

Monodromía de trenzas y topología de curvas algebraicas

Enrique Artal Bartolo (UZ)

Monodromía de trenzas y topología de curvas algebraicas

Enrique Artal Bartolo (UZ)

Trabajo [1] en común con:

Jorge Carmona Ruber (UCM) y José I. Cogolludo Agustín (UZ)

Índice

1. **Historia**
2. **Preliminares**
3. **Definición**
4. **Interpretación**
5. **Otra interpretación**
6. **Ejemplo**
7. **Ambigüedades en la elecciones**
8. **Aplicaciones Topológicas**
9. **Teorema principal**
10. **Idea de la demostración**
11. **Curvas conjugadas**

1. Historia

- Aparece implícito en el método de O. Zariski (1929) [9] y E.R. van Kampen (1933) [5] (3)

1. Historia

- Aparece implícito en el método de O. Zariski (1929) [9] y E.R. van Kampen (1933) [5] (3)
- Aparece explícitamente en O. Chisini (1937) [4]: fascio característico

1. Historia

- Aparece implícito en el método de O. Zariski (1929) [9] y E.R. van Kampen (1933) [5] (3)
- Aparece explícitamente en O. Chisini (1937) [4]: fascio característico
- Desarrollado por B. Moishezon (1981) [8] (y M. Teicher)

2. Preliminares

(\mathcal{C}, L, P) es una terna tal que:

- ▷ $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ curva proyectiva,
- ▷ L recta no contenida en \mathcal{C}
- ▷ $P \in L$.

(C, L, P) se dice *horizontal de grado d* si podemos elegir coordenadas $[x : y : z]$ tales que:

(\mathcal{C}, L, P) se dice **horizontal de grado d** si podemos elegir coordenadas $[x : y : z]$ tales que:

- $L = \{z = 0\}$
- $P = [0 : 1 : 0]$
- $\mathcal{C} = \{f(x, y, z) = 0\}$, con:

(\mathcal{C}, L, P) se dice **horizontal de grado d** si podemos elegir coordenadas $[x : y : z]$ tales que:

- $L = \{z = 0\}$
- $P = [0 : 1 : 0]$
- $\mathcal{C} = \{f(x, y, z) = 0\}$, con:

$$f(x, y, 1) = y^d + f_1(x)y^{d-1} + \cdots + f_{d-1}(x)y + f_d(x),$$
$$f_j(x) \in \mathbb{C}[x], \quad j = 1, \dots, d.$$

3. Definición

★ $\mathbb{C}^2 := \mathbb{P}^2 \setminus L$ con coordenadas (x, y)

★ $\mathcal{C}^{\text{aff}} := \mathcal{C} \cap \mathbb{C}^2$

3. Definición

★ $\mathbb{C}^2 := \mathbb{P}^2 \setminus L$ con coordenadas (x, y)

★ $\mathcal{C}^{\text{aff}} := \mathcal{C} \cap \mathbb{C}^2$

★ $\pi : (\mathbb{C}^2, \mathcal{C}^{\text{aff}}) \rightarrow \mathbb{C}, \pi(x, y) = x$

3. Definición

★ $\mathbb{C}^2 := \mathbb{P}^2 \setminus L$ con coordenadas (x, y)

★ $\mathcal{C}^{\text{aff}} := \mathcal{C} \cap \mathbb{C}^2$

★ $\pi : (\mathbb{C}^2, \mathcal{C}^{\text{aff}}) \rightarrow \mathbb{C}, \pi(x, y) = x$

★ $\mathcal{D} := \{x_1, \dots, x_r\} \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de elementos $x \in \mathbb{C}$ tales que $\#\pi^{-1}(x) \cap \mathcal{C}^{\text{aff}} < d$, $\mathbb{C}_{\mathcal{C}} := \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$.

- ★ $V := \{p(t) \in \mathbb{C}[t] \mid p \text{ unitario de grado } d\}$, identificado con el producto simétrico de d copias de \mathbb{C} .
- ★ $D := \{p(t) \in V \mid p \text{ tiene raíces múltiples}\}$.

