

Topología de curvas algebraicas planas: ¿por qué estudiarlas?

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

Coloquio CIMAT
Guanajuato, 22 de Noviembre 2018

Dominio maximal

- ▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa

Dominio maximal

▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa

▶ $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Dominio maximal

- ▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa
- ▶ $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- ▶ Se extiende a $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$

Dominio maximal

- ▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa
- ▶ $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- ▶ Se extiende a $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$
- ▶ ¿Qué ocurre con \sqrt{z} ? Se puede definir en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. ¿Es maximal?



Dominio maximal

- ▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa
- ▶ $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- ▶ Se extiende a $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$
- ▶ ¿Qué ocurre con \sqrt{z} ? Se puede definir en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. ¿Es maximal?
- ▶ No: superficie de Riemann de \sqrt{z} : cubierta doble de \mathbb{C}^* .

Dominio maximal

- ▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa
- ▶ $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- ▶ Se extiende a $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$
- ▶ ¿Qué ocurre con \sqrt{z} ? Se puede definir en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. ¿Es maximal?
- ▶ No: superficie de Riemann de \sqrt{z} : cubierta doble de \mathbb{C}^* .
- ▶ Usar funciones multivaloradas.

Dominio maximal

- ▶ $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa
- ▶ $f : \mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
- ▶ Se extiende a $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$
- ▶ ¿Qué ocurre con \sqrt{z} ? Se puede definir en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. ¿Es maximal?
- ▶ No: superficie de Riemann de \sqrt{z} : cubierta doble de \mathbb{C}^* .
- ▶ Usar funciones multivaloradas.

Teorema

Existen funciones multivaloradas para cualquier subconjunto finito de ramificación y cualquier dato de ramificación (grupo fundamental de $\mathbb{C} \setminus \{\text{puntos}\}$ es un grupo libre)



Zariski-Lefschetz

Teorema

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ variedad (cuasi)proyectiva, $H \subset \mathbb{P}^N$ hiperplano genérico,
 $i : X \cap H \hookrightarrow X$ inclusión:

$$i_* : \pi_j(X \cap H) \rightarrow \pi_j(X) \quad \begin{cases} \text{isomorfismo} & \text{si } j < n - 1 \\ \text{epimorfismo} & \text{si } j = n - 1. \end{cases}$$

Zariski-Lefschetz

Teorema

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ variedad (cuasi)proyectiva, $H \subset \mathbb{P}^N$ hiperplano genérico,
 $i : X \cap H \hookrightarrow X$ inclusión:

$$i_* : \pi_j(X \cap H) \rightarrow \pi_j(X) \quad \begin{cases} \text{isomorfismo} & \text{si } j < n - 1 \\ \text{epimorfismo} & \text{si } j = n - 1. \end{cases}$$

Corolario

S^{N-n+2} subespacio proyectivo genérico: $\pi_1(X \cap S) \cong \pi_1(X)$
($X \cap S$ es una superficie compleja).



Zariski-Lefschetz

Teorema

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ variedad (cuasi)proyectiva, $H \subset \mathbb{P}^N$ hiperplano genérico,
 $i : X \cap H \hookrightarrow X$ inclusión:

$$i_* : \pi_j(X \cap H) \rightarrow \pi_j(X) \quad \begin{cases} \text{isomorfismo} & \text{si } j < n - 1 \\ \text{epimorfismo} & \text{si } j = n - 1. \end{cases}$$

Corolario

S^{N-n+2} subespacio proyectivo genérico: $\pi_1(X \cap S) \cong \pi_1(X)$
($X \cap S$ es una superficie compleja).

Corolario

S^{N-n+1} subespacio proyectivo genérico: $i_* : \pi_1(X \cap S) \rightarrow \pi_1(X)$ es
un epimorfismo ($X \cap S$ es una curva compleja).



Zariski-Lefschetz

Teorema

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ variedad (cuasi)proyectiva, $H \subset \mathbb{P}^N$ hiperplano genérico,
 $i : X \cap H \hookrightarrow X$ inclusión:

$$i_* : \pi_j(X \cap H) \rightarrow \pi_j(X) \quad \begin{cases} \text{isomorfismo} & \text{si } j < n - 1 \\ \text{epimorfismo} & \text{si } j = n - 1. \end{cases}$$

Corolario

S^{N-n+2} subespacio proyectivo genérico: $\pi_1(X \cap S) \cong \pi_1(X)$
($X \cap S$ es una superficie compleja).

