Conjetura de Yano, polinomio de Bernstein e integrales impropias

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

Seminario Rubio de Francia
Zaragoza, 25 de Febrero 2016

Trabajo con P. Cassou-Noguès, I. Luengo y A. Melle, arxiv:1602.07248

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, $f > 0$ en $[0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b}\, \frac{dx}{x}$$

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, $f > 0$ en $[0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$\left| \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b} dx \right| \leq \int_0^1 f^{\Re s}(x)\, x^{a\Re s+b} \frac{dx}{x} \leq M_s \int_0^1 x^{a\Re s+b} \frac{dx}{x}$$

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, $f>0$ en $[0,1]$, $a,b\in\mathbb{N}$

$$s\in U\subset\mathbb{C}\xrightarrow{\mathcal{I}}\int_0^1 f^s(x)\,x^{as+b}\,\frac{dx}{x}$$

$$\left|\int_0^1 f^s(x)\,x^{as+b}dx\right|\leq\int_0^1 f^{\Re s}(x)\,x^{a\Re s+b}\,\frac{dx}{x}\leq M_s\int_0^1 x^{a\Re s+b}\,\frac{dx}{x}$$

$$\Re s>-\tfrac{b}{a}$$

Holomorfa si $\Re s>-\frac{b}{a}$

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, $f > 0$ en $[0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + x g_s(x) \Longrightarrow \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x)\, x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

$\Re s > -\frac{b}{a}$

Holomorfa si $\Re s > -\frac{b}{a}$

Integrales impropias: una variable

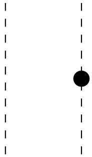
Hipótesis

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, $f > 0$ en $[0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + x g_s(x) \Longrightarrow \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x)\, x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

Continuación meromorfa a $\Re s > -\frac{b+1}{a}$ con polo en $-\frac{b}{a}$



$\Re s > -\frac{b+1}{a}$

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ función $\mathcal{C}^\infty$, $f > 0$ en $[0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b}\, \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + x g_s(x) \Longrightarrow \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x)\, x^{as+b+1}\, \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos de orden 1

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x]$, $f > 0$ en $(0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + x g_s(x) \Longrightarrow \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x)\, x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos de orden 1

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

$f \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}[x]$, $f > 0$ en $(0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x)\, x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x) = f^s(0) + x g_s(x) \Longrightarrow \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x)\, x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos de orden 1 y residuos algebraicos

Integrales impropias: una variable

Hipótesis

f, g $\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$-analíticas para $x^{\frac{1}{N}}$ en $[0,1]$, $f > 0$ en $(0,1]$, $a, b \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 f^s(x) g(x)\, x^{as+b} \frac{dx}{x}$$

$$f^s(x)g(x) = f^s(0)g(0) + x g_s(x) \Rightarrow \mathcal{I}(s) = \frac{f^s(0)g(0)}{as+b} + \int_0^1 g_s(x)\, x^{as+b+1} \frac{dx}{x}$$

Conclusión

$\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos de orden 1 y residuos algebraicos

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x,y]$, $f > 0$ en $[0,1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \overset{\mathcal{I}}{\longmapsto} \int_0^1\int_0^1 f^s(x,y)\, x^{a_1 s+b_1} y^{a_2 s+b_2} \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0, 1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y)\, x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Conclusión

- $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x, y]$, $f > 0$ en $[0,1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y)\, x^{a_1 s + b_1}\, y^{a_2 s + b_2}\, \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

Conclusión

- $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos
- Orden de los polos a lo más dos (uno *casi siempre*)

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x,y]$, $f > 0$ en $[0,1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1\int_0^1 f^s(x,y)\, x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Conclusión

- $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos
- Orden de los polos a lo más dos (uno *casi siempre*)
- Aunque $\mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$ los residuos pueden ser trascendentes.

Integrales impropias: dos variables

Hipótesis

$f \in \mathbb{R}[x,y]$, $f > 0$ en $[0,1]^2$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$

$$s \in U \subset \mathbb{C} \xmapsto{\mathcal{I}} \int_0^1\int_0^1 f^s(x,y)\, x^{a_1 s + b_1} y^{a_2 s + b_2} \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Conclusión

- $\mathcal{I}(s)$ meromorfa con polos en racionales negativos
- Orden de los polos a lo más dos (uno *casi siempre*)
- Aunque $\mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$ los residuos pueden ser trascendentes.