- ★ $V := \{p(t) \in \mathbb{C}[t] \mid p \text{ unitario de grado } d\}$, identificado con el producto simétrico de d copias de \mathbb{C} .
- ★ $D := \{p(t) \in V \mid p \text{ tiene raíces múltiples}\}$.
- ★ f define $\tilde{f} : \mathbb{C}_c \rightarrow V \setminus D$ tal que $\tilde{f}(x) := f(x, t, 1)$; los elementos de $V \setminus D$ se identifican con los conjuntos de d puntos distintos de \mathbb{C} .
- ★ $* \in \mathbb{C}_c$ y denotamos $y^* := \tilde{f}(*)$.

Monodromía de trenzas de (\mathcal{C}, L, P) :

Monodromía de trenzas de (\mathcal{C}, L, P) :

$$\nabla := \tilde{f}_*$$

$$\tilde{f}_* : \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) \rightarrow \pi_1(V \setminus D; \mathbf{y}^*)$$

!!

$B_{\mathbf{y}^*}$

4. Interpretación

$\pi_1(\mathbb{C}_c; *)$ es un grupo libre con una familia especial de bases (geométricas)

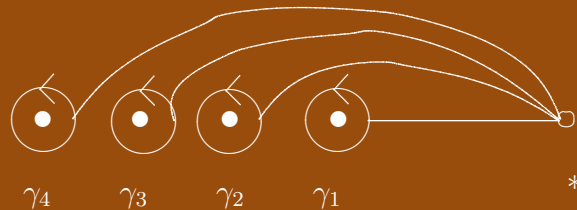


Figura 1: Base geométrica

♠ Cada lazo es meridiano de un punto de \mathcal{D} .

4. Interpretación

$\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$ es un grupo libre con una familia especial de bases (geométricas)

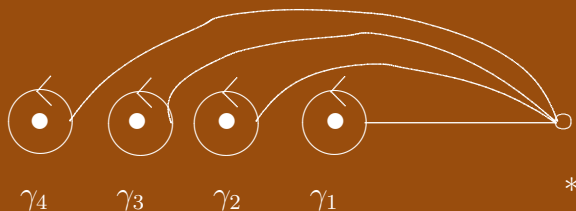


Figura 1: Base geométrica

- ♠ Cada lazo es meridiano de un punto de \mathcal{D} .
- ♠ $\gamma_r \cdots \gamma_1$ es el borde de un gran disco geométrico. En particular su inverso es meridiano de ∞ .

B_{y^*} se identifica con el grupo de trenzas

$$B_d := B_{-1, \dots, -d}$$

mediante una **trenza** (camino en $V \setminus D$) de $-1, \dots, -d$ a y^* .

B_{y^*} se identifica con el grupo de trenzas

$$B_d := B_{-1, \dots, -d}$$

mediante una **trenza** (camino en $V \setminus D$) de $-1, \dots, -d$ a y^* .

Monodromía de trenzas



Un elemento de B_d^r

B_{y^*} se identifica con el grupo de trenzas

$$B_d := B_{-1, \dots, -d}$$

mediante una **trenza** (camino en $V \setminus D$) de $-1, \dots, -d$ a y^* .

Monodromía de trenzas



Un elemento de B_d^r

La definición clásica pasa por elecciones genéricas de L y P .

5. Otra interpretación

◇ Curva fibrada $\mathcal{C}^\varphi := \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$, $\mathcal{L} := \bigcup_{j=1}^r \{x = x_j z\}$,

5. Otra interpretación

◇ Curva fibrada $\mathcal{C}^\varphi := \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$, $\mathcal{L} := \bigcup_{j=1}^r \{x = x_j z\}$,

◇ $X^\varphi := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq x_1, \dots, x_r\}$

5. Otra interpretación

◇ Curva fibrada $\mathcal{C}^\varphi := \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$, $\mathcal{L} := \bigcup_{j=1}^r \{x = x_j z\}$,

◇ $X^\varphi := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq x_1, \dots, x_r\}$