Corolario

S^{N-n+1} subespacio proyectivo genérico: $i_* : \pi_1(X \cap S) \rightarrow \pi_1(X)$ es
un epimorfismo ($X \cap S$ es una curva compleja).

Ejemplo

$C = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n$ arreglo de rectas: $H_1(\mathbb{P}^2 \setminus C; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$



Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Solución

Grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus C$ o $\mathbb{P}^2 \setminus C$

Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Solución

Grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus C$ o $\mathbb{P}^2 \setminus C$

Método de Zariski-van Kampen y consecuencias

Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Solución

Grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus C$ o $\mathbb{P}^2 \setminus C$

Método de Zariski-van Kampen y consecuencias

- ▶ Zariski-Lefschetz: $\pi_1(\mathbb{L} \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ (\mathbb{L} recta genérica)

Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Solución

Grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus C$ o $\mathbb{P}^2 \setminus C$

Método de Zariski-van Kampen y consecuencias

- ▶ Zariski-Lefschetz: $\pi_1(\mathbb{L} \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ (\mathbb{L} recta genérica)
- ▶ Relaciones simples al *mover* la recta.

Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Solución

Grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus C$ o $\mathbb{P}^2 \setminus C$

Método de Zariski-van Kampen y consecuencias

- ▶ Zariski-Lefschetz: $\pi_1(\mathbb{L} \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ (\mathbb{L} recta genérica)
- ▶ Relaciones simples al *mover* la recta.
- ▶ **Justificación: van Kampen (1933) \implies Seifert-van Kampen**

Zariski-van Kampen

Problema (Zariski, 1929)

Cómo calcular las posibles funciones multivaloradas en \mathbb{C}^2 con lugar de ramificación dado.

Solución

Grupo fundamental de $\mathbb{C}^2 \setminus C$ o $\mathbb{P}^2 \setminus C$

Método de Zariski-van Kampen y consecuencias

- ▶ Zariski-Lefschetz: $\pi_1(\mathbb{L} \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ (\mathbb{L} recta genérica)
- ▶ Relaciones simples al *mover* la recta.
- ▶ Justificación: van Kampen (1933) \implies Seifert-van Kampen

Teorema (Zariski (1929), Dimca (1992))

$C_t \subset \mathbb{P}^2$, $t \in [0, 1]$, *curvas reducidas, equisingulares para $t \in (0, 1]$: epimorfismo natural $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_0) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_1)$*



Grados pequeños

► Recta L : $\mathbb{P}^2 \setminus L = \mathbb{C}^2 \simeq \{0\}$

Grados pequeños

- ▶ Recta L : $\mathbb{P}^2 \setminus L = \mathbb{C}^2 \simeq \{0\}$
- ▶ Dos rectas $L_1 \neq L_2$: $\mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \simeq S^1$.



Grados pequeños

- ▶ Recta L : $\mathbb{P}^2 \setminus L = \mathbb{C}^2 \simeq \{0\}$
- ▶ Dos rectas $L_1 \neq L_2$: $\mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{S}^1$.
- ▶ **Cónica irreducible $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$:**

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$$

$$[x : y : z] \longmapsto \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)}{(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})^2}$$



Grados pequeños

- ▶ Recta L : $\mathbb{P}^2 \setminus L = \mathbb{C}^2 \simeq \{0\}$
- ▶ Dos rectas $L_1 \neq L_2$: $\mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{S}^1$.
- ▶ Cónica irreducible $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$:

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$$
$$[x : y : z] \longmapsto \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)}{(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})^2}$$

- ▶ (Lê, Seade, Verjovski, 2003) $\Phi \mathcal{C}^{(\infty)}$, $\text{Im}(\Phi) = [0, 1]$, Φ regular en $(0, 1)$, $\Phi^{-1}(0) = C$, $\Phi^{-1}(1) = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^2 \setminus C \simeq \mathbb{R}\mathbb{P}^2$

