

Singularidades de curvas, polinomio de Bernstein-Sato e integrales impropias

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

Seminario de Singularidades
Unidad de Cuernavaca
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cuernavaca, 6 de Agosto 2018

Trabajo conjunto con P. Cassou-Noguès, I. Luengo y A. Melle

Singularidades de curvas planas y monodromía

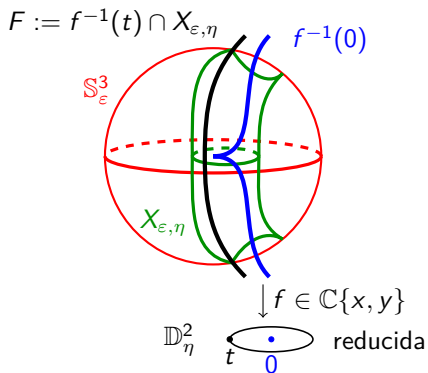
Polinomio de Bernstein-Sato

Integrales impropias

Integrales impropias y polinomio de Bernstein

Conjetura de Yano

Singularidades de curvas planas

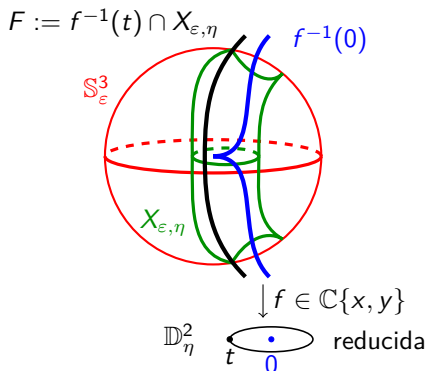


- F superficie compacta con frontera

$$0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$$



Singularidades de curvas planas

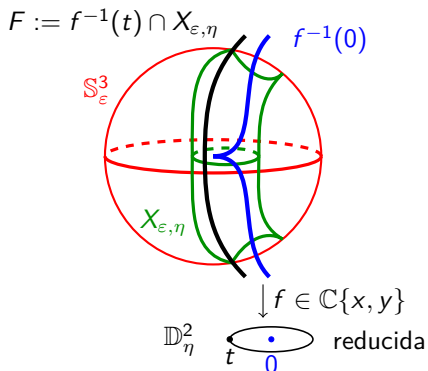


$$0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$$

- ▶ F superficie compacta con frontera
- ▶ $\mu = \dim_{\mathbb{C}} H^1(F; \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(f_x, f_y)$



Singularidades de curvas planas

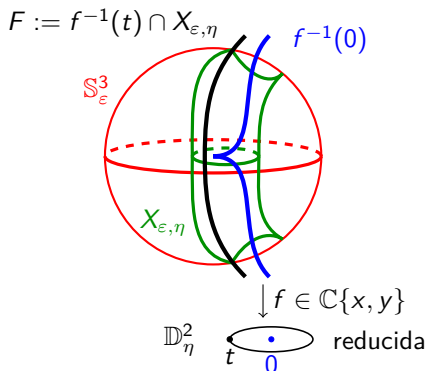


$$0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$$

- ▶ F superficie compacta con frontera
- ▶ $\mu = \dim_{\mathbb{C}} H^1(F; \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / (f_x, f_y)$
- ▶ $\rho : F \rightarrow F$ monodromía geométrica (bien definida salvo isotopía)



Singularidades de curvas planas



$$0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$$

- ▶ F superficie compacta con frontera
- ▶ $\mu = \dim_{\mathbb{C}} H^1(F; \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(f_x, f_y)$
- ▶ $\rho : F \rightarrow F$ monodromía geométrica (bien definida salvo isotopía)
- ▶ $\rho^* : H^1(F; \mathbb{C}) \rightarrow H^1(F; \mathbb{C})$



Hilo conductor I

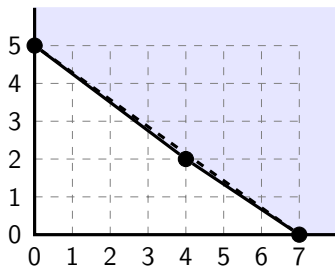
Ejemplo

$$f = y^5 + x^4y^2 + x^7$$

Hilo conductor I

Ejemplo

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$



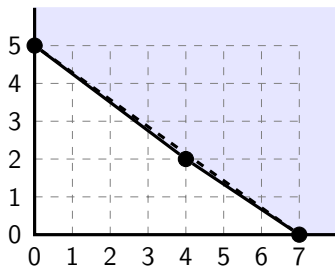
Hilo conductor I

Ejemplo

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$y = ax^{\frac{4}{3}} + \dots$$

$$y = bx^{\frac{3}{2}} + \dots$$



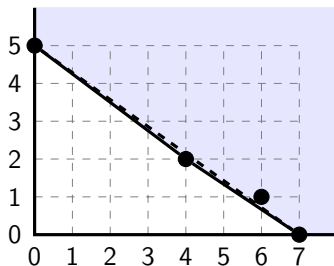
Hilo conductor I

Ejemplo

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$y = ax^{\frac{4}{3}} + \dots$$

$$y = bx^{\frac{3}{2}} + \dots$$



Entorno del estrato μ -constante

$$f_t = f + tx^6 y$$

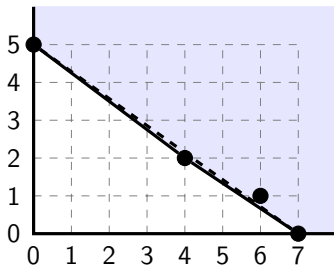
Hilo conductor I

Ejemplo

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$y = ax^{\frac{4}{3}} + \dots$$

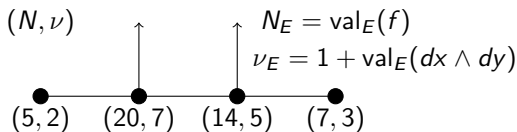
$$y = bx^{\frac{3}{2}} + \dots$$



Entorno del estrato μ -constante

$$f_t = f + tx^6 y$$

Grafo de la resolución



Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

1. Los valores propios de ρ son raíces de la unidad, i.e., $\Delta(t)$ (polinomio característico de ρ^*) es un producto de factores ciclotómicos.

Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

1. Los valores propios de ρ son raíces de la unidad, i.e., $\Delta(t)$ (polinomio característico de ρ^*) es un producto de factores ciclotómicos.
2. Los bloques de Jordan para un valor propio $\zeta \neq 1$ son de tamaño a lo más 2

Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

1. Los valores propios de ρ son raíces de la unidad, i.e., $\Delta(t)$ (polinomio característico de ρ^*) es un producto de factores ciclotómicos.
2. Los bloques de Jordan para un valor propio $\zeta \neq 1$ son de tamaño a lo más 2
3. La multiplicidad de 1 como valor propio es $r - 1$ y los bloques de Jordan son de tamaño 1.



Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

1. Los valores propios de ρ son raíces de la unidad, i.e., $\Delta(t)$ (polinomio característico de ρ^*) es un producto de factores ciclotómicos.
2. Los bloques de Jordan para un valor propio $\zeta \neq 1$ son de tamaño a lo más 2
3. La multiplicidad de 1 como valor propio es $r - 1$ y los bloques de Jordan son de tamaño 1.

Ejemplo $f(x, y)$

Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

1. Los valores propios de ρ son raíces de la unidad, i.e., $\Delta(t)$ (polinomio característico de ρ^*) es un producto de factores ciclotómicos.
2. Los bloques de Jordan para un valor propio $\zeta \neq 1$ son de tamaño a lo más 2
3. La multiplicidad de 1 como valor propio es $r - 1$ y los bloques de Jordan son de tamaño 1.

Ejemplo $f(x, y)$

$$\blacktriangleright \Delta(t) = \frac{(t^{20} - 1)(t^{14} - 1)(t - 1)}{(t^5 - 1)(t^7 - 1)} = (t^{10} + 1)(t^5 + 1)(t^7 + 1)(t - 1)$$

Monodromía

Teorema (Teorema de la monodromía)

$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ reducida con r factores.

1. Los valores propios de ρ son raíces de la unidad, i.e., $\Delta(t)$ (polinomio característico de ρ^*) es un producto de factores ciclotómicos.
2. Los bloques de Jordan para un valor propio $\zeta \neq 1$ son de tamaño a lo más 2
3. La multiplicidad de 1 como valor propio es $r - 1$ y los bloques de Jordan son de tamaño 1.

Ejemplo $f(x, y)$

$$\blacktriangleright \Delta(t) = \frac{(t^{20} - 1)(t^{14} - 1)(t - 1)}{(t^5 - 1)(t^7 - 1)} = (t^{10} + 1)(t^5 + 1)(t^7 + 1)(t - 1)$$

- ▶ El valor propio -1 define un 2-bloque de Jordan.**



Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

► $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)



Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.



Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange



Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):
 - ▶ \mathbb{C} -espacio vectorial H de dimensión μ

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):
 - ▶ \mathbb{C} -espacio vectorial H de dimensión μ
 - ▶ Endomorfismo $\varphi : H \rightarrow H$

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):
 - ▶ \mathbb{C} -espacio vectorial H de dimensión μ
 - ▶ Endomorfismo $\varphi : H \rightarrow H$
 - ▶ $\exp(-2i\pi\varphi)$ conjugado a ρ^*

Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):
 - ▶ \mathbb{C} -espacio vectorial H de dimensión μ
 - ▶ Endomorfismo $\varphi : H \rightarrow H$
 - ▶ $\exp(-2i\pi\varphi)$ conjugado a ρ^*
- ▶ b -exponentes: B_f vector de las raíces (con multiplicidad) del polinomio característico de φ



Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):
 - ▶ \mathbb{C} -espacio vectorial H de dimensión μ
 - ▶ Endomorfismo $\varphi : H \rightarrow H$
 - ▶ $\exp(-2i\pi\varphi)$ conjugado a ρ^*
- ▶ b -exponentes: B_f vector de las raíces (con multiplicidad) del polinomio característico de φ
- ▶ ¡Cambia en el estrato μ -constante!



Versión analítica de la monodromía

Números espectrales o exponentes (Steenbrink, Varchenko)

- ▶ $0 < \eta_1 \leq \dots \leq \eta_\mu < 2$, $\Delta(t) = \prod_{j=1}^{\mu} (t - \exp(2i\pi\eta_j))$
- ▶ $\text{Spec}(f) := (\eta_1, \dots, \eta_\mu)$ (estructura de Hodge mixta)
- ▶ No cambian en el estrato μ -constante.
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen exponentes distintos.

Kashiwara, Malgrange

- ▶ Usando \mathcal{D} -módulos (K) o Gauss-Manin (M):
 - ▶ \mathbb{C} -espacio vectorial H de dimensión μ
 - ▶ Endomorfismo $\varphi : H \rightarrow H$
 - ▶ $\exp(-2i\pi\varphi)$ conjugado a ρ^*
- ▶ b -exponentes: B_f vector de las raíces (con multiplicidad) del polinomio característico de φ
- ▶ ¡Cambia en el estrato μ -constante!
- ▶ Los 2-bloques de Jordan inducen b -exponentes iguales.



Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

- ▶ $\mathcal{D}[s]$ anillo de operadores diferenciales

$$P = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^n f_{i,j,k}(x, y) s^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \quad f_{i,j,k}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$$

Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

- ▶ $\mathcal{D}[s]$ anillo de operadores diferenciales

$$P = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^n f_{i,j,k}(x, y) s^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \quad f_{i,j,k}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$$

- ▶ $\mathbb{C}\{x, y\} \left[\frac{1}{f}, s \right] \cdot f^s$, $\mathbb{C}\{x, y\} \left[\frac{1}{f}, s \right]$ -módulo libre de rango 1, con una estructura natural de $\mathcal{D}[s]$ -módulo.

Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

- ▶ $\mathcal{D}[s]$ anillo de operadores diferenciales

$$P = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^n f_{i,j,k}(x, y) s^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \quad f_{i,j,k}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$$

- ▶ $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s] \cdot f^s$, $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s]$ -módulo libre de rango 1, con una estructura natural de $\mathcal{D}[s]$ -módulo.
- ▶ $0 \neq \{B(s) \in \mathbb{C}[s] \mid \exists P \in \mathcal{D}[s] \text{ tal que } P \cdot f(x)^{s+1} = B(s) \cdot f(x)^s\}$



Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

- ▶ $\mathcal{D}[s]$ anillo de operadores diferenciales

$$P = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^n f_{i,j,k}(x, y) s^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \quad f_{i,j,k}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$$

- ▶ $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s] \cdot f^s$, $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s]$ -módulo libre de rango 1, con una estructura natural de $\mathcal{D}[s]$ -módulo.
- ▶ $0 \neq \{B(s) \in \mathbb{C}[s] \mid \exists P \in \mathcal{D}[s] \text{ tal que } P \cdot f(x)^{s+1} = B(s) \cdot f(x)^s\}$
- ▶ El polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s)$ es el generador mónico; $s + 1 \mid b_f(s)$.



Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

- ▶ $\mathcal{D}[s]$ anillo de operadores diferenciales

$$P = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^n f_{i,j,k}(x, y) s^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \quad f_{i,j,k}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$$

- ▶ $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s] \cdot f^s$, $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s]$ -módulo libre de rango 1, con una estructura natural de $\mathcal{D}[s]$ -módulo.
- ▶ $0 \neq \{B(s) \in \mathbb{C}[s] \mid \exists P \in \mathcal{D}[s] \text{ tal que } P \cdot f(x)^{s+1} = B(s) \cdot f(x)^s\}$
- ▶ El polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s)$ es el generador mónico; $s + 1 \mid b_f(s)$.
- ▶ Polinomio de Bernstein-Sato reducido $\tilde{b}_f(s) := \frac{b_f(s)}{s+1}$



Polinomio de Bernstein-Sato

Operadores diferenciales

- ▶ $\mathcal{D}[s]$ anillo de operadores diferenciales

$$P = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^n f_{i,j,k}(x, y) s^k \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}, \quad f_{i,j,k}(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$$

- ▶ $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s] \cdot f^s$, $\mathbb{C}\{x, y\} [\frac{1}{f}, s]$ -módulo libre de rango 1, con una estructura natural de $\mathcal{D}[s]$ -módulo.
- ▶ $0 \neq \{B(s) \in \mathbb{C}[s] \mid \exists P \in \mathcal{D}[s] \text{ tal que } P \cdot f(x)^{s+1} = B(s) \cdot f(x)^s\}$
- ▶ El polinomio de Bernstein-Sato $b_f(s)$ es el generador mónico; $s+1 \mid b_f(s)$.
- ▶ Polinomio de Bernstein-Sato reducido $\tilde{b}_f(s) := \frac{b_f(s)}{s+1}$
- ▶ $\tilde{b}_f(-s)$ polinomio mínimo de φ .

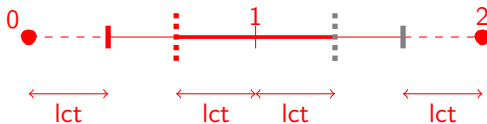


Algunas propiedades del polinomio de Bernstein-Sato

- ▶ *Calculable*: Gauss-Manin (M. Schulze), bases de Groebner no-conmutativas (Levandovskyy, Martín-Morales) en Singular, Asir. Cálculos costosos.

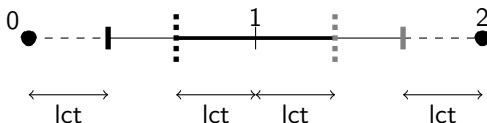
Algunas propiedades del polinomio de Bernstein-Sato

- ▶ *Calculable*: Gauss-Manin (M. Schulze), bases de Groebner no-conmutativas (Levandovsky, Martín-Morales) en Singular, Asir.
- ▶ Geografía de las raíces de $\tilde{b}_f(-s)$:



Algunas propiedades del polinomio de Bernstein-Sato

- ▶ *Calculable*: Gauss-Manin (M. Schulze), bases de Groebner no-conmutativas (Levandovskyy, Martín-Morales) en Singular, Asir.
- ▶ Geografía de las raíces de $\tilde{b}_f(-s)$:

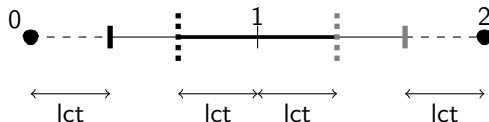


- ▶ $\text{mín Spec}(f) = \text{lct}$, $1 > \alpha$ exponente $\Rightarrow \alpha$ b -exponente.
- ▶ El estrato μ -constante Σ_f de f está algebraicamente estratificado por el polinomio de Bernstein.