◇ $\pi^\varphi : (X^\varphi, \mathcal{C}^\varphi \cap X^\varphi) \rightarrow \mathbb{C}_c$ par fibrado de fibra $(\mathbb{C}, \mathbf{y}^*)$

5. Otra interpretación

◇ Curva fibrada $\mathcal{C}^\varphi := \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$, $\mathcal{L} := \bigcup_{j=1}^r \{x = x_j z\}$,

◇ $X^\varphi := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq x_1, \dots, x_r\}$

◇ $\pi^\varphi : (X^\varphi, \mathcal{C}^\varphi \cap X^\varphi) \rightarrow \mathbb{C}_c$ par fibrado de fibra $(\mathbb{C}, \mathbf{y}^*)$

◇ $B_{\mathbf{y}^*} \cong B_d$ clasifica estos fibrados

5. Otra interpretación

◇ Curva fibrada $\mathcal{C}^\varphi := \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$, $\mathcal{L} := \bigcup_{j=1}^r \{x = x_j z\}$,

◇ $X^\varphi := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \neq x_1, \dots, x_r\}$

◇ $\pi^\varphi : (X^\varphi, \mathcal{C}^\varphi \cap X^\varphi) \rightarrow \mathbb{C}_c$ par fibrado de fibra $(\mathbb{C}, \mathbf{y}^*)$

◇ $B_{\mathbf{y}^*} \cong B_d$ clasifica estos fibrados

◇ En $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$, $M \gg 0$, tenemos también el concepto de bases geométricas

$B_{\mathbf{y}^*} \cong B_d$ actúa sobre $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$ respetando las bases geométricas

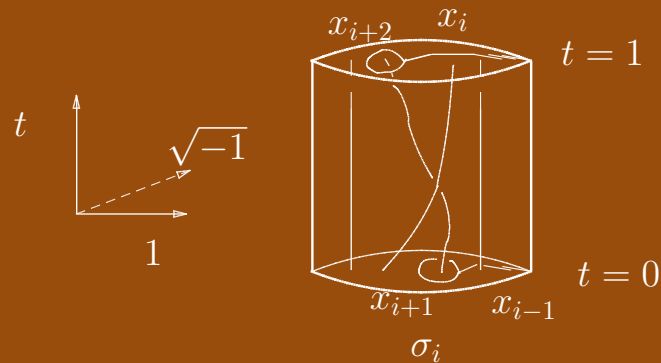


Figura 2: Generador del grupo de trenzas

$$\mu_i^{\sigma_i} = \mu_{i+1} \quad \mu_{i+1}^{\sigma_i} = \mu_{i+1} * \mu_i \quad a * b := aba^{-1}$$

Sucesión exacta larga de homotopía

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) \longrightarrow 1$$

Sucesión exacta larga de homotopía

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) \longrightarrow 1$$

$R = * \gg 0$ tal que $x_i < R$; fijar base geométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

Sucesión exacta larga de homotopía

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) \longrightarrow 1$$

$R = * \gg 0$ tal que $x_i < R$; fijar base geométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

$M \gg 0$ tal que $f(x, y) = 0$ y $|x| \leq R \Rightarrow |y| < M$; fijar base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

Sucesión exacta larga de homotopía

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) \longrightarrow 1$$

$R = * \gg 0$ tal que $x_i < R$; fijar base geométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

$M \gg 0$ tal que $f(x, y) = 0$ y $|x| \leq R \Rightarrow |y| < M$; fijar base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

Elevar $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ a $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r$ en $\mathbb{C} \times \{M\}$.

Sucesión exacta larga de homotopía

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) \longrightarrow 1$$

$R = * \gg 0$ tal que $x_i < R$; fijar base geométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

$M \gg 0$ tal que $f(x, y) = 0$ y $|x| \leq R \Rightarrow |y| < M$; fijar base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

Elevar $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ a $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r$ en $\mathbb{C} \times \{M\}$.

Tenemos un retracto compacto salvo homotopía de $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi$. Ver figura 3

