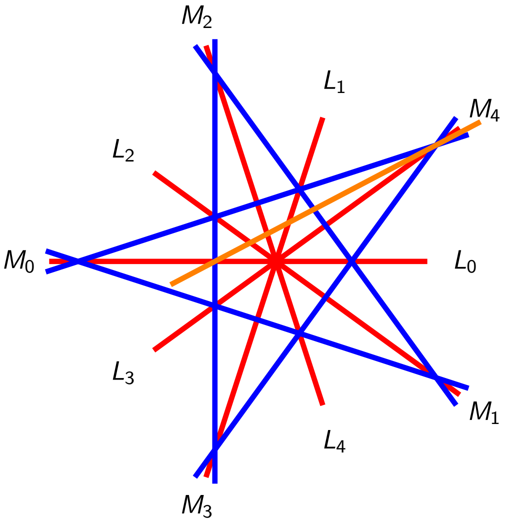





L_1
L_2
L_0
L_3
L_4


M_2
L_1
M_4
L_2
M_0
L_0
L_3
M_1
L_4
M_3


M_2
L_1
M_4
L_2
M_0
L_0
L_3
M_1
L_4
M_3


M_2
L_1
M_4
L_2
M_0
L_0
L_3
M_1
L_4
M_3

Títulos de crédito informático

Títulos de crédito informático

- Imaginary y SURFER

Títulos de crédito informático

- Imaginary y SURFER
- SAGEMATH

Títulos de crédito informático

- Imaginary y SURFER
- SAGEMATH

Gracias por vuestra atención