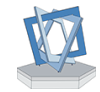
Intersecciones singulares de cuádricas coaxiales

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

Congreso Bienal de la RSME 2024
Sesión Especial de la Red Española de Topología
Pamplona, 22 de enero de 2024

Trabajo conjunto con S. López de Medrano y M.T. Lozano Imízcoz. Financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 (PID2020-114750GB-C31) y Gobierno de Aragón (E22_20R: "Álgebra y Geometría").



Intersecciones de elipsoides

$$\begin{aligned}
\alpha_1^0 x_1^2 + \cdots + \alpha_n^0 x_n^2 &= 1 \\
\alpha_1^1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n^1 x_n^2 &= 1 \\
&\cdots \\
\alpha_1^m x_1^2 + \cdots + \alpha_n^m x_n^2 &= 1 \\
\alpha_i^j &> 0
\end{aligned}$$



Intersecciones de elipsoides

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + \cdots + x_n^2 &= 1 \\
a_1^1 x_1^2 + \cdots + a_n^1 x_n^2 &= 0 \\
&\cdots \\
a_1^m x_1^2 + \cdots + a_n^m x_n^2 &= 0
\end{aligned}
$$



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0$$

$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$$



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$$

$$r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$r_1, \ldots, r_n \geq 0$$



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$$

$$r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.

Hiperbolicidad débil (WH)

(WH): el origen no es combinación lineal convexa de m elementos de $\mathcal{A} \Longleftrightarrow\!\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\!\Longrightarrow Z$ subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$.
Si es $\neq \varnothing$, es de dimensión $d = n - m - 1$.



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.

Hiperbolicidad débil (WH)

(WH): los vértices de P intersecan d hiperplanos coordenados (y son simples).



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.

Hiperbolicidad débil (WH)

La combinatoria extendida de P determina las propiedades topológicas de P. Algorítmicamente se puede calcular, π_1, homología, ...



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.

Singularidades genéricas

El origen no es combinación lineal convexa de $m-1$ elementos de $\mathcal{A}$.



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.

Singularidades genéricas

Los vértices de P intersecan d o $d+1$ hiperplanos coordenados.



Intersecciones de elipsoides

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \qquad r_1 + \cdots + r_n = 1$$
$$A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 = 0 \qquad r_1 A_1 + \cdots + r_n A_n = 0$$
$$\mathcal{A} := (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n \qquad r_1, \ldots, r_n \geq 0$$

Codificación de las intersecciones Z

- $(A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^m)^n$ sistema generador de $\mathbb{R}^m$.
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n$: coeficientes de $\mathbf{0}$ como combinación lineal convexa de $\mathcal{A}$; caras en los hiperplanos coordenados.
- Topológicamente: Unión de reflexiones de $P \Longrightarrow Z$.

Singularidades genéricas

Los vértices de P intersecan d o $d+1$ hiperplanos coordenados.

Objetivo

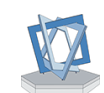
Estudiar las intersecciones con singularidades genéricas.



Ejemplos

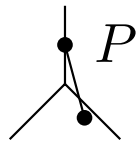
$m = 1, n = 2$

$\mathcal{A} = (-1, 1)$, $P = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, $Z = \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^0$ (liso)



Ejemplos

$m = 1, n = 3$

$\mathcal{A} = (-1, 0, 1)$ 

$Z = \Sigma(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^0)$.



Ejemplos

Proposición

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow Z_1 = \Sigma(Z)$, *suspensión.*



Ejemplos

Proposición

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow Z_1 = \Sigma(Z)$, *suspensión.*

$m = 0$

$\mathcal{A} = (\mathbf{0}^1)$: $Z = \mathbb{S}^0$



Ejemplos

Proposición

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow Z_1 = \Sigma(Z)$, *suspensión.*

$m = 0$

$\mathcal{A} = (\mathbf{0}^2)$: $Z = \mathbb{S}^1$



Ejemplos

Proposición

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow Z_1 = \Sigma(Z)$, *suspensión.*

$m = 0$

$\mathcal{A} = (\mathbf{0}^n)$: $Z = \mathbb{S}^{n-1}$

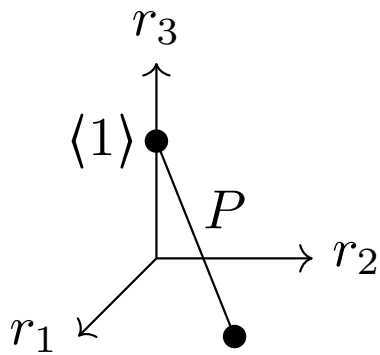


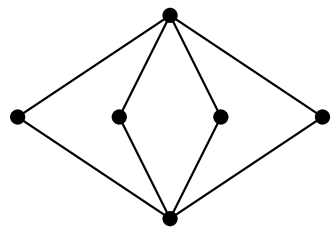
Ejemplos

Proposición

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow Z_1 = \Sigma(Z)$, *suspensión.*