Pregunta

¿Qué ocurre si $f > 0$ en $[0,1]^2 \setminus \{(0,0)\}$? Estudiar f *cerca* del origen.

Ejemplo

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x^4+y^5+tx^2y^3\right)^s x^{\beta_1}y^{\beta_2}\,\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y}$$

Ejemplo

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x^4 + y^5 + tx^2y^3\right)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \underset{y\mapsto y^4}{\overset{x\mapsto x^5}{=}}$$

$$20\int_0^1\int_0^1 \left(x^{20} + y^{20} + tx^{10}y^{12}\right)^s x^{5\beta_1} y^{4\beta_2} \frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Ejemplo

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x^4+y^5+tx^2y^3\right)^s x^{\beta_1} y^{\beta_2}\,\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y} \underset{y\mapsto y^4}{\overset{x\mapsto x^5}{=}}$$

$$20\int_0^1\int_0^1 \left(x^{20}+y^{20}+tx^{10}y^{12}\right)^s x^{5\beta_1} y^{4\beta_2}\,\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y} = 20\left(\overset{\mathcal{I}_1}{\int_{\triangle}} + \overset{\mathcal{I}_2}{\int_{\bigtriangledown}}\right)$$

Ejemplo

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x^4+y^5+tx^2y^3\right)^s x^{\beta_1}y^{\beta_2}\,\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y} \overset{x\mapsto x^5}{\underset{y\mapsto y^4}{=}}$$

$$20\int_0^1\int_0^1 \left(x^{20}+y^{20}+tx^{10}y^{12}\right)^s x^{5\beta_1}y^{4\beta_2}\,\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y} = 20\left(\overbrace{\int_{\triangle}}^{\mathcal{I}_1}+\overbrace{\int_{\triangledown}}^{\mathcal{I}_2}\right)$$

$$\mathcal{I}_1 \overset{y\mapsto xy}{=} \int_0^1\int_0^1 \left(1+y^{20}+tx^2y^{12}\right)^s x^{20s+5\beta_1+4\beta_2}y^{4\beta_2}\,\frac{dx}{x}\,\frac{dy}{y}$$

Ejemplo

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x^4+y^5+tx^2y^3\right)^s x^{\beta_1}y^{\beta_2}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \overset{x\mapsto x^5}{\underset{y\mapsto y^4}{=}}$$

$$20\int_0^1\int_0^1 \left(x^{20}+y^{20}+tx^{10}y^{12}\right)^s x^{5\beta_1}y^{4\beta_2}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} = 20\left(\overbrace{\int_{\triangle}}^{\mathcal{I}_1}+\overbrace{\int_{\triangledown}}^{\mathcal{I}_2}\right)$$

$$\mathcal{I}_1 \overset{y\mapsto xy}{=} \int_0^1\int_0^1 \left(1+y^{20}+tx^2y^{12}\right)^s x^{20s+5\beta_1+4\beta_2}y^{4\beta_2}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Polos:

$$-\frac{5\beta_1+4\beta_2+k}{20}$$

Ejemplo

$$\int_0^1\int_0^1 \left(x^4+y^5+tx^2y^3\right)^s x^{\beta_1}y^{\beta_2}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} \underset{y\mapsto y^4}{\overset{x\mapsto x^5}{=}}$$

$$20\int_0^1\int_0^1 \left(x^{20}+y^{20}+tx^{10}y^{12}\right)^s x^{5\beta_1}y^{4\beta_2}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y} = 20\left(\overset{\mathcal{I}_1}{\int_{\triangle}} + \overset{\mathcal{I}_2}{\int_{\nabla}}\right)$$

$$\mathcal{I}_1 \overset{y\mapsto xy}{=} \int_0^1\int_0^1 \left(1+y^{20}+tx^2y^{12}\right)^s x^{20s+5\beta_1+4\beta_2}y^{4\beta_2}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Polos:

$$-\frac{5\beta_1+4\beta_2+k}{20}$$

Residuos

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{B}\left(\frac{\beta_1}{4},\frac{\beta_2}{5}\right)}{20} & \text{si } k=0 \\ A+t\dfrac{11\mathbf{B}\left(\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right)}{400} & \text{si } \beta_i=1, k=2 \end{cases}$$