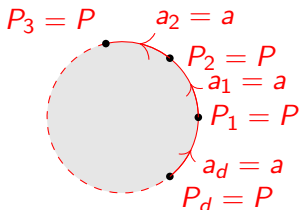


Grados pequeños

- ▶ Recta L : $\mathbb{P}^2 \setminus L = \mathbb{C}^2 \simeq \{0\}$
- ▶ Dos rectas $L_1 \neq L_2$: $\mathbb{P}^2 \setminus (L_1 \cup L_2) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{S}^1$.
- ▶ Cónica irreducible $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$:

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$$
$$[x : y : z] \longmapsto \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)}{(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})^2}$$

- ▶ (Lê, Seade, Verjovski, 2003) $\Phi \in \mathcal{C}^{(\infty)}$, $\text{Im}(\Phi) = [0, 1]$, Φ regular en $(0, 1)$, $\Phi^{-1}(0) = C$, $\Phi^{-1}(1) = \mathbb{RP}^2$, $\mathbb{P}^2 \setminus C \simeq \mathbb{RP}^2$
- ▶ (Libgober, 1986) C_d lisa, $\mathbb{P}^2 \setminus C_d \simeq (\mathbb{S}^2)^{\wedge(d-1)(d-2)} \wedge K$



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Teorema de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Teorema de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Demostración.

- ▶ Zariski-van Kampen: cierto para arreglos de rectas genéricas



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Teorema de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Demostración.

- ▶ Zariski-van Kampen: cierto para arreglos de rectas genéricas
- ▶ Mediante deformaciones, cierto para curvas nodales *próximas* a arreglos de rectas.



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Teorema de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Demostración.

- ▶ Zariski-van Kampen: cierto para arreglos de rectas genéricas
- ▶ Mediante deformaciones, cierto para curvas nodales *próximas* a arreglos de rectas.
- ▶ Severi (1921): los espacios de curvas nodales (con datos fijos) son irreducibles



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Conjetura de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Demostración.

- ▶ Zariski-van Kampen: cierto para arreglos de rectas genéricas
- ▶ Mediante deformaciones, cierto para curvas nodales *próximas* a arreglos de rectas.
- ▶ Error en la demostración de Severi



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Teorema de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Demostración.

- ▶ Zariski-van Kampen: cierto para arreglos de rectas genéricas
- ▶ Mediante deformaciones, cierto para curvas nodales *próximas* a arreglos de rectas.
- ▶ Error en la demostración de Severi
- ▶ Demostración directa de Fulton (1980), Deligne (1979).



Teorema/Conjetura/Teorema de Zariski

Teorema de Zariski (1929)

Si C es una curva nodal entonces $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Demostración.

- ▶ Zariski-van Kampen: cierto para arreglos de rectas genéricas
- ▶ Mediante deformaciones, cierto para curvas nodales *próximas* a arreglos de rectas.
- ▶ Harris (1986): los espacios de curvas nodales (con datos fijos) son irreducibles
- ▶ Demostración directa de Fulton (1980), Deligne (1979).
- ▶ La demostración de Zariski es válida.



Pares de Zariski: Origen

► $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$

Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.

Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).

Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).
- ▶ π_1 no abeliano (\exists cubierta no regular), $\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$

Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).
- ▶ π_1 no abeliano (\exists cubierta no regular), $\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$
- ▶ **Dimensión esperada**

Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).
- ▶ π_1 no abeliano (\exists cubierta no regular), $\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$
- ▶ Dimensión esperada
- ▶ Si C_2 es una séxtica con seis cúspides y no están en una cónica, $\# \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \rightarrow \Sigma_3$.

Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).
- ▶ π_1 no abeliano (\exists cubierta no regular), $\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$
- ▶ Dimensión esperada
- ▶ Si C_2 es una séxtica con seis cúspides y no están en una cónica, $\# \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \rightarrow \Sigma_3$.
- ▶ $\rho : X_i \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus C_i$ cubierta cíclica de orden 6:
 $\dim H_1(X_1; \mathbb{C}) = 2$, si no $\dim H_1(X_2; \mathbb{C}) = 0$.



Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).
- ▶ π_1 no abeliano (\exists cubierta no regular), $\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$
- ▶ Dimensión esperada
- ▶ Si C_2 es una séxtica con seis cúspides y no están en una cónica, $\# \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \rightarrow \Sigma_3$.
- ▶ $\rho : X_i \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus C_i$ cubierta cíclica de orden 6:
 $\dim H_1(X_1; \mathbb{C}) = 2$, si no $\dim H_1(X_2; \mathbb{C}) = 0$.
- ▶ Tales séxticas existen (argumentos de deformación en Zariski, 1937)



Pares de Zariski: Origen

- ▶ $S = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid t^3 - 3f_2(x,y,z)t^2 + 2f_3(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$.
- ▶ El discriminante de $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (proyección desde $[0:0:0:1]$) es $C_1 : f_2^3 - f_3^2 = 0$.
- ▶ Si f_2, f_3 genéricos: séxtica con seis cúspides ordinarias (en una cónica).
- ▶ π_1 no abeliano (\exists cubierta no regular), $\cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$
- ▶ Dimensión esperada
- ▶ Si C_2 es una séxtica con seis cúspides y no están en una cónica, $\# \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \rightarrow \Sigma_3$.
- ▶ $\rho : X_i \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus C_i$ cubierta cíclica de orden 6:
 $\dim H_1(X_1; \mathbb{C}) = 2$, si no $\dim H_1(X_2; \mathbb{C}) = 0$.
- ▶ Tales séxticas existen (argumentos de deformación en Zariski, 1937)
- ▶ Explícitas (Oka (1992), A. (1994))



Pares de Zariski: Definición

Definición

La *combinatoria* de una curva es una terna $(\mathbf{d}, \mathcal{T}, \alpha)$, donde \mathbf{d} es la secuencia de los grados de las componentes irreducibles, \mathcal{T} es la familia de los tipos topológicos de las singularidades y α es la asignación de ramas de los puntos singulares a las componentes irreducibles.



Pares de Zariski: Definición

Definición

La *combinatoria* de una curva es una terna $(\mathbf{d}, \mathcal{T}, \alpha)$, donde \mathbf{d} es la secuencia de los grados de las componentes irreducibles, \mathcal{T} es la familia de los tipos topológicos de las singularidades y α es la asignación de ramas de los puntos singulares a las componentes irreducibles.

Definición

Un *par de Zariski* es un par de curvas $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ con la misma combinatoria y tales que no existe ningún homeomorfismo de pares entre (\mathbb{P}^2, C_1) y (\mathbb{P}^2, C_2) .



Pares de Zariski: Definición

Definición

La *combinatoria* de una curva es una terna $(\mathbf{d}, \mathcal{T}, \alpha)$, donde \mathbf{d} es la secuencia de los grados de las componentes irreducibles, \mathcal{T} es la familia de los tipos topológicos de las singularidades y α es la asignación de ramas de los puntos singulares a las componentes irreducibles.

Definición

Un *par de Zariski* es un par de curvas $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ con la misma combinatoria y tales que no existe ningún homeomorfismo de pares entre (\mathbb{P}^2, C_1) y (\mathbb{P}^2, C_2) .

Zariski, (1929-1937)

Hay un par de Zariski de séxticas irreducibles con seis cúspides.



Pares de Zariski: Definición

Definición

La *combinatoria* de una curva es una terna $(\mathbf{d}, \mathcal{T}, \alpha)$, donde \mathbf{d} es la secuencia de los grados de las componentes irreducibles, \mathcal{T} es la familia de los tipos topológicos de las singularidades y α es la asignación de ramas de los puntos singulares a las componentes irreducibles.

Definición

Un *par de Zariski* es un par de curvas $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ con la misma combinatoria y tales que no existe ningún homeomorfismo de pares entre (\mathbb{P}^2, C_1) y (\mathbb{P}^2, C_2) .

Zariski, (1929-1937)

Hay un par de Zariski de séxticas irreducibles con seis cúspides.

Namba (1984), Degtyarev (1989)

No hay pares de Zariski de grado menor que 6.



Combinatoria de arreglos de rectas

Definición

Una *combinatoria* $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de rectas es un conjunto finito \mathcal{C} (*rectas*) junto con un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (*puntos*), $\#P \geq 2$, $\forall P \in \mathcal{P}$, tal $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{C}$, $L_1 \neq L_2$, $\exists! P \in \mathcal{P}$ tal que $L_1, L_2 \in P$.