$\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$

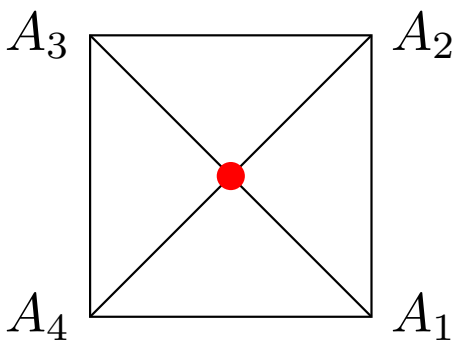


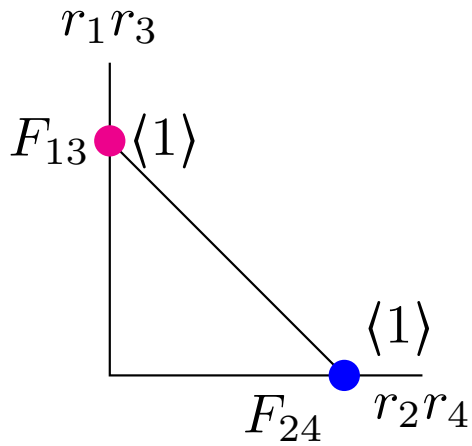


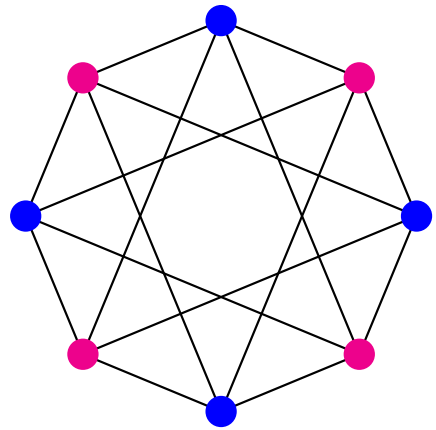
$K_{2,4} \cong Z$

Ejemplos

Intersección en dimensión 1 con dos singularidades genéricas

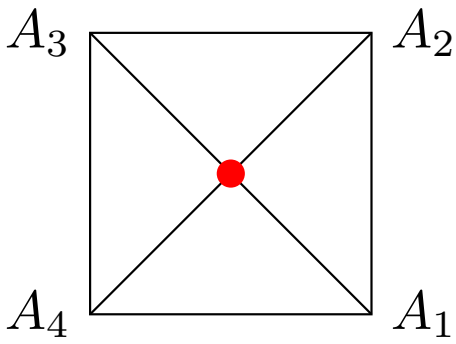


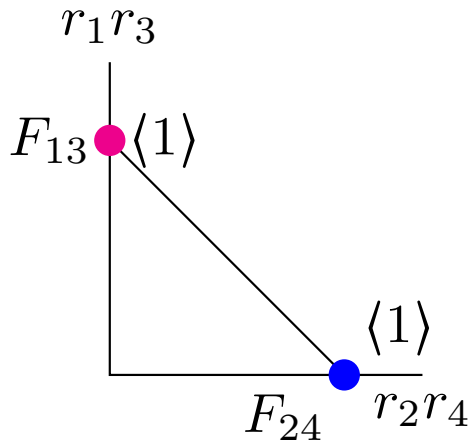


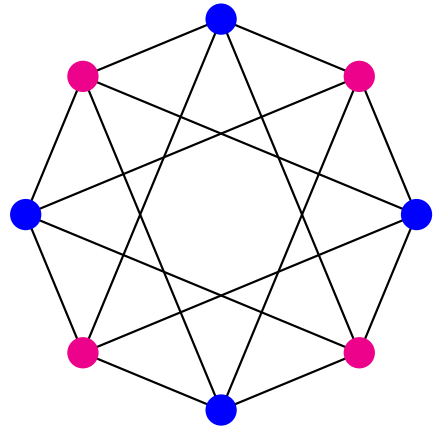


Ejemplos

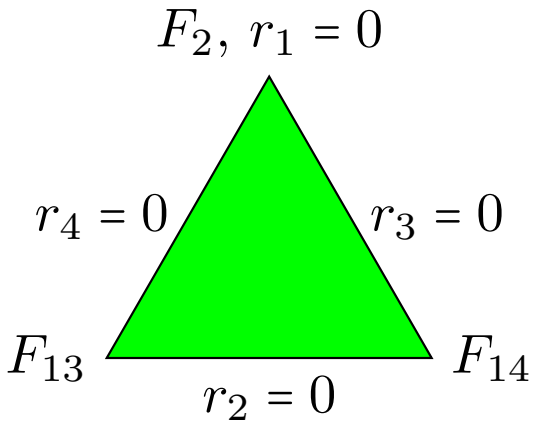
Intersección en dimensión 1 con dos singularidades genéricas

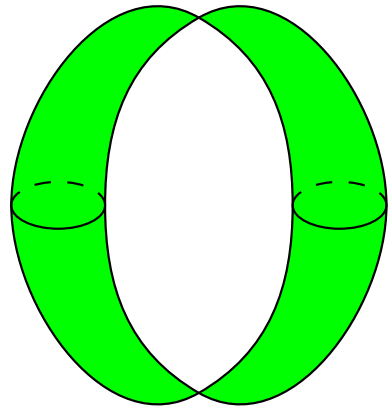






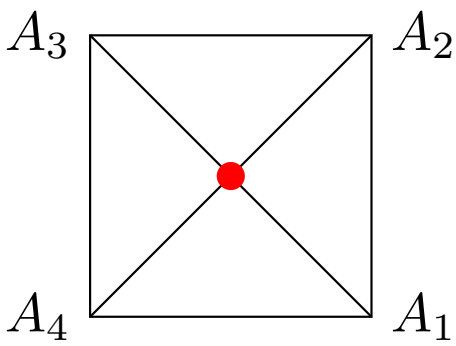
$\mathcal{A} = \{-1, -1, 0, 1\}$

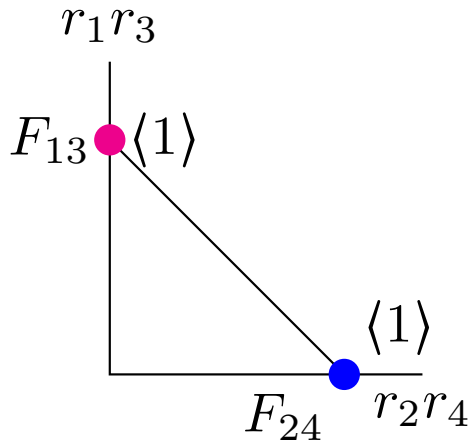


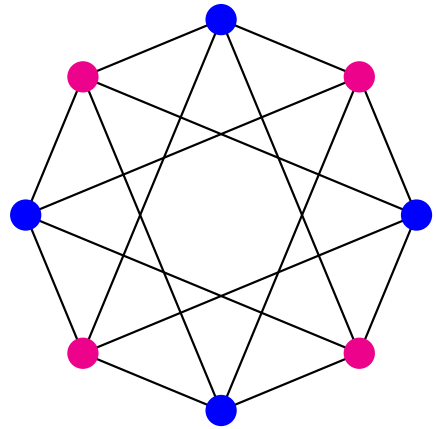


Ejemplos

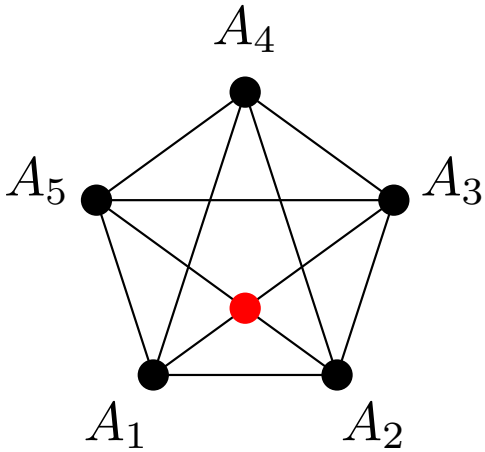
Intersección en dimensión 1 con dos singularidades genéricas

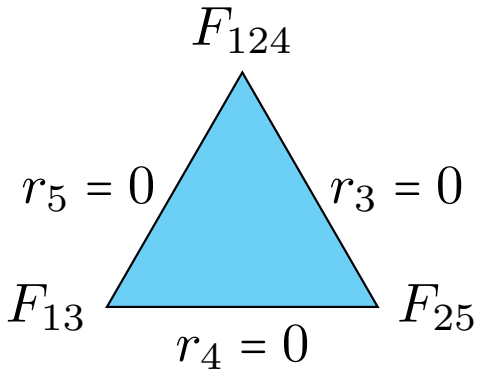


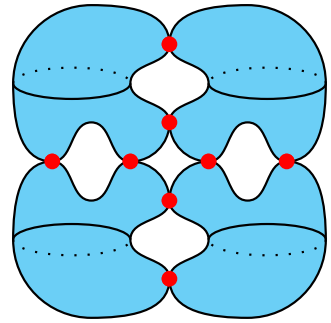




Intersección en dimensión 2 con dos singularidades genéricas







Alisamientos

Deformaciones lisas

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (con Z liso): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos* $\Longrightarrow$ Z^t difeomorfo a Z.



Alisamientos

Deformaciones singulares

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (con Z singular): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos* y *equisingulares* $\Longrightarrow$ Z^t homeomorfo a Z.



Alisamientos

Deformaciones singulares

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (con Z singular): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos* y *equisingulares* $\Longrightarrow$ Z^t homeomorfo a Z.

Equisingular$\Longleftrightarrow$Se mantienen las combinaciones convexas que dan lugar $\mathbf{0}$



Alisamientos

Deformaciones singulares

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (con Z singular): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos* y *equisingulares* $\Longrightarrow$ Z^t homeomorfo a Z.

Equisingular$\Longleftrightarrow$Se mantiene la combinatoria extendida del politopo



Alisamientos

Alisamientos

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (Z con singularidades genéricas): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos y lisos.* Posibles tipos topológico de Z^t.



Alisamientos

Alisamientos

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (Z con singularidades genéricas): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos y lisos.* Posibles tipos topológico de Z^t.

Topología local de los alisamientos en torno a las singularidades

$\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}^m)^n$, $d = n - m - 1 = p + q - 1$, con una singularidad genérica: copias de 2^m de Cono$(\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{q-1})$



Alisamientos

Alisamientos

$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (Z con singularidades genéricas): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos y lisos.* Posibles tipos topológico de Z^t.