Singularidades de curvas planas

- $f(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ irreducible

Singularidades de curvas planas

- $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irreducible
- Ejemplo: $(y - x^2)^2 - x^5$

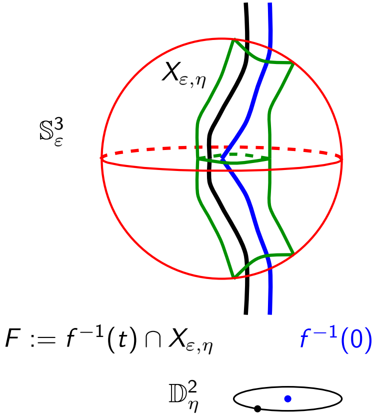
Singularidades de curvas planas

- $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irreducible
- Ejemplo: $(y - x^2)^2 - x^5$
- $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$

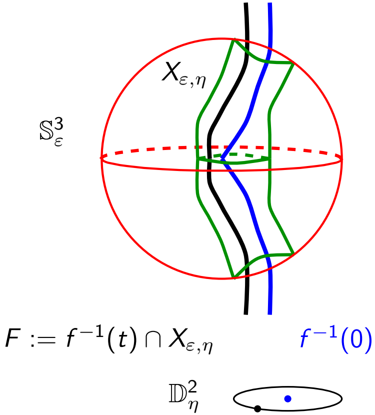
Singularidades de curvas planas

- $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irreducible
- Ejemplo: $(y - x^2)^2 - x^5$
- $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$
- $y = \overset{\text{exp. } \mathbb{Z}}{\cdots} + *x^{\frac{m_1}{n_1}} + \overset{\text{exp. } \frac{1}{n_1}\mathbb{Z}}{\cdots} + *x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \cdots + *x^{\frac{m_g}{n_1 \cdot \cdots \cdot n_g}} + \overset{\text{exp. } \frac{1}{n_1 \cdot \cdots \cdot n_g}\mathbb{Z}}{\cdots}$

Singularidades de curvas planas

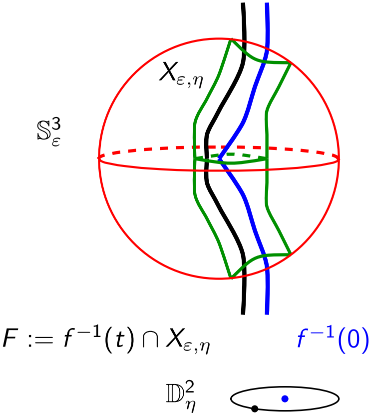


Singularidades de curvas planas



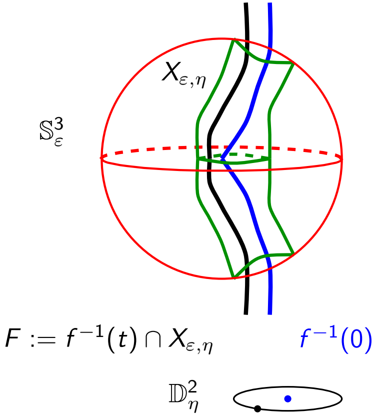
- F superficie compacta de género h con una componente en el borde.

Singularidades de curvas planas



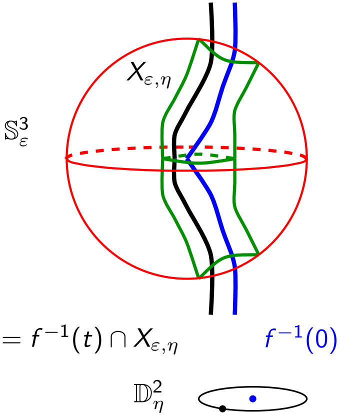
- F superficie compacta de género h con una componente en el borde.
- $\rho : F \to F$ monodromía