Combinatoria de arreglos de rectas

Definición

Una *combinatoria* $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de rectas es un conjunto finito \mathcal{C} (*rectas*) junto con un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (*puntos*), $\#P \geq 2$, $\forall P \in \mathcal{P}$, tal $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{C}$, $L_1 \neq L_2$, $\exists! P \in \mathcal{P}$ tal que $L_1, L_2 \in P$.

Ejemplo

La combinatoria de un arreglo de rectas está formada por sus rectas y sus puntos múltiples. El concepto es equivalente al de combinatoria como curva plana.

Combinatoria de arreglos de rectas

Definición

Una *combinatoria* $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de rectas es un conjunto finito \mathcal{C} (*rectas*) junto con un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (*puntos*), $\#P \geq 2$, $\forall P \in \mathcal{P}$, tal $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{C}$, $L_1 \neq L_2$, $\exists! P \in \mathcal{P}$ tal que $L_1, L_2 \in P$.

Ejemplo

La combinatoria de un arreglo de rectas está formada por sus rectas y sus puntos múltiples. El concepto es equivalente al de combinatoria como curva plana.

Pares de Zariski de rectas

Combinatoria de arreglos de rectas

Definición

Una *combinatoria* $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de rectas es un conjunto finito \mathcal{C} (*rectas*) junto con un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (*puntos*), $\#P \geq 2$, $\forall P \in \mathcal{P}$, tal $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{C}$, $L_1 \neq L_2$, $\exists! P \in \mathcal{P}$ tal que $L_1, L_2 \in P$.

Ejemplo

La combinatoria de un arreglo de rectas está formada por sus rectas y sus puntos múltiples. El concepto es equivalente al de combinatoria como curva plana.

Pares de Zariski de rectas

- ▶ Rybnikov (1994/2011): 13 rectas, sin ecuaciones reales y distinguidas por el grupo fundamental.



Combinatoria de arreglos de rectas

Definición

Una *combinatoria* $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de rectas es un conjunto finito \mathcal{C} (*rectas*) junto con un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (*puntos*), $\#P \geq 2$, $\forall P \in \mathcal{P}$, tal $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{C}$, $L_1 \neq L_2$, $\exists ! P \in \mathcal{P}$ tal que $L_1, L_2 \in P$.

Ejemplo

La combinatoria de un arreglo de rectas está formada por sus rectas y sus puntos múltiples. El concepto es equivalente al de combinatoria como curva plana.

Pares de Zariski de rectas

- ▶ Rybnikov (1994/2011): 13 rectas, sin ecuaciones reales y distinguidas por el grupo fundamental.
- ▶ A-Carmona-Cogolludo-Marco (2005): 11 rectas, reales y aritméticas ($\mathbb{Q}(\sqrt{5})$), distinguidas por la monodromía de trenzas.



Combinatoria de arreglos de rectas

Definición

Una *combinatoria* $(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ de rectas es un conjunto finito \mathcal{C} (*rectas*) junto con un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{C})$ (*puntos*), $\#P \geq 2$, $\forall P \in \mathcal{P}$, tal $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{C}$, $L_1 \neq L_2$, $\exists ! P \in \mathcal{P}$ tal que $L_1, L_2 \in P$.

Ejemplo

La combinatoria de un arreglo de rectas está formada por sus rectas y sus puntos múltiples. El concepto es equivalente al de combinatoria como curva plana.

Pares de Zariski de rectas

- ▶ Rybnikov (1994/2011): 13 rectas, sin ecuaciones reales y distinguidas por el grupo fundamental.
- ▶ A-Carmona-Cogolludo-Marco (2005): 11 rectas, reales y aritméticas ($\mathbb{Q}(\sqrt{5})$), distinguidas por la monodromía de trenzas.
- ▶ Guerville (2016): 12 rectas, aritméticas ($\mathbb{Q}(\zeta_5)$), distinguidas por el número de enlace y posteriormente por el grupo fundamental (2017, A-Cogolludo-Guerville-Marco)



Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

$$\blacktriangleright H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}x_L / \left\langle \sum_{L \in \mathcal{A}} x_L \right\rangle.$$



Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

$$\blacktriangleright H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}x_L / \left\langle \sum_{L \in \mathcal{A}} x_L \right\rangle.$$

$$\blacktriangleright P \text{ punto múltiple, } x_P := \sum_{P \in L} x_L$$



Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

$$\blacktriangleright H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}x_L / \left\langle \sum_{L \in \mathcal{A}} x_L \right\rangle.$$

$$\blacktriangleright P \text{ punto múltiple, } x_P := \sum_{P \in L} x_L$$

$$\blacktriangleright \xi : H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}^*, \text{ carácter.}$$

Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

$$\blacktriangleright H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}x_L / \left\langle \sum_{L \in \mathcal{A}} x_L \right\rangle.$$

$$\blacktriangleright P \text{ punto múltiple, } x_P := \sum_{P \in L} x_L$$

$$\blacktriangleright \xi : H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}^*, \text{ carácter.}$$

$\blacktriangleright \gamma$ sucesión ordenada de puntos y rectas que forman un ciclo y tal que $\xi(x_H) = 1$ si $H \in \gamma$ o si H es vecino a γ .



Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

$$\blacktriangleright H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}x_L \Big/ \left\langle \sum_{L \in \mathcal{A}} x_L \right\rangle.$$

$$\blacktriangleright P \text{ punto múltiple, } x_P := \sum_{P \in L} x_L$$

$\blacktriangleright \xi : H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}^*$, carácter.

$\blacktriangleright \gamma$ sucesión ordenada de puntos y rectas que forman un ciclo y tal que $\xi(x_H) = 1$ si $H \in \gamma$ o si H es vecino a γ .

\blacktriangleright Tiene sentido definir $\xi(\gamma) \in \mathbb{C}^*$.



Número de enlace

A (2014), A-Florens-Guerville (2017)

$$\blacktriangleright H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \cong \bigoplus_{L \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}x_L / \left\langle \sum_{L \in \mathcal{A}} x_L \right\rangle.$$

$$\blacktriangleright P \text{ punto múltiple, } x_P := \sum_{P \in L} x_L$$

$\blacktriangleright \xi : H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}^*$, carácter.

$\blacktriangleright \gamma$ sucesión ordenada de puntos y rectas que forman un ciclo y tal que $\xi(x_H) = 1$ si $H \in \gamma$ o si H es vecino a γ .

\blacktriangleright Tiene sentido definir $\xi(\gamma) \in \mathbb{C}^*$.

\blacktriangleright En general es difícil de calcular (ver Guerville, 2016).



Arreglos de Guerville-Viu

Definición

\mathcal{A} es un arreglo de Guerville-Viu si

Arreglos de Guerville-Viu

Definición

\mathcal{A} es un *arreglo de Guerville-Viu* si

▶ $\mathcal{A} = \{L_1, L_2, L_3\} \cup \{N_1, \dots, N_r\}$.

Arreglos de Guerville-Viu

Definición

\mathcal{A} es un *arreglo de Guerville-Viu* si

- ▶ $\mathcal{A} = \{L_1, L_2, L_3\} \cup \{N_1, \dots, N_r\}$.
- ▶ $P_k := L_i \cap L_j$ ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) son tres puntos distintos y no contienen ningún N_ℓ .



Arreglos de Guerville-Viu

Definición

\mathcal{A} es un *arreglo de Guerville-Viu* si

- ▶ $\mathcal{A} = \{L_1, L_2, L_3\} \cup \{N_1, \dots, N_r\}$.
- ▶ $P_k := L_i \cap L_j$ ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) son tres puntos distintos y no contienen ningún N_ℓ .
- ▶ Los puntos múltiples sobre L_i ($\neq P_j, P_k$) son de multiplicidad impar (r par).

Arreglos de Guerville-Viu

Definición

\mathcal{A} es un *arreglo de Guerville-Viu* si

- ▶ $\mathcal{A} = \{L_1, L_2, L_3\} \cup \{N_1, \dots, N_r\}$.
- ▶ $P_k := L_i \cap L_j$ ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) son tres puntos distintos y no contienen ningún N_ℓ .
- ▶ Los puntos múltiples sobre L_i ($\neq P_j, P_k$) son de multiplicidad impar (r par).
- ▶ Los puntos múltiples que no están sobre L_i son dobles.