Topología local de los alisamientos en torno a las singularidades

$\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}^m)^n$, $d = n - m - 1 = p + q - 1$, con una singularidad genérica: copias de 2^m de Cono$(\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{q-1})$

- $\overline{\mathbb{B}}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$
- $\mathbb{S}^{p-1} \times \overline{\mathbb{B}}^q$



Alisamientos

Alisamientos

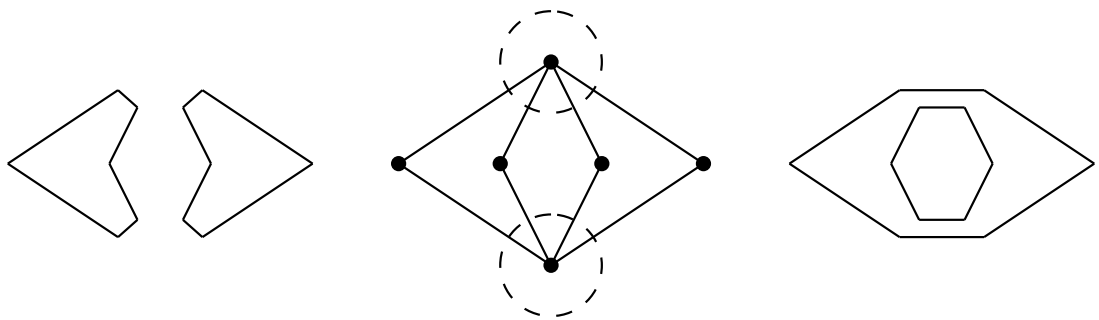
$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (Z con singularidades genéricas): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos y lisos.* Posibles tipos topológico de Z^t.

Topología local de los alisamientos en torno a las singularidades

$\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}^m)^n$, $d = n - m - 1 = p + q - 1$, con una singularidad genérica: copias de 2^m de Cono$(\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{q-1})$

- $\overline{\mathbb{B}}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$
- $\mathbb{S}^{p-1} \times \overline{\mathbb{B}}^q$

Ejemplo





Alisamientos

Alisamientos

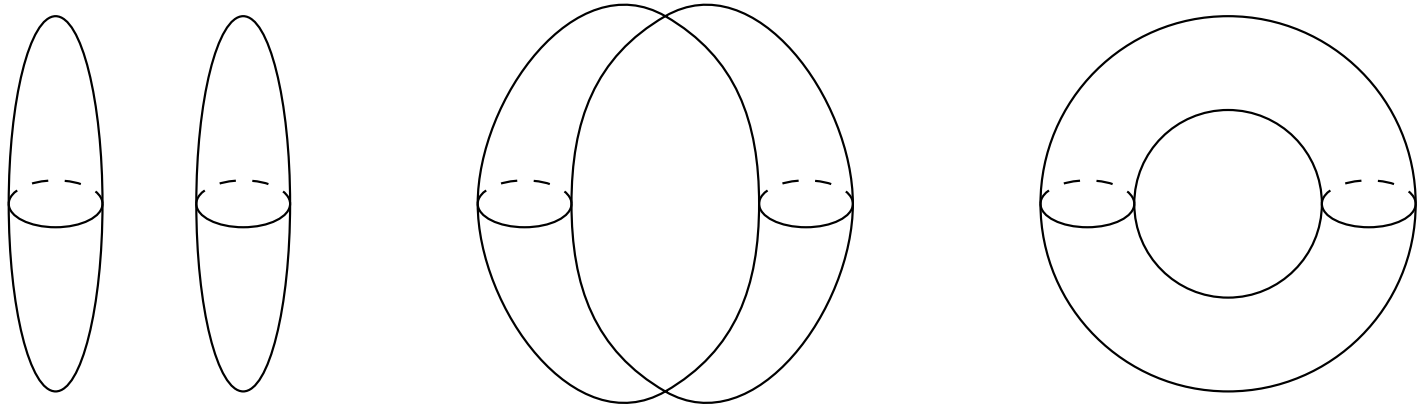
$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (Z con singularidades genéricas): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos y lisos.* Posibles tipos topológico de Z^t.

Topología local de los alisamientos en torno a las singularidades

$\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}^m)^n$, $d = n - m - 1 = p + q - 1$, con una singularidad genérica: copias de 2^m de Cono$(\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{q-1})$

- $\overline{\mathbb{B}}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$
- $\mathbb{S}^{p-1} \times \overline{\mathbb{B}}^q$

Ejemplo



Alisamientos

Alisamientos

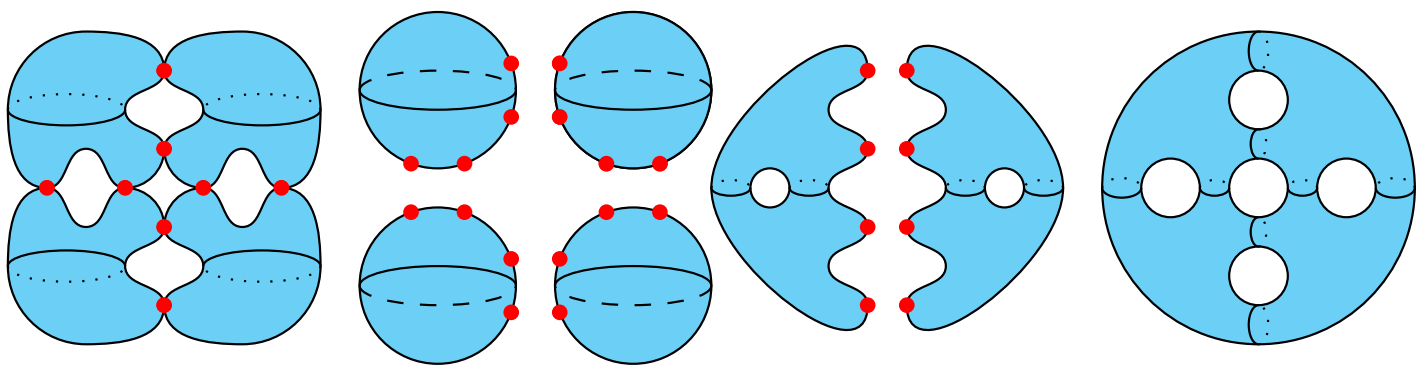
$\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ (Z con singularidades genéricas): $\mathcal{A}^t = (A_1^t, \ldots, A_n^t)$ *cercanos y lisos.* Posibles tipos topológico de Z^t.

Topología local de los alisamientos en torno a las singularidades

$\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}^m)^n$, $d = n - m - 1 = p + q - 1$, con una singularidad genérica: copias de 2^m de Cono$(\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{S}^{q-1})$

- $\overline{\mathbb{B}}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$
- $\mathbb{S}^{p-1} \times \overline{\mathbb{B}}^q$

Ejemplo



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$
  - n caras: Intersección con los hiperplanos coordenados.