Singularidades de curvas planas



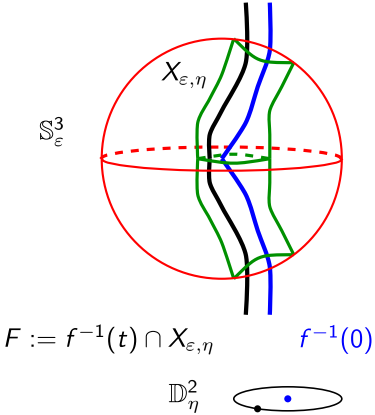
- F superficie compacta de género h con una componente en el borde.
- $\rho : F \to F$ monodromía
- $\rho^* : H^1(F;\mathbb{C}) \to \overset{\dim_{\mathbb{C}=\mu}}{H^1(F;\mathbb{C})}$ semisimple

Singularidades de curvas planas



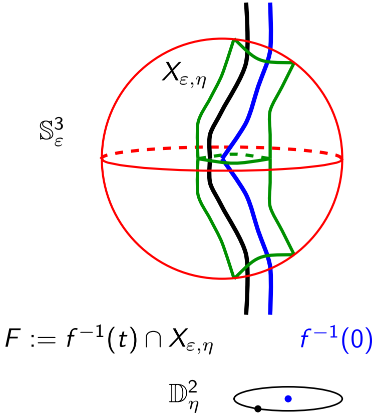
- F superficie compacta de género h con una componente en el borde.
- $\rho : F \to F$ monodromía
- $\rho^* : H^1(F;\mathbb{C}) \to \overset{\dim_{\mathbb{C}=\mu}}{H^1(F;\mathbb{C})}$ semisimple
- Raíces del polinomio característico: $\exp 2i\pi r$, $r \in \mathbb{Q}$.

Singularidades de curvas planas



- F superficie compacta de género h con una componente en el borde.
- $\rho : F \to F$ monodromía
- $\rho^* : H^1(F;\mathbb{C}) \to \overset{\dim_{\mathbb{C}=\mu}}{H^1(F;\mathbb{C})}$ semisimple
- Raíces del polinomio característico: $\exp 2i\pi r$, $r \in \mathbb{Q}$.
- Solo dependen de $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_g}{n_g}$

Singularidades de curvas planas



- F superficie compacta de género h con una componente en el borde.
- $\rho : F \to F$ monodromía
- $\rho^* : H^1(F;\mathbb{C}) \to \overset{\dim_{\mathbb{C}=\mu}}{H^1(F;\mathbb{C})}$ semisimple
- Raíces del polinomio característico: $\exp 2i\pi r$, $r \in \mathbb{Q}$.
- Solo dependen de $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_g}{n_g}$
- $y^4 - x^5 \Rightarrow \dfrac{(t^{20}-1)(t-1)}{(t^4-1)(t^5-1)}$

Polinomio de Bernstein

Operadores diferenciales

$$P = \sum_{i,j,k,\ell,m} a_{i,j,k,\ell,m} s^k x^\ell y^m \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}$$

Polinomio de Bernstein

Operadores diferenciales

$$P = \sum_{i,j,k,\ell,m} a_{i,j,k,\ell,m} s^k x^\ell y^m \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}$$

Polinomio de Bernstein

Mínimo polinomio tal que existe P verificando $P \cdot f^{s+1} = b_f(s) \cdot f^s$

Polinomio de Bernstein

Operadores diferenciales

$$P = \sum_{i,j,k,\ell,m} a_{i,j,k,\ell,m} s^k x^\ell y^m \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}$$

Polinomio de Bernstein

Mínimo polinomio tal que existe P verificando $P \cdot f^{s+1} = b_f(s) \cdot f^s$

Polinomio de Bernstein reducido

$b_f(s) = (s+1)\tilde{b}_f(s)$ polinomio reducido.

Polinomio de Bernstein

Operadores diferenciales

$$P = \sum_{i,j,k,\ell,m} a_{i,j,k,\ell,m} s^k x^\ell y^m \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}$$

Polinomio de Bernstein

Mínimo polinomio tal que existe P verificando $P \cdot f^{s+1} = b_f(s) \cdot f^s$

Polinomio de Bernstein reducido

$b_f(s) = (s+1)\tilde{b}_f(s)$ polinomio reducido.