Arreglos de Guerville-Viu

Definición

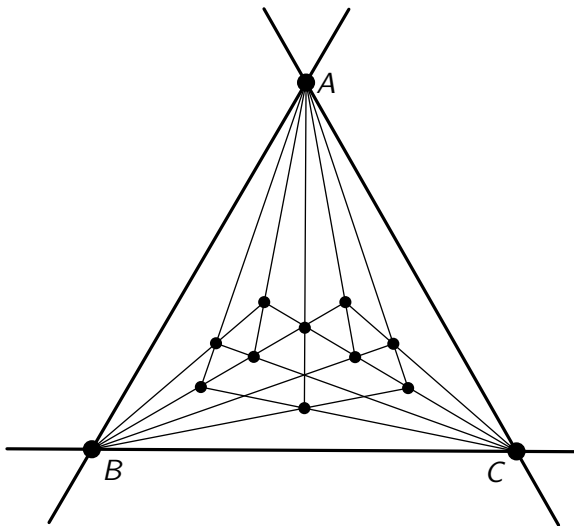
\mathcal{A} es un arreglo de Guerville-Viu si

- ▶ $\mathcal{A} = \{L_1, L_2, L_3\} \cup \{N_1, \dots, N_r\}$.
- ▶ $P_k := L_i \cap L_j$ ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) son tres puntos distintos y no contienen ningún N_ℓ .
- ▶ Los puntos múltiples sobre L_i ($\neq P_j, P_k$) son de multiplicidad impar (r par).
- ▶ Los puntos múltiples que no están sobre L_i son dobles.

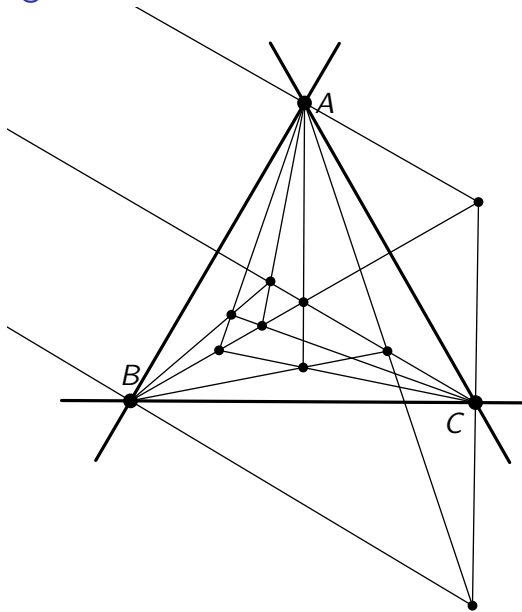
Un arreglo de Guerville-Viu tiene definido un carácter ξ tal que $x_{L_i} = 1$, $i = 1, 2, 3$ y $x_{N_j} = -1$, y se puede calcular el número de enlace $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ asociado al triángulo (L_1, L_2, L_3) (no importa el orden).



Arreglo dual \mathcal{A}_+



Arreglo dual \mathcal{A}_*



Número de enlace de arreglos de Guerville-Viu

Teorema (Guerville-Viu 2018)

Sea \mathcal{A} un arreglo real de Guerville-Viu. Consideremos en el plano dual $\mathbb{R}\check{\mathbb{P}}^2$ la descomposición celular inducida por las rectas duales de P_k .

Número de enlace de arreglos de Guerville-Viu

Teorema (Guerville-Viu 2018)

Sea \mathcal{A} un arreglo real de Guerville-Viu. Consideremos en el plano dual $\mathbb{R}\check{\mathbb{P}}^2$ la descomposición celular inducida por las rectas duales de P_k .

1. La paridad ε del número de puntos duales de N_k en cada región de la descomposición no depende de la región.

Número de enlace de arreglos de Guerville-Viu

Teorema (Guerville-Viu 2018)

Sea \mathcal{A} un arreglo real de Guerville-Viu. Consideremos en el plano dual $\mathbb{R}\check{\mathbb{P}}^2$ la descomposición celular inducida por las rectas duales de P_k .

1. La paridad ε del número de puntos duales de N_k en cada región de la descomposición no depende de la región.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varepsilon$.