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$
  - n caras: Intersección con los hiperplanos coordenados.
  - Vértices simples: *link* es un triángulo



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$
  - n caras: Intersección con los hiperplanos coordenados.
  - Vértices simples: *link* es un triángulo
  - Vértices con *link* un cuadrilátero



Singularidades genéricas en dimensión 3

- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$
  - n caras: Intersección con los hiperplanos coordenados.
  - Vértices simples: *link* es un triángulo
  - Vértices con *link* un cuadrilátero
- P: orbifold espejado, $\rho : Z \to P$ $(\mathbb{Z}/2)^n$-cubierta orbifold



Singularidades genéricas en dimensión 3

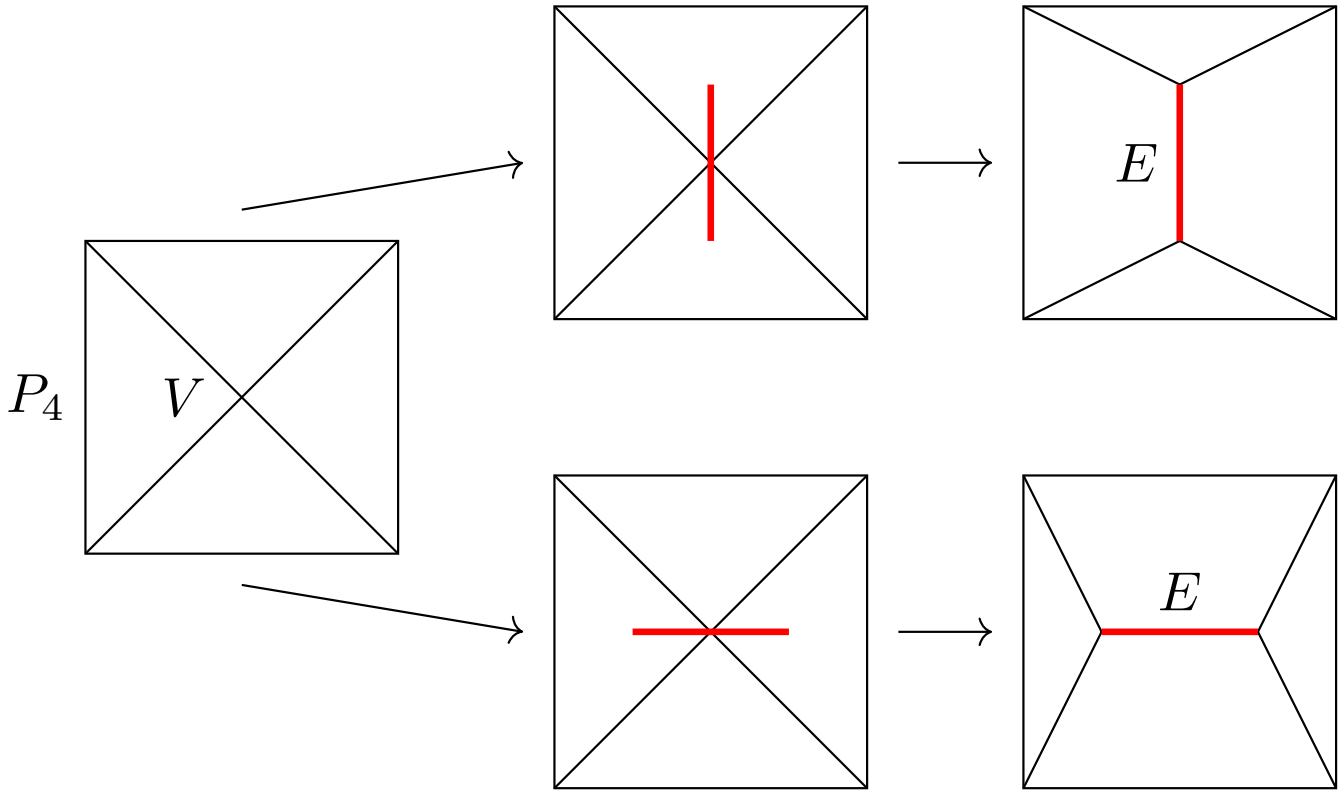
- Dos tipos: $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$, $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^2)$: $\overline{\mathbb{B}}^1 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^0 \times \overline{\mathbb{B}}^3$
- Alisamientos $\mathrm{Cono}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$: $\overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{B}}^2$
- Cambio de alisamiento: 0-cirugía.

$(1,1)$-singularidades genéricas

- $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \subset (\mathbb{R}^{n-4})^n$: $A_1, \ldots, A_{n-4} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \{0\}$
- $A_{n-3}, A_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{<0}$, $A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}^{n-5} \times \mathbb{R}_{>0}$
- Politopo $P \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$
  - n caras: Intersección con los hiperplanos coordenados.
  - Vértices simples: *link* es un triángulo
  - Vértices con *link* un cuadrilátero
- P: orbifold espejado, $\rho : Z \to P$ $(\mathbb{Z}/2)^n$-cubierta orbifold
- $\check{P} := P \setminus \{\text{4-vértices}\}$, $\check{Z} := \rho^{-1}(\check{P})$ variedad lisa (con finales tóricos)



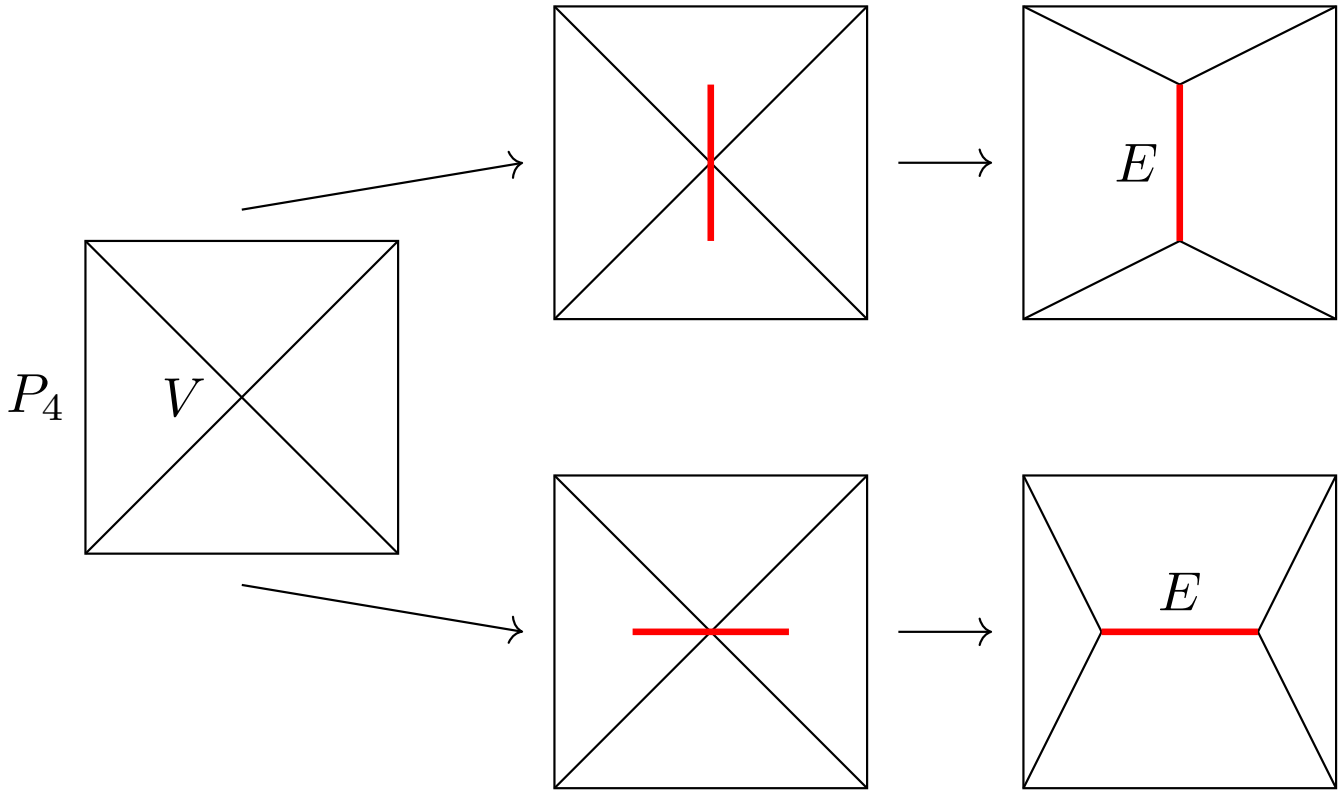
Pirámide cuadrangular



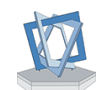
- $Z = \Sigma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$



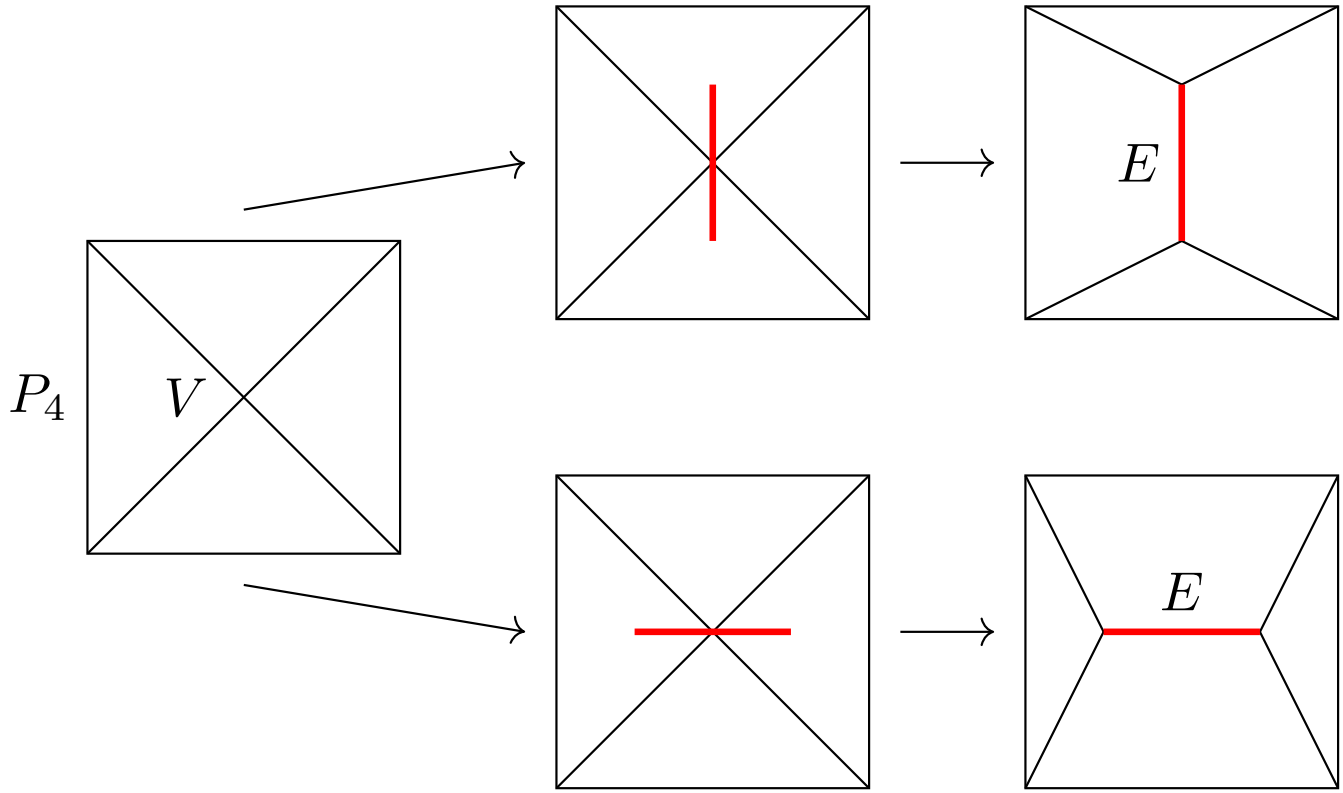
Pirámide cuadrangular



- $Z = \Sigma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- $\check{Z} = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$



Pirámide cuadrangular

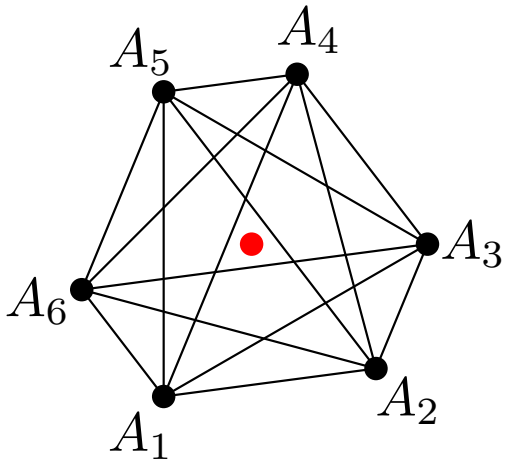


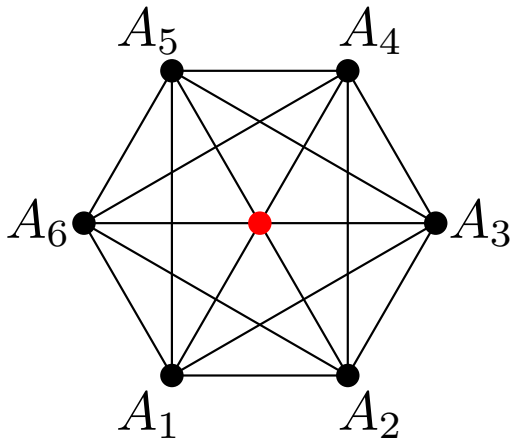
- $Z = \Sigma(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$
- $\check{Z} = (-1, 1) \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
- Dos alisamientos: $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\text{0-cirugía en fibra}} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

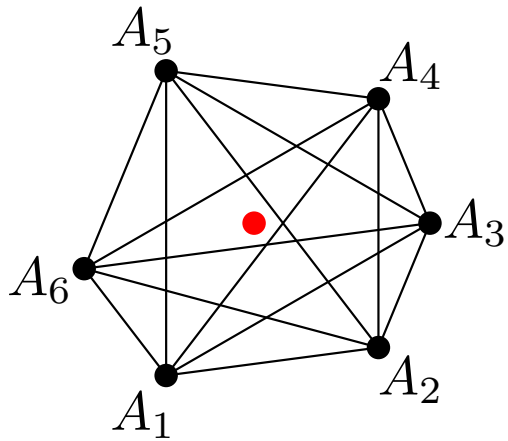


Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde $\mathcal{A}$







Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

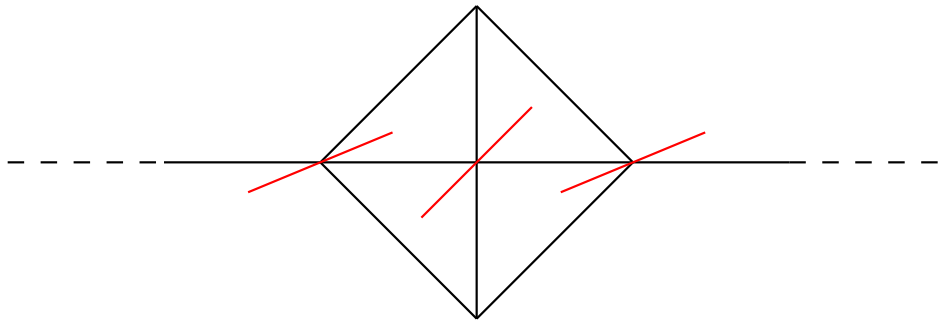
- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$