$\boxed{\text{Muy difícil de calcular}}$

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

- $f = y^4 + x^5$: $-\frac{31}{20}$ es raíz

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

- $f = y^4 + x^5$: $-\frac{31}{20}$ es raíz
- $f = y^4 + x^5 + x^3y^2$: $-\frac{11}{20}$ es raíz

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

- $f = y^4 + x^5$: $-\frac{31}{20}$ es raíz
- $f = y^4 + x^5 + x^3y^2$: $-\frac{11}{20}$ es raíz
- $\mathcal{V}$ variedad analítica que contiene todos los tipos analíticos de los gérmenes $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_g}{n_g}$ (irreducible)

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

- $f = y^4 + x^5$: $-\frac{31}{20}$ es raíz
- $f = y^4 + x^5 + x^3y^2$: $-\frac{11}{20}$ es raíz
- $\mathcal{V}$ variedad analítica que contiene todos los tipos analíticos de los gérmenes $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_g}{n_g}$ (irreducible)
- Admite una estratificación analítica: en cada estrato $b_f(s)$ es constante.

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

- $f = y^4 + x^5$: $-\frac{31}{20}$ es raíz
- $f = y^4 + x^5 + x^3y^2$: $-\frac{11}{20}$ es raíz
- $\mathcal{V}$ variedad analítica que contiene todos los tipos analíticos de los gérmenes $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_g}{n_g}$ (irreducible)
- Admite una estratificación analítica: en cada estrato $b_f(s)$ es constante.
- $b(s)$ polinomio genérico (en un abierto denso $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$).

b-exponentes

- $\dim_{\mathbb{C}} H = \mu$, $\tilde{\rho} : H \to H$ tal que $\exp 2i\pi\tilde{\rho} = \rho^{-1}$.
- $r_1, \ldots, r_\mu$ valores propios (en $\mathbb{Q}$): b-exponentes.
- $\tilde{b}_f(s)$ polinomio mínimo de $-\tilde{\rho}$.

Más propiedades del polinomio de Bernstein

- $f = y^4 + x^5$: $-\frac{31}{20}$ es raíz
- $f = y^4 + x^5 + x^3y^2$: $-\frac{11}{20}$ es raíz
- $\mathcal{V}$ variedad analítica que contiene todos los tipos analíticos de los gérmenes $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_g}{n_g}$ (irreducible)
- Admite una estratificación analítica: en cada estrato $b_f(s)$ es constante.
- $b(s)$ polinomio genérico (en un abierto denso $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$).
- El cálculo de $b_f(s)$ se complica si f tiene *muchos* monomios.

Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Comentarios

- Si ρ no tiene valores propios múltiples es una conjetura sobre $b(s)$.

Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Comentarios

- Si ρ no tiene valores propios múltiples es una conjetura sobre $b(s)$.
- La conjetura es cierta para $g = 1$ (P. Cassou-Noguès, 1986) y en algunos casos particulares.

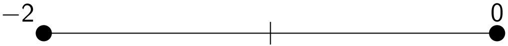
Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Comentarios

- Si ρ no tiene valores propios múltiples es una conjetura sobre $b(s)$.
- La conjetura es cierta para $g = 1$ (P. Cassou-Noguès, 1986) y en algunos casos particulares.



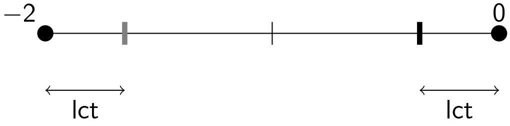
Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Comentarios

- Si ρ no tiene valores propios múltiples es una conjetura sobre $b(s)$.
- La conjetura es cierta para $g = 1$ (P. Cassou-Noguès, 1986) y en algunos casos particulares.



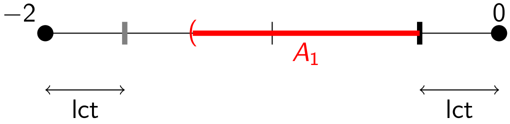
Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Comentarios

- Si ρ no tiene valores propios múltiples es una conjetura sobre $b(s)$.
- La conjetura es cierta para $g = 1$ (P. Cassou-Noguès, 1986) y en algunos casos particulares.



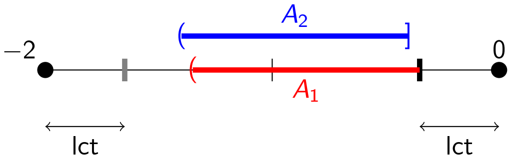
Conjetura de Yano

Yano

Construye una familia de μ números racionales (distribuida en g paquetes $A_1, \ldots, A_g$) y conjetura que coinciden con los b-exponentes de los polinomios en $\mathcal{U}$.