Número de enlace de arreglos de Guerville-Viu

Teorema (Guerville-Viu 2018)

Sea \mathcal{A} un arreglo real de Guerville-Viu. Consideremos en el plano dual $\mathbb{R}\check{\mathbb{P}}^2$ la descomposición celular inducida por las rectas duales de P_k .

1. La paridad ε del número de puntos duales de N_k en cada región de la descomposición no depende de la región.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varepsilon$.

Teorema

Sea \mathcal{C} una combinatoria de 13 rectas de Guerville-Viu en la que una recta del triángulo contiene 5 puntos triples y las otras dos un punto triple y dos quintuples. Entonces:



Número de enlace de arreglos de Guerville-Viu

Teorema (Guerville-Viu 2018)

Sea \mathcal{A} un arreglo real de Guerville-Viu. Consideremos en el plano dual $\mathbb{R}\check{\mathbb{P}}^2$ la descomposición celular inducida por las rectas duales de P_k .

1. La paridad ε del número de puntos duales de N_k en cada región de la descomposición no depende de la región.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varepsilon$.

Teorema

Sea \mathcal{C} una combinatoria de 13 rectas de Guerville-Viu en la que una recta del triángulo contiene 5 puntos triples y las otras dos un punto triple y dos quíntuples. Entonces:

- ▶ (Guerville-Viu 2018) Existen configuraciones \mathcal{A}_\pm con combinatoria \mathcal{C} tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\pm) = \pm 1$.

Número de enlace de arreglos de Guerville-Viu

Teorema (Guerville-Viu 2018)

Sea \mathcal{A} un arreglo real de Guerville-Viu. Consideremos en el plano dual $\mathbb{R}\check{\mathbb{P}}^2$ la descomposición celular inducida por las rectas duales de P_k .

1. La paridad ε del número de puntos duales de N_k en cada región de la descomposición no depende de la región.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \varepsilon$.

Teorema

Sea \mathcal{C} una combinatoria de 13 rectas de Guerville-Viu en la que una recta del triángulo contiene 5 puntos triples y las otras dos un punto triple y dos quintuplos. Entonces:

- ▶ (Guerville-Viu 2018) Existen configuraciones \mathcal{A}_\pm con combinatoria \mathcal{C} tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\pm) = \pm 1$.
- ▶ (A-Guerville-Viu 2018) Los grupos fundamentales de \mathcal{A}_\pm y difieren en la torsión del graduado de las LCS.

Pares de Zariski π_1 -equivalentes

Teorema (Oka-Sakamoto 1978)

Sean $C, D \subset \mathbb{C}^2$ dos curvas planas de grados n, m respectivamente tales que $\#(C \cap D) = nm$. Entonces

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (C \cup D)) \cong \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D).$$

Pares de Zariski π_1 -equivalentes

Teorema (Oka-Sakamoto 1978)

Sean $C, D \subset \mathbb{C}^2$ dos curvas planas de grados n, m respectivamente tales que $\#(C \cap D) = nm$. Entonces

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (C \cup D)) \cong \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D).$$

Corolario

Sea \mathcal{A} un arreglo de rectas, $L \in \mathcal{A}$. Denotemos $\mathcal{A}_L := \mathcal{A} \cup \{L_1, L_2\}$ donde $L_1 \cap L_2 \in L$ (y no es un punto múltiple de \mathcal{A}) y cortan genéricamente a las demás rectas. Entonces:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_L) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{F}_2.$$



Pares de Zariski π_1 -equivalentes

Teorema (Oka-Sakamoto 1978)

Sean $C, D \subset \mathbb{C}^2$ dos curvas planas de grados n, m respectivamente tales que $\#(C \cap D) = nm$. Entonces

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus (C \cup D)) \cong \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \times \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus D).$$

Corolario

Sea \mathcal{A} un arreglo de rectas, $L \in \mathcal{A}$. Denotemos $\mathcal{A}_L := \mathcal{A} \cup \{L_1, L_2\}$ donde $L_1 \cap L_2 \in L$ (y no es un punto múltiple de \mathcal{A}) y cortan genéricamente a las demás rectas. Entonces:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_L) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}) \times \mathbb{F}_2.$$

Corolario (Guerville 2018)

Existen arreglos de rectas que forman pares de Zariski π_1 -equivalentes.



¡Muchas gracias!