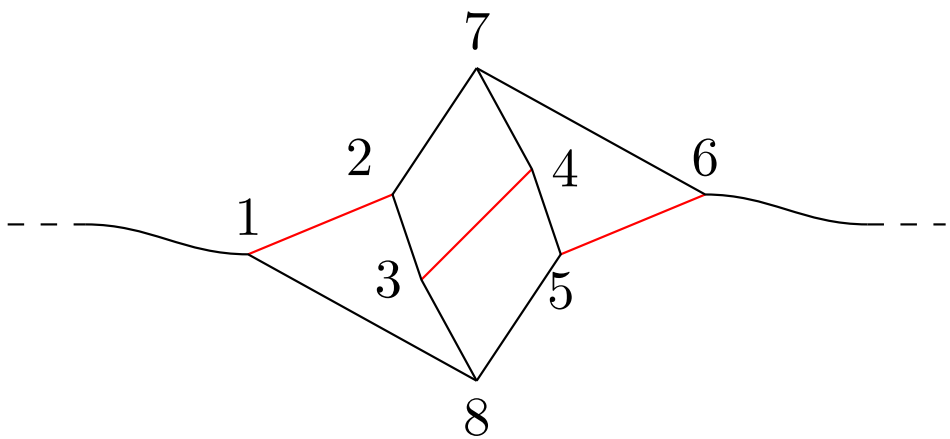


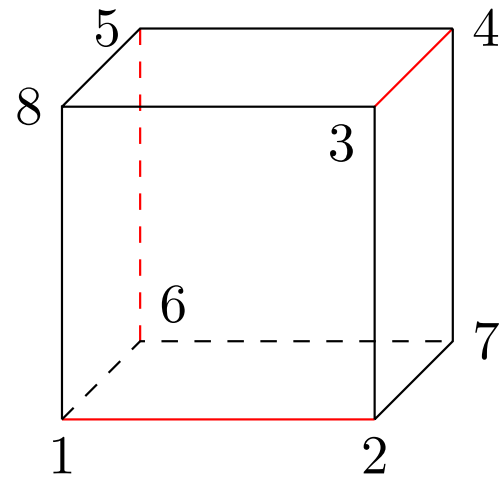
Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$









Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

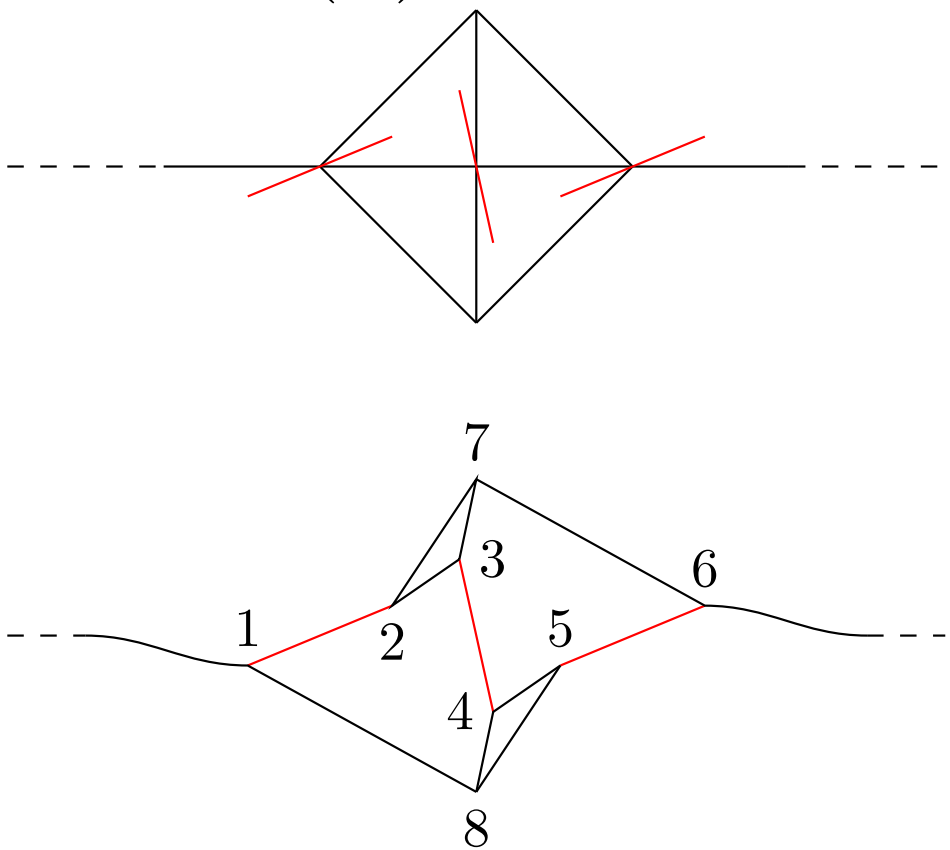
- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$

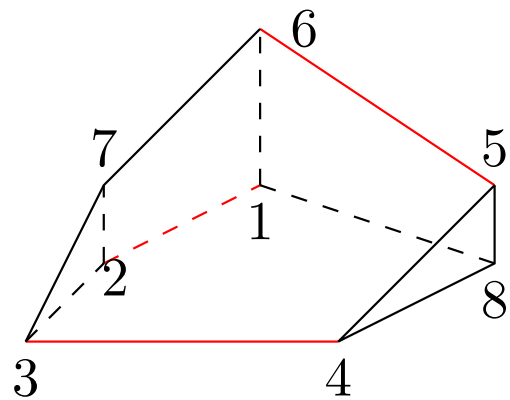


Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$





Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$
- T_2 libro pentagonal o tetraedro bitruncado: $Z = 5\#\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$



Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$
- T_2 libro pentagonal o tetraedro bitruncado: $Z = 5\#\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Proposición (López de Medrano, Bosio-Meersseman)

P 3-politopo simple, $P_{\mathrm{sf}}(v)$ truncado en v, m caras

$$Z(P_{\mathrm{sf}}(v)) \cong Z(P)\#Z(P)\#(2^{m-3}-1)(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$



Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$
- T_2 libro pentagonal o tetraedro bitruncado: $Z = 5\#\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Proposición (López de Medrano, Bosio-Meersseman)

P 3-politopo simple, $P_{\mathrm{sf}}(v)$ truncado en v, m caras

$$Z(P_{\mathrm{sf}}(v)) \cong Z(P)\#Z(P)\#(2^{m-3}-1)(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Demostración.

- Truncar: quitar 2^{m-3} bolas de $Z(P)$



Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$
- T_2 libro pentagonal o tetraedro bitruncado: $Z = 5\#\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Proposición (López de Medrano, Bosio-Meersseman)

P 3-politopo simple, $P_{\mathrm{sf}}(v)$ truncado en v, m caras

$$Z(P_{\mathrm{sf}}(v)) \cong Z(P)\#Z(P)\#(2^{m-3}-1)(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Demostración.

- Truncar: quitar 2^{m-3} bolas de $Z(P)$
- Reflejar nueva cara: duplicar y conectar.



Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$
- T_2 libro pentagonal o tetraedro bitruncado: $Z = 5\#\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Proposición (López de Medrano, Bosio-Meersseman)

P 3-politopo simple, $P_{\mathrm{sf}}(v)$ truncado en v, m caras

$$Z(P_{\mathrm{sf}}(v)) \cong Z(P)\#Z(P)\#(2^{m-3}-1)(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Demostración.

- Truncar: quitar 2^{m-3} bolas de $Z(P)$
- Reflejar nueva cara: duplicar y conectar.
- Primera conexión: $Z(P)\#Z(P)$



Bipirámide triangular B_3

Alisamientos vistos desde B_3

- $8 = 2^3$ alisamientos, acción de $\mathfrak{S}_3 = \operatorname{Aut} B_3$
- C cubo: $Z = (\mathbb{S}^1)^3$
- T_2 libro pentagonal o tetraedro bitruncado: $Z = 5\#\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

Proposición (López de Medrano, Bosio-Meersseman)

P 3-politopo simple, $P_{\mathrm{sf}}(v)$ truncado en v, m caras

$$Z(P_{\mathrm{sf}}(v)) \cong Z(P)\#Z(P)\#(2^{m-3}-1)(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1).$$

Demostración.

- Truncar: quitar 2^{m-3} bolas de $Z(P)$
- Reflejar nueva cara: duplicar y conectar.
- Primera conexión: $Z(P)\#Z(P)$
- Resto: $\#\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$



Bipirámide triangular: $\pi_1, \pi_1^{\mathrm{orb}}$

- $\pi_1^{\mathrm{orb}}(P) = (\mathbb{Z}/2)^6 \Longrightarrow \pi_1(Z) = 1$



Bipirámide triangular: $\pi_1, \pi_1^{\mathrm{orb}}$

- $\pi_1^{\mathrm{orb}}(P) = (\mathbb{Z}/2)^6 \Longrightarrow \pi_1(Z) = 1$
- $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\check{P}) = \langle x_i, y_i \mid [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, y_i] = 1 \rangle$



Bipirámide triangular: $\pi_1, \pi_1^{\mathrm{orb}}$

- $\pi_1^{\mathrm{orb}}(P) = (\mathbb{Z}/2)^6 \Longrightarrow \pi_1(Z) = 1$
- $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\check{P}) = \langle x_i, y_i \mid [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, y_i] = 1 \rangle$
- Las cubiertas orbifold M_6 asociadas a ρ_j

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathrm{orb}}(P) & \xrightarrow{\rho_6} & (\mathbb{Z}/2)^6 \\ x_i, y_i & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1^{\mathrm{orb}}(P) & \xrightarrow{\rho_3} & (\mathbb{Z}/2)^3 \\ (x_i, y_i) & \longmapsto & (e_i, e_{i+1}) \end{array}$$

cumplen $\check{Z} = M_6 \to M_3 \to P$.

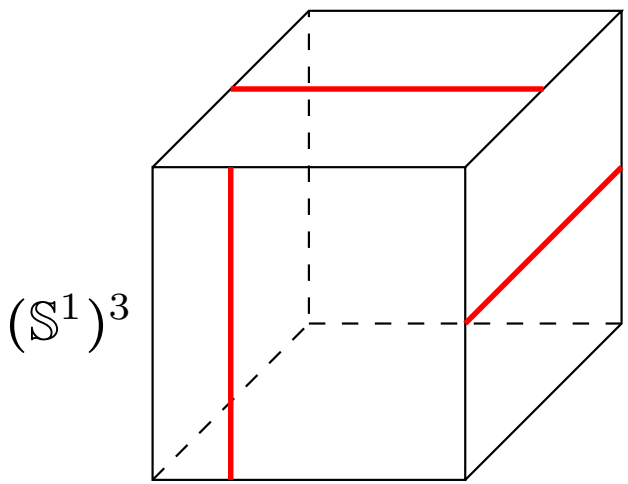


Bipirámide triangular: $\pi_1, \pi_1^{\text{orb}}$

- $\pi_1^{\text{orb}}(P) = (\mathbb{Z}/2)^6 \Longrightarrow \pi_1(Z) = 1$
- $\pi_1^{\text{orb}}(\check{P}) = \langle x_i, y_i \mid [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, y_i] = 1 \rangle$
- Las cubiertas orbifold M_6 asociadas a ρ_j

$$\pi_1^{\text{orb}}(P) \xrightarrow{\rho_6} (\mathbb{Z}/2)^6 \qquad \pi_1^{\text{orb}}(P) \xrightarrow{\rho_3} (\mathbb{Z}/2)^3$$
$$x_i, y_i \longmapsto 1 \qquad (x_i, y_i) \longmapsto (e_i, e_{i+1})$$

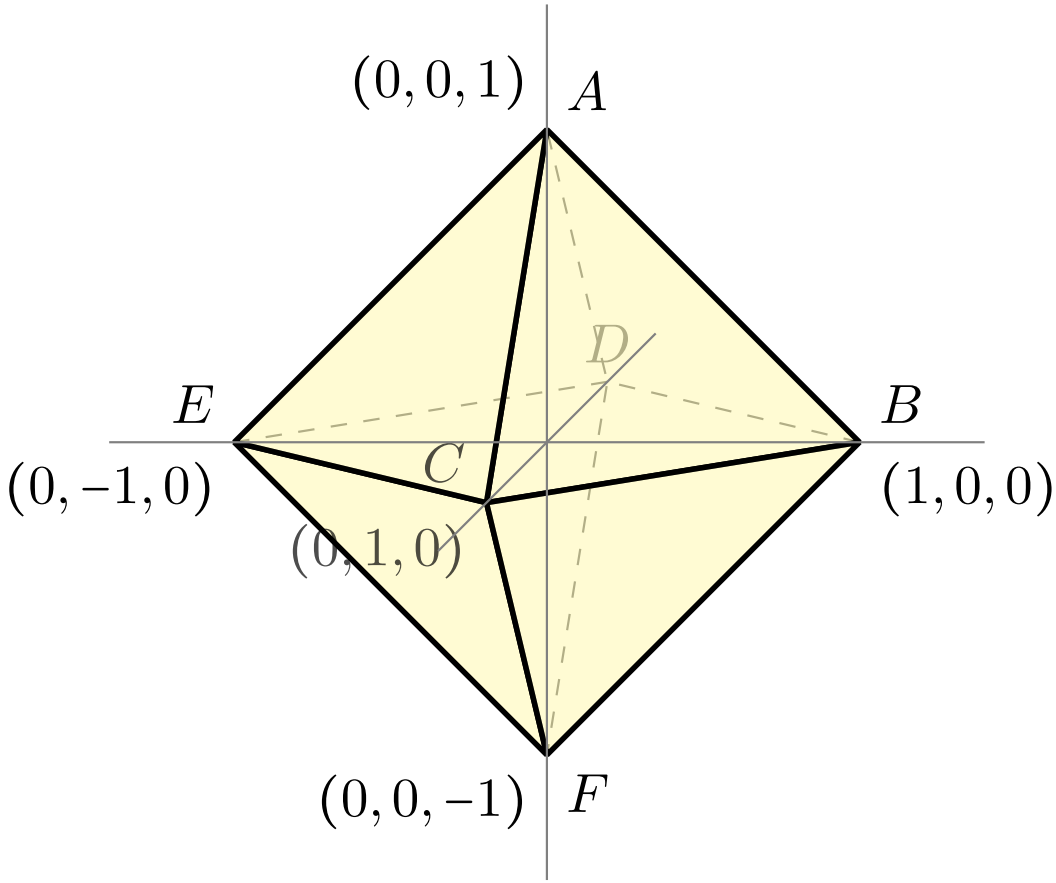
cumplen $\check{Z} = M_6 \to M_3 \to P$.



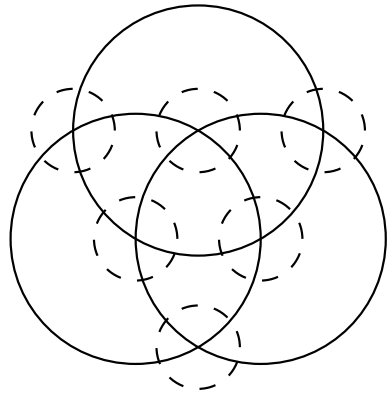
$(\mathbb{S}^1)^3 \setminus K = M_3$

Octaedro

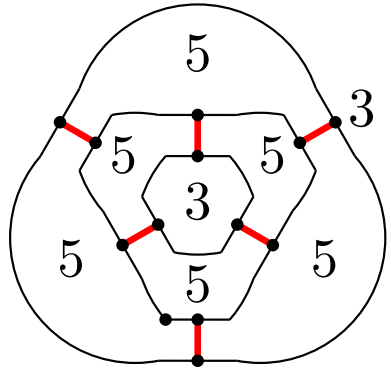
Cara 1: ABC
Cara 2: ABD
Cara 3: ADE
Cara 4: ACE
Cara 5: BDF
Cara 6: BCF
Cara 7: CEF
Cara 8: DEF



Octaedro



Octaedro



Octaedro

- $64 = 2^6$ alisamientos



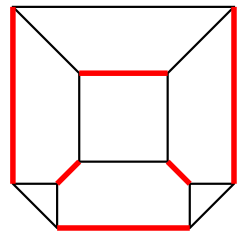
Octaedro

- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Acción del grupo de automorfismos del octaedro (orden 48)



Octaedro

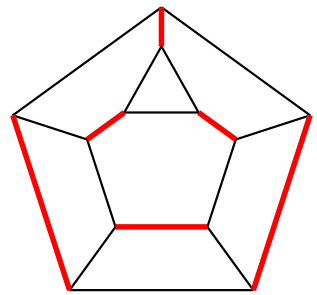
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$





Octaedro

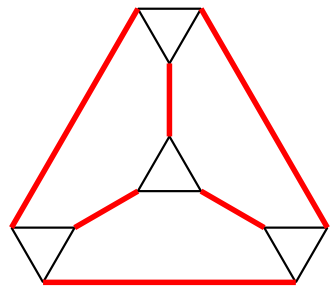
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$





Octaedro

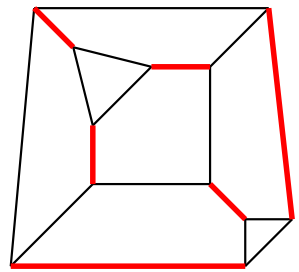
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$

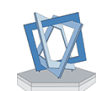




Octaedro

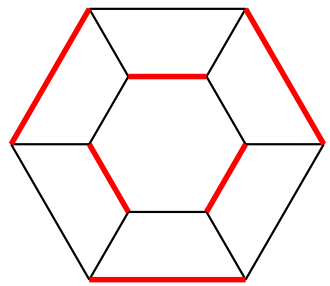
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$





Octaedro

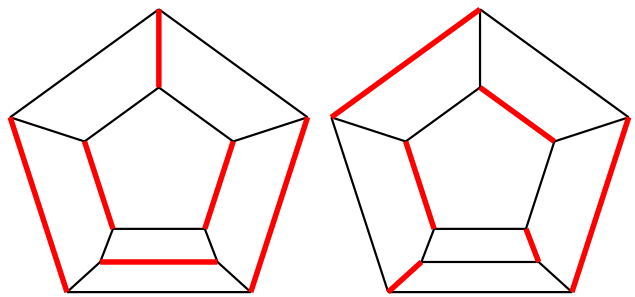
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$

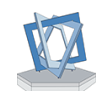




Octaedro

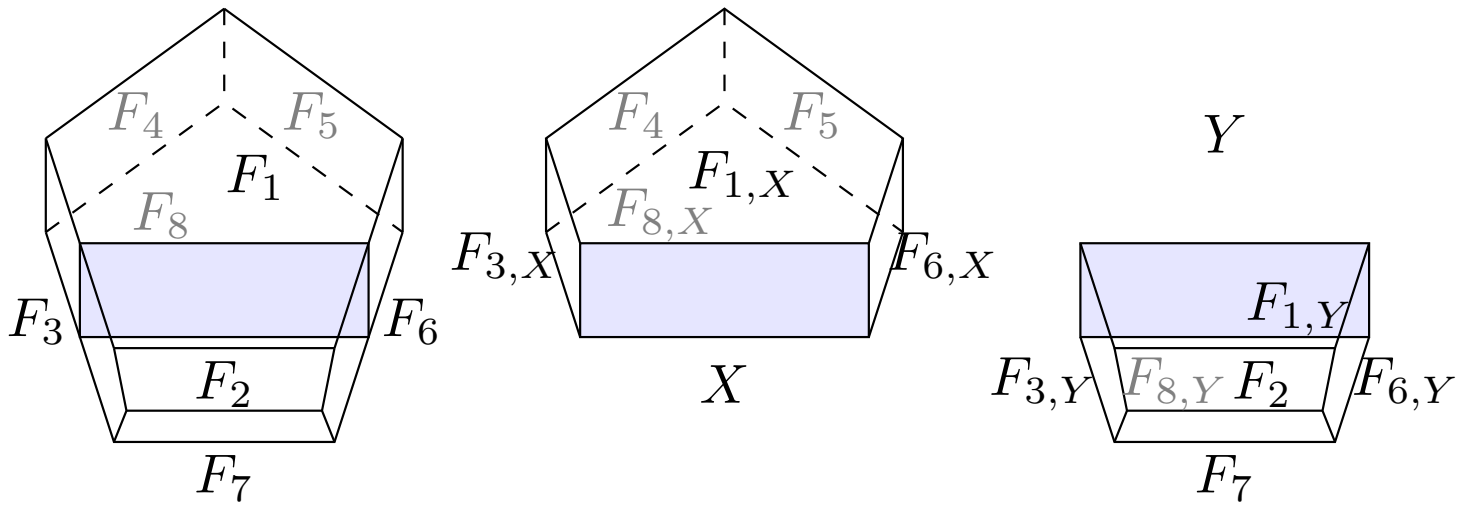
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$
- Girobipentaprisma:





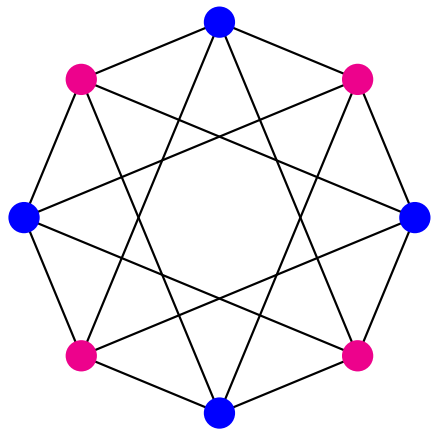
Octaedro

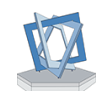
- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$
- Girobipentaprisma:



Octaedro

- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$
- Girobipentaprisma: Z variedad de grafo





Octaedro

- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$
- Girobipentaprisma: Z borde del entorno regular de cuatro fibras y cuatro secciones en $E_1 \times E_2$, E_i curvas elípticas



Octaedro

- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$
- Girobipentaprisma: Z borde del entorno regular de cuatro fibras y cuatro secciones en $E_1 \times E_2$, E_i curvas elípticas
- $\pi_1(Z) = \mathbb{Z}^4$



Octaedro

- $64 = 2^6$ alisamientos, 7 órbitas de alisamientos
- Cubo bitruncado en la base: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Escutoide: $Z = 2(\mathcal{S}_5 \times \mathbb{S}^1)\#15(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Tetraedro truncado: $Z = 49\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Sólido de Durero: $Z = 4(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)\#29(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$
- Prisma hexagonal: $Z = \mathcal{S}_{17} \times \mathbb{S}^1$
- Girobipentaprisma: Z borde del entorno regular de cuatro fibras y cuatro secciones en $E_1 \times E_2$, E_i curvas elípticas
- $\pi_1(Z) = \mathbb{Z}^4$
- $\check{P}$: orbifold hiperbólica completa, $\check{Z}$ variedad con 96 finales tóricos con métrica hiperbólica completa



Gracias por su atención

Gracias a la RET