Comentarios

- Si ρ no tiene valores propios múltiples es una conjetura sobre $b(s)$.
- La conjetura es cierta para $g = 1$ (P. Cassou-Noguès, 1986) y en algunos casos particulares.



Polos y candidatos a raíz

Fijar una singularidad con $g = 2$, sin valores propios múltiples: $\gcd(m_2, m_1) = 1$ o $\gcd(m_2 - m_1 n_2, n_1) = 1$.

Polos y candidatos a raíz

Fijar una singularidad con $g = 2$, sin valores propios múltiples:
$\gcd(m_2, m_1) = 1$ o $\gcd(m_2 - m_1 n_2, n_1) = 1$.
Descomposición aritmética: $A_1 = A_{11} \sqcup A_{12}$, $A_2 = A_{21} \sqcup A_{22}$

Polos y candidatos a raíz

Fijar una singularidad con $g = 2$, sin valores propios múltiples: $\gcd(m_2, m_1) = 1$ o $\gcd(m_2 - m_1 n_2, n_1) = 1$.
Descomposición aritmética: $A_1 = A_{11} \sqcup A_{12}$, $A_2 = A_{21} \sqcup A_{22}$

Teorema

$\alpha \in A_{11}$, $\forall f \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}[x, y]$ con singularidad $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ en $(0, 0)$, $f > 0$ en $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Existen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

tiene un polo de orden 1 con residuo trascendente.

Polos y candidatos a raíz

Fijar una singularidad con $g = 2$, sin valores propios múltiples: $\gcd(m_2, m_1) = 1$ o $\gcd(m_2 - m_1 n_2, n_1) = 1$.
Descomposición aritmética: $A_1 = A_{11} \sqcup A_{12}$, $A_2 = A_{21} \sqcup A_{22}$

Teorema

$\alpha \in A_{11}$, $\forall f \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}[x, y]$ con singularidad $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ en $(0, 0)$, $f > 0$ en $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Existen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

tiene un polo de orden 1 con residuo trascendente.

Teorema

$\alpha \in A_{12}$, $\exists f \in \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}[x, y]$ con singularidad $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ en $(0, 0)$, $f > 0$ en $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Existen $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^1 \int_0^1 f^s(x, y) x^{\beta_1} y^{\beta_2} \frac{dx}{x} \frac{dy}{y}$$

tiene un polo de orden 1 con residuo trascendente.

Estrategia

$$f^s = \frac{1}{b_f(s)} \qquad P \cdot f^{s+1}$$

Estrategia

$$f^s x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1} = \frac{1}{b_f(s)} \qquad P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1}$$

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy = \frac{1}{b_f(s)}\int_0^1\int_0^1 P\cdot f^{s+1}x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy$$

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dxdy = \frac{1}{b_f(s)} \int_0^1\int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dxdy$$

α polo del LHS con residuo trascendente

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy = \frac{1}{b_f(s)}\int_0^1\int_0^1 P\cdot f^{s+1}x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy$$

α polo del LHS con residuo trascendente
Segunda integral: combinación lineal de

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{i+j}f^{s+1}(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}x^{\beta_1'}y^{\beta_2'}dxdy$$

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy = \frac{1}{b_f(s)}\int_0^1\int_0^1 P\cdot f^{s+1}x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy$$

α polo del LHS con residuo trascendente
Segunda integral: combinación lineal de

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{i+j}f^{s+1}(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}x^{\beta_1'}y^{\beta_2'}dxdy$$

Integración por partes:

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^{i+j-1}f^{s+1}(x,y)}{\partial x^{i-1}\partial y^j}x^{\beta_1'}y^{\beta_2'}\right]_{x=0}^{x=1}dy$$
$$-\beta_1'\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{i+j-1}f^{s+1}(x,y)}{\partial x^{i-1}\partial y^j}x^{\beta_1'-1}y^{\beta_2'}dxdy$$

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dxdy = \frac{1}{b_f(s)} \underbrace{\int_0^1\int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dxdy}_{\mathcal{J}}$$