Algunas propiedades del polinomio de Bernstein-Sato

- ▶ *Calculable*: Gauss-Manin (M. Schulze), bases de Groebner no-conmutativas (Levandovsky, Martín-Morales) en Singular, Asir.
- ▶ Geografía de las raíces de $\tilde{b}_f(-s)$:

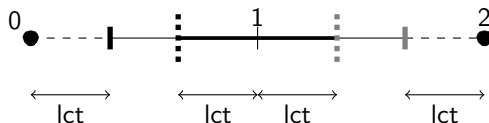


- ▶ $\text{mín Spec}(f) = \text{lct}$, $1 > \alpha$ exponente $\Rightarrow \alpha$ b -exponente.
- ▶ El estrato μ -constante Σ_f de f está algebraicamente estratificado por el polinomio de Bernstein.
- ▶ Problema 1: determinar el polinomio de Bernstein *genérico* b_f^{gen} .
- ▶ **Problema 2: localizar los estratos donde *salta*.**



Algunas propiedades del polinomio de Bernstein-Sato

- ▶ *Calculable*: Gauss-Manin (M. Schulze), bases de Groebner no-conmutativas (Levandovskyy, Martín-Morales) en Singular, Asir.
- ▶ Geografía de las raíces de $\tilde{b}_f(-s)$:



- ▶ $\text{mín Spec}(f) = \text{lct}$, $1 > \alpha$ exponente $\Rightarrow \alpha$ b -exponente.
- ▶ El estrato μ -constante Σ_f de f está algebraicamente estratificado por el polinomio de Bernstein.
- ▶ Problema 1: determinar el polinomio de Bernstein *genérico* b_f^{gen} .
- ▶ Problema 2: localizar los estratos donde *salta*.
- ▶ **Propiedad de semicontinuidad superior de Varchenko cuando la monodromía no tiene valores propios múltiples ($\neq 1$)**

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ , $f > 0$ en $[0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ , $f > 0$ en $[0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$\left| \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} dx \right| \leq \int_0^1 f^{\Re s}(x) x^{a\Re s+b} \frac{dx}{x} \leq M_s \int_0^1 x^{a\Re s+b} \frac{dx}{x}$$

Integrales impropias: una variable

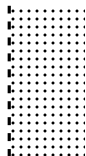
Hipótesis

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ función C^∞ , $f > 0$ en $[0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$\left| \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} dx \right| \leq \int_0^1 f^{\Re s}(x) x^{a\Re s+b} \frac{dx}{x} \leq M_s \int_0^1 x^{a\Re s+b} \frac{dx}{x}$$

Holomorfa si $\Re s > -\frac{b}{a}$



$$\Re s > -\frac{b}{a}$$



Integrales impropias: una variable

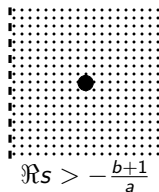
Hipótesis

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ , $f > 0$ en $[0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + xg_s(x) \implies \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x) x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

Prolongación meromorfa a
 $\Re s > -\frac{b+1}{a}$ con polo simple en
 $-\frac{b}{a}$



Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ función \mathcal{C}^∞ , $f > 0$ en $[0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + xg_s(x) \implies \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x) x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$ de orden 1



Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x]$, $f > 0$ en $(0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$ de orden 1

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}[x]$, $f > 0$ in $(0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$ de orden 1 y residuos algebraicos

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

f $\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$ -analítica para $x^{\frac{1}{N}}$ en $[0, 1]$, $f > 0$ en $(0, 1]$, $a, b \in \mathbb{N}$, $g \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}[x, s]$ definida en $[0, 1] \times \mathbb{C}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) g(x, s) x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$ de orden 1 y residuos algebraicos



Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$



Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Conclusión

- ▶ $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Conclusión

- ▶ $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$
- ▶ Orden de los polos a lo más dos (uno *casi siempre*)



Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Conclusión

- ▶ $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$
- ▶ Orden de los polos a lo más dos (uno *casi siempre*)
- ▶ Incluso si $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$ los residuos pueden ser trascendentes.



Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Conclusión

- ▶ $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en $\mathbb{Q}_{<0}$
- ▶ Orden de los polos a lo más dos (uno *casi siempre*)
- ▶ Incluso si $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$ los residuos pueden ser trascendentes.

Pregunta

¿Qué ocurre si $f > 0$ en $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Estudiar f cerca del origen.



Hilo conductor II

$$f = y^5 + x^4y^2 + x^7$$

$$f_t(x, y) := y^5 + x^4y^2 + x^7 + tx^6y, \quad t \in \overline{\mathbb{Q}}_R,$$



Hilo conductor II

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$f_t(x, y) := y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y, \quad t \in \overline{\mathbb{Q}}_R,$$

$$\mathcal{I}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f_t(x, y)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \int_{\mathcal{I}_1} + \int_{\mathcal{I}_2} \quad \diamond \quad y = x^{\frac{4}{3}}$$



Hilo conductor II

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$f_t(x, y) := y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y, \quad t \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}},$$

$$\mathcal{I}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f_t(x, y)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \int_{\triangleleft}^{\mathcal{I}_1} + \int_{\triangleleft}^{\mathcal{I}_2} \quad \diamond \quad y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\mathcal{I}_2(s) \stackrel{y \mapsto y^4}{\underset{x \mapsto xy^3}{\equiv}} 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$