α polo del LHS con residuo trascendente

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dxdy = \frac{1}{b_f(s)} \underbrace{\int_0^1\int_0^1 P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} dxdy}_{\mathcal{J}}$$

α polo del LHS con residuo trascendente
$\mathcal{J}$ es combinación lineal de integrales de una variable (residuos algebraicos) y

$$\underbrace{\int_0^1\int_0^1 f^{s+1}(x,y) x^{\beta_1'} y^{\beta_2'} dxdy}_{\text{máximo polo lct}-1}$$

Estrategia

$$\int_0^1\int_0^1 f^s x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy = \frac{1}{b_f(s)}\underbrace{\int_0^1\int_0^1 P\cdot f^{s+1}x^{\beta_1-1}y^{\beta_2-1}dxdy}_{\mathcal{J}}$$

α polo del LHS con residuo trascendente
$\mathcal{J}$ es combinación lineal de integrales de una variable (residuos algebraicos) y

$$\underbrace{\int_0^1\int_0^1 f^{s+1}(x,y)x^{\beta_1'}y^{\beta_2'}dxdy}_{\text{máximo polo lct}-1}$$

Teorema

α es raíz del polinomio de Bernstein de f.

Estrategia A_2

$$\iint_{\mathcal{D}} f^s x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1} g(x,y)^{\beta_3} dxdy$$
$$= \frac{1}{b_f(s)} \iint_{\mathcal{D}} P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1 - 1} y^{\beta_2 - 1} g(x,y)^{\beta_3} dxdy$$

Estrategia A_2

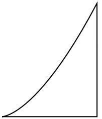
$$\iint_{\mathcal{D}} f^s x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} g(x,y)^{\beta_3}\, dxdy$$

$$= \frac{1}{b_f(s)} \iint_{\mathcal{D}} P \cdot f^{s+1} x^{\beta_1-1} y^{\beta_2-1} g(x,y)^{\beta_3}\, dxdy$$

$$f(x,y) \mapsto x = \cdots * y^{\frac{m_1}{n_1}} + \ldots + * y^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \ldots$$

$$f(x,y) \mapsto x = \cdots * y^{\frac{m_1}{n_1}} + \ldots$$

$$g(x,y) = 0$$



Máximo polo de

$$\iint_{\mathcal{D}} f^{s+1}(x,y) x^{\beta_1'} y^{\beta_2'} g(x,y)^{\beta_3'}\, dxdy \quad \equiv \alpha \bmod \mathbb{Z} \text{ es } \max A_2 - 1$$

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ abierto denso

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ abierto denso
- $\mathcal{U}^{+}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{U}^{+}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}} \neq \emptyset$

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ abierto denso
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{+} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{U}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}}^{+} \neq \emptyset$
- $\alpha \in A_{i1}$ raíz de $b(f)$.

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ abierto denso
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{+} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{U}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}}^{+} \neq \emptyset$
- $\alpha \in A_{i1}$ raíz de $b(f)$.
- Varchenko demostró que si la monodromía no tiene valores propios múltiples y β es raíz de $b_f(s)$ entonces β o $\beta + 1$ es raíz de $b(s)$.

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ abierto denso
- $\mathcal{U}^{+}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{U}^{+}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}} \neq \emptyset$
- $\alpha \in A_{i1}$ raíz de $b(f)$.
- Varchenko demostró que si la monodromía no tiene valores propios múltiples y β es raíz de $b_f(s)$ entonces β o $\beta + 1$ es raíz de $b(s)$.
- $\alpha \in A_{i2} \Rightarrow -\text{lct} - \alpha < 1 \Rightarrow \alpha$ raíz de $b(s)$.

Fin de la demostración

- Similar razonamiento para A_{21} y A_{22} (más técnico, generalizable a $g > 2$)
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ abierto denso, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ cerrado analítico.
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ abierto denso
- $\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^{+} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{U}_{\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}}^{+} \neq \emptyset$
- $\alpha \in A_{i1}$ raíz de $b(f)$.
- Varchenko demostró que si la monodromía no tiene valores propios múltiples y β es raíz de $b_f(s)$ entonces β o $\beta + 1$ es raíz de $b(s)$.
- $\alpha \in A_{i2} \Rightarrow -\mathrm{lct} - \alpha < 1 \Rightarrow \alpha$ raíz de $b(s)$.

Fin de la demostración