Hilo conductor II

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$f_t(x, y) := y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y, \quad t \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}},$$

$$\mathcal{I}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f_t(x, y)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \int_{\triangleleft}^{\mathcal{I}_1} + \int_{\triangleleft}^{\mathcal{I}_2} \quad \diamond \quad y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\mathcal{I}_2(s) \stackrel{y \mapsto y^4}{x \mapsto xy^3} 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

$$\mathcal{I}_1(s) \stackrel{y \mapsto x^4 y}{x \mapsto x^3} 3 \int_{\triangleleft}^{\square} (y^5 + y^2 + x + tx^2 y)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \mathcal{I}_{11}(s) + \mathcal{I}_{12}(s)$$

$y = x^{\frac{1}{2}}$



Hilo conductor II

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$f_t(x, y) := y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y, \quad t \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}},$$

$$\mathcal{I}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f_t(x, y)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \int_{\square}^{\mathcal{I}_1} + \int_{\square}^{\mathcal{I}_2} \quad \hat{=} \quad y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\mathcal{I}_2(s) \stackrel{y \mapsto y^4}{x \mapsto xy^3} 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

$$\mathcal{I}_1(s) \stackrel{y \mapsto x^4 y}{x \mapsto x^3} 3 \int_{\square} (y^5 + y^2 + x + tx^2 y)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \mathcal{I}_{11}(s) + \mathcal{I}_{12}(s)$$

$y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\mathcal{I}_{11}(s) \stackrel{y \mapsto xy}{x \mapsto x^2} 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$



Hilo conductor II

$$f = y^5 + x^4 y^2 + x^7$$

$$f_t(x, y) := y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y, \quad t \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}},$$

$$\mathcal{I}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f_t(x, y)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \int_{\square}^{\mathcal{I}_1} + \int_{\square}^{\mathcal{I}_2} \quad \hat{=} \quad y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\mathcal{I}_2(s) \stackrel{y \mapsto y^4}{x \mapsto xy^3} 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

$$\mathcal{I}_1(s) \stackrel{y \mapsto x^4 y}{x \mapsto x^3} 3 \int_{\square} (y^5 + y^2 + x + tx^2 y)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} = \mathcal{I}_{11}(s) + \mathcal{I}_{12}(s)$$

$y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\mathcal{I}_{11}(s) \stackrel{y \mapsto xy}{x \mapsto x^2} 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

$$\mathcal{I}_{12}(s) \stackrel{y \mapsto xy}{x \mapsto x^2 y} 3 \int_{\square} (y^3 + 1 + x + tx^2 y^3)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$



Hilo conductor III: $f_t(x, y) = y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(s) = & 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 3 \int_{\square} (y^3 + 1 + x + tx^2 y^3)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$



Hilo conductor III: $f_t(x, y) = y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(s) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 3 \int_{\square} (y^3 + 1 + x + tx^2 y^3)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Residuos para $\alpha = -\frac{3\beta_1+4\beta_2}{20}$

$$\text{Res}_{s=\alpha} = 4 \int_0^1 (1 + x^4)^{-\alpha} x^{\beta_1} \frac{dx}{x} + 3 \int_0^1 (1 + y^3)^{-\alpha} y^{3\frac{2\beta_2-\beta_1}{10}} \frac{dy}{y}$$



Hilo conductor III: $f_t(x, y) = y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(s) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 3 \int_{\square} (y^3 + 1 + x + tx^2 y^3)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Residuos para $\alpha = -\frac{3\beta_1+4\beta_2}{20}$

$$\text{Res}_{s=\alpha} = \int_0^1 (1+u)^{-\alpha} u^{\frac{\beta_1}{4}} \frac{du}{u} + \int_0^1 (1+u)^{-\alpha} u^{\frac{2\beta_2-\beta_1}{10}} \frac{du}{u} = \mathbf{B} \left(\frac{\beta_1}{4}, \frac{2\beta_2-\beta_1}{10} \right)$$



Hilo conductor III: $f_t(x, y) = y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(s) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ & 3 \int_{\square} (y^3 + 1 + x + tx^2 y^3)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Residuos para $\alpha = -\frac{3\beta_1+4\beta_2}{20}$

$$\text{Res}_{s=\alpha} = \int_0^1 (1+u)^{-\alpha} u^{\frac{\beta_1}{4}} \frac{du}{u} + \int_0^1 (1+u)^{-\alpha} u^{\frac{2\beta_2-\beta_1}{10}} \frac{du}{u} = \mathbf{B} \left(\frac{\beta_1}{4}, \frac{2\beta_2-\beta_1}{10} \right)$$

Residuos para $\alpha = -\frac{9}{20}$, $\beta_i = 1$. Involucra $\frac{\partial^2 f_t^{-\frac{9}{20}}}{\partial x^2}(0, y)$ y $\frac{\partial^2 f_t^{-\frac{9}{20}}}{\partial y^2}(x, 0)$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=-\frac{9}{20}} &= \frac{9 \cdot 29}{4000} \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{49}{20}} x^{15} \frac{dx}{x} - \frac{9t}{100} \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{29}{20}} x^7 \frac{dx}{x} \\ &+ \frac{3 \cdot 9 \cdot 29}{16000} \int_0^1 (1+y^3)^{-\frac{49}{20}} y^{-\frac{39}{10}} \frac{dy}{y} - \frac{27t}{400} \int_0^1 (1+y^3)^{-\frac{29}{20}} y^{-\frac{9}{10}} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$



Hilo conductor III: $f_t(x, y) = y^5 + x^4 y^2 + x^7 + tx^6 y$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(s) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^4 + x^7 y + tx^6 y^2)^s x^{\beta_1} y^{20s+3\beta_1+4\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ &\quad 6 \int_{\square} (x^3 y^5 + y^2 + 1 + tx^3 y)^s x^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} + \\ &\quad 3 \int_{\square} (y^3 + 1 + x + tx^2 y^3)^s x^{20s+3\beta_1+4\beta_2} y^{3(14s+2\beta_1+3\beta_2)} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Residuos para $\alpha = -\frac{3\beta_1+4\beta_2}{20}$

$$\text{Res}_{s=\alpha} = \int_0^1 (1+u)^{-\alpha} u^{\frac{\beta_1}{4}} \frac{du}{u} + \int_0^1 (1+u)^{-\alpha} u^{\frac{2\beta_2-\beta_1}{10}} \frac{du}{u} = \mathbf{B} \left(\frac{\beta_1}{4}, \frac{2\beta_2-\beta_1}{10} \right)$$

Residuos para $\alpha = -\frac{9}{20}$, $\beta_i = 1$. Involucra $\frac{\partial^2 f_t^{-\frac{9}{20}}}{\partial x^2}(0, y)$ y $\frac{\partial^2 f_t^{-\frac{9}{20}}}{\partial y^2}(x, 0)$

$$\text{Res}_{s=-\frac{9}{20}} = \frac{9 \cdot 29}{16000} \mathbf{B} \left(\frac{15}{4}, -\frac{13}{10} \right) - \frac{9t}{400} \mathbf{B} \left(\frac{7}{4}, -\frac{3}{10} \right) = \frac{208t + 385}{1664} \mathbf{B} \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{10} \right)$$



Estrategia

$$f^s = \frac{1}{b_f(s)} \quad p \cdot f^{s+1}$$



Estrategia

$$f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} = \frac{1}{b_f(s)} \rho \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1}$$

Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$



Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$
- ▶ $-\alpha$ polo de $\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ con residuo trascendente.



Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$
- ▶ $-\alpha$ polo de $\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ con residuo trascendente.
- ▶ $\mathcal{J}_{\beta'_1, \beta'_2}(s)$, $\beta'_i \geq 1$, es holomorfa en $-(\alpha - 1)$



Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$
- ▶ $-\alpha$ polo de $\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ con residuo trascendente.
- ▶ $\mathcal{J}_{\beta'_1, \beta'_2}(s)$, $\beta'_i \geq 1$, es holomorfa en $-(\alpha - 1)$
- ▶ Entonces, $-\alpha$ es raíz del polinomio de Bernstein-Sato.



Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$
- ▶ $-\alpha$ polo de $\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ con residuo trascendente.
- ▶ $\mathcal{J}_{\beta'_1, \beta'_2}(s)$, $\beta'_i \geq 1$, es holomorfa en $-(\alpha - 1)$
- ▶ Entonces, $-\alpha$ es raíz del polinomio de Bernstein-Sato.

Idea de la demostración.

$$\begin{aligned} \text{Integración por partes} \Rightarrow & \int_{\square} \overbrace{x^{\beta'_1-1} y^{\beta'_2-1}}^v \overbrace{\frac{\partial^{u+v} f^s}{\partial x^u \partial y^v}}^{dU} dx dy = (\beta'_1 - 1) \\ & \left(\int_0^1 y^{\beta'_2-1} \frac{\partial^{u+v-1} f^s}{\partial x^{u-1} \partial y^v} \Big|_{(1,y)} dy - \int_{\square} x^{\beta'_1-2} y^{\beta'_2-1} \frac{\partial^{u+v-1} f^s}{\partial x^{u-1} \partial y^v} \Big|_{(x,y)} dx dy \right) \end{aligned}$$



Estrategia

$$\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s) := \int_0^1 \int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1 \int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dx dy$$

Teorema

- ▶ $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$
- ▶ $-\alpha$ polo de $\mathcal{J}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ con residuo trascendente.
- ▶ $\mathcal{J}_{\beta'_1, \beta'_2}(s)$, $\beta'_i \geq 1$, es holomorfa en $-(\alpha - 1)$
- ▶ Entonces, $-\alpha$ es raíz del polinomio de Bernstein-Sato.

Idea de la demostración.

2º factor de RHS $\left\{ \begin{array}{l} \text{holomorfa o} \\ \text{polo simple con residuo algebraico} \end{array} \right. +$

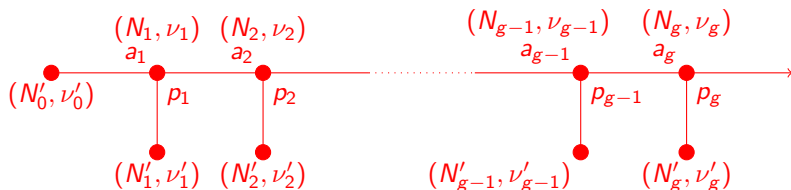
LHS polo simple con residuo trascendente \implies

2º factor de RHS holomorfo + 1º factor de RHS polo simple



Conjetura de Yano

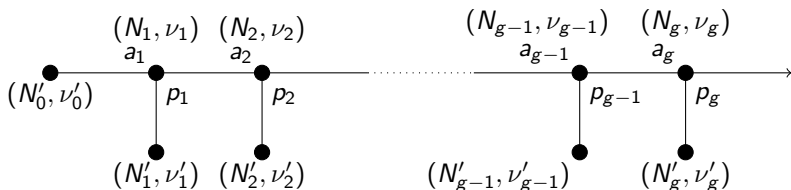
Grafo dual de un germen irreducible



$$R(t) := t + \sum_{k=1}^g t^{\frac{\nu_k}{N_k}} \frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{N_k}}} - \sum_{k=0}^g t^{\frac{\nu'_k}{N'_k}} \frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{N'_k}}}$$

Conjetura de Yano

Grafo dual de un germen irreducible



$$R(t) := t + \sum_{k=1}^g t^{\frac{\nu_k}{N_k}} \frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{N_k}}} - \sum_{k=0}^g t^{\frac{\nu'_k}{N'_k}} \frac{1-t}{1-t^{\frac{1}{N'_k}}}$$

Conjetura de Yano

B_f para f genérico en el estrato μ -constante con grafo de resolución como arriba está formado por los exponentes de los monomios de $R(t)$ (contados con multiplicidad).

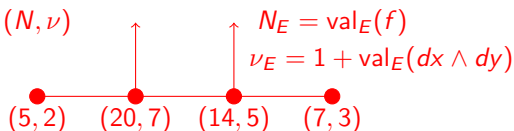


Hilo conductor IV

{1}

$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$

Grafo dual (N, ν)



$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$

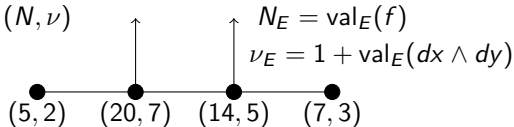


Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

► $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$

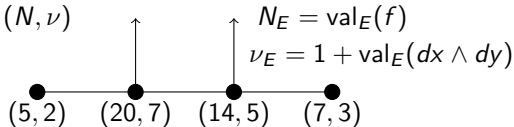


Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)

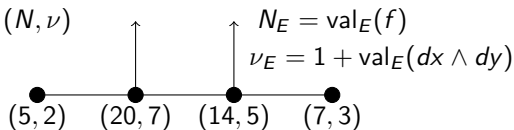


Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)
- ▶ $\frac{13}{20}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{17}{14}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \in \left[\frac{13}{20}, \frac{27}{20} \right) \implies$ raíces de $\tilde{b}_f(-s)$.

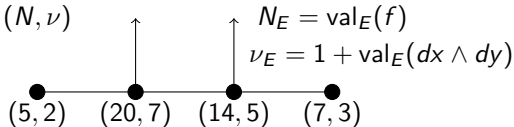


Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)
- ▶ $\frac{13}{20}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{17}{14}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \in \left[\frac{13}{20}, \frac{27}{20} \right) \implies$ raíces de $\tilde{b}_f(-s)$.
- ▶ $\frac{5}{14} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{14}$ raíz de $\tilde{b}_f(-s)$



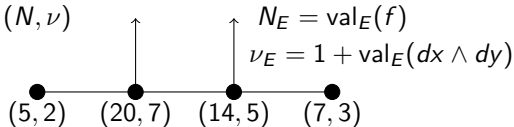
Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)

$$t \neq -\frac{385}{208}$$



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)
- ▶ $\frac{13}{20}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{17}{14}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \in \left[\frac{13}{20}, \frac{27}{20} \right) \implies$ raíces de $\tilde{b}_t(-s)$.
- ▶ $\frac{5}{14} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{14}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$
- ▶ $-\frac{9}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{1,1}(s)$ ($t \neq -\frac{385}{208}$) y $\frac{11}{20}$ nunca polo $\implies \frac{9}{20}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$, $t \neq -\frac{385}{208}$.



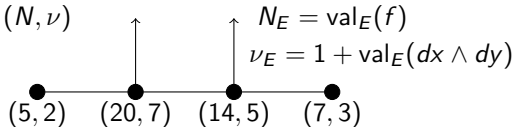
Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)

$$t \neq -\frac{385}{208}$$



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)
- ▶ $\frac{13}{20}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{17}{14}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \in \left[\frac{13}{20}, \frac{27}{20} \right) \implies$ raíces de $\tilde{b}_t(-s)$.
- ▶ $\frac{5}{14} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{14}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$
- ▶ $-\frac{9}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{1,1}(s)$ ($t \neq -\frac{385}{208}$) y $\frac{11}{20}$ nunca polo $\implies \frac{9}{20}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$, $t \neq -\frac{385}{208}$.
- ▶ $-\frac{29}{20} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{3,5}(s)$



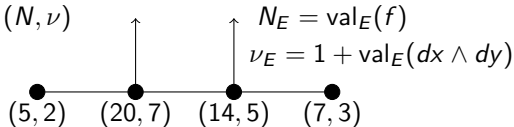
Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)

$$t \neq -\frac{385}{208}$$



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)
- ▶ $\frac{13}{20}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{17}{14}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \in \left[\frac{13}{20}, \frac{27}{20} \right) \implies$ raíces de $\tilde{b}_t(-s)$.
- ▶ $\frac{5}{14} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{14}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$
- ▶ $-\frac{9}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{1,1}(s)$ ($t \neq -\frac{385}{208}$) y $\frac{11}{20}$ nunca polo $\implies \frac{9}{20}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$, $t \neq -\frac{385}{208}$.
- ▶ $-\frac{29}{20} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{3,5}(s)$
- ▶ $-\frac{9}{20}$ no es polo de $\mathcal{I}_{1,1}(s)$
- ▶ los demás $\mathcal{I}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ son siempre holomorfos



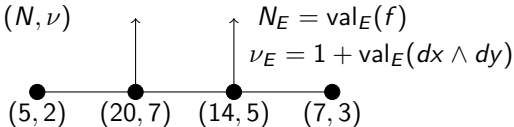
Hilo conductor IV

$$\{1\}$$

$$\left\{ \frac{5}{14}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}, \frac{15}{14}, \frac{17}{14} \right\}$$

Grafo dual (N, ν)

$$t = -\frac{385}{208}$$



$$\left\{ \frac{7}{20}, \frac{29}{20}, \frac{1}{2}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \right\}$$

- ▶ $\text{Spec} \cap [0, 1] = \left\{ \frac{7}{20}, \frac{11}{20}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14} \right\}$
- ▶ $\frac{1}{2}$ raíz doble (2-bloque de Jordan)
- ▶ $\frac{13}{20}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{11}{10}, \frac{23}{20}, \frac{17}{14}, \frac{5}{4}, \frac{13}{10} \in \left[\frac{13}{20}, \frac{27}{20} \right) \implies$ raíces de $\tilde{b}_t(-s)$.
- ▶ $\frac{5}{14} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{14}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$
- ▶ $-\frac{9}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{1,1}(s)$ ($t \neq -\frac{385}{208}$) y $\frac{11}{20}$ nunca polo $\implies \frac{9}{20}$ raíz de $\tilde{b}_t(-s)$, $t \neq -\frac{385}{208}$.
- ▶ $-\frac{29}{20} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{20}$ polo con residuo trascendente para $\mathcal{I}_{3,5}(s)$
- ▶ $-\frac{9}{20}$ no es polo de $\mathcal{I}_{1,1}(s)$
- ▶ los demás $\mathcal{I}_{\beta_1, \beta_2}(s)$ son siempre holomorfos
- ▶ $\frac{29}{20}$ raíz de $\tilde{b}_{-\frac{385}{208}}(-s)$



Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.



Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (Blanco)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades irreducibles sin valores propios múltiples en la monodromía.



Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)

Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)
2. Uso de los pesos en las integrales (*raíces aproximadas*)

Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)
2. Uso de los pesos en las integrales (*raíces aproximadas*)
3. $\{\text{Exponentes de Yano}\} = A_1 \cup A_2$, empezando por $\frac{\nu_j}{N_j}$ (con denominadores N_j), $j = 1, 2$

Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)
2. Uso de los pesos en las integrales (*raíces aproximadas*)
3. $\{\text{Exponentes de Yano}\} = A_1 \cup A_2$, empezando por $\frac{\nu_j}{N_j}$ (con denominadores N_j), $j = 1, 2$
4. $A_j = A_{j1} \cup A_{j2}$; descomposición asociada al semigrupo.

Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)
2. Uso de los pesos en las integrales (*raíces aproximadas*)
3. $\{\text{Exponentes de Yano}\} = A_1 \cup A_2$, empezando por $\frac{\nu_j}{N_j}$ (con denominadores N_j), $j = 1, 2$
4. $A_j = A_{j1} \cup A_{j2}$; descomposición asociada al semigrupo.
5. $\alpha \in A_{j1} \implies \tilde{b}_f(-\alpha) = 0$, $\forall f$ en el estrato μ -constante

Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)
2. Uso de los pesos en las integrales (*raíces aproximadas*)
3. $\{\text{Exponentes de Yano}\} = A_1 \cup A_2$, empezando por $\frac{\nu_j}{N_j}$ (con denominadores N_j), $j = 1, 2$
4. $A_j = A_{j1} \cup A_{j2}$; descomposición asociada al semigrupo.
5. $\alpha \in A_{j1} \implies \tilde{b}_f(-\alpha) = 0$, $\forall f$ en el estrato μ -constante
6. $\alpha \in A_{j2} \implies \tilde{b}_f^{\text{gen}}(-\alpha) = 0$ (usando la semicontinuidad superior de Varchenko)



Sobre la Conjetura de Yano

Teorema (Pi. Cassou-Noguès, M. Saito)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con un par de Puiseux.

Teorema (A–Cassou-Noguès–Luengo–Melle)

La Conjetura de Yano es cierta para singularidades con dos pares de Puiseux sin valores propios múltiples en la monodromía.

Observaciones

1. Hay que permitir dominios de integración más generales (relacionados con los pares de Puiseux)
2. Uso de los pesos en las integrales (*raíces aproximadas*)
3. $\{\text{Exponentes de Yano}\} = A_1 \cup A_2$, empezando por $\frac{\nu_j}{N_j}$ (con denominadores N_j), $j = 1, 2$
4. $A_j = A_{j1} \cup A_{j2}$; descomposición asociada al semigrupo.
5. $\alpha \in A_{j1} \implies \tilde{b}_f(-\alpha) = 0$, $\forall f$ en el estrato μ -constante
6. $\alpha \in A_{j2} \implies \tilde{b}_f^{\text{gen}}(-\alpha) = 0$ (usando la semicontinuidad superior de Varchenko)
7. $\alpha \in A_{j2} \implies$ no es raíz para algún f_α en el estrato μ -constante



Futuro

Próximos pasos

Futuro

Próximos pasos

1. Estudiar el caso de valores propios múltiples: funciona en el caso más simple.

Futuro

Próximos pasos

1. Estudiar el caso de valores propios múltiples: funciona en el caso más simple.
2. Extender la conjetura al caso reducible

Futuro

Próximos pasos

1. Estudiar el caso de valores propios múltiples: funciona en el caso más simple.
2. Extender la conjetura al caso reducible
3. La extensión natural podría funcionar si la valencia máxima en el grafo de resolución es 3.

Futuro

Próximos pasos

1. Estudiar el caso de valores propios múltiples: funciona en el caso más simple.
2. Extender la conjetura al caso reducible
3. La extensión natural podría funcionar si la valencia máxima en el grafo de resolución es 3.
4. Cassou-Noguès ya lo probó para curvas Newton no degeneradas (sin exponentes repetidos $\neq 1$)

¡¡Gracias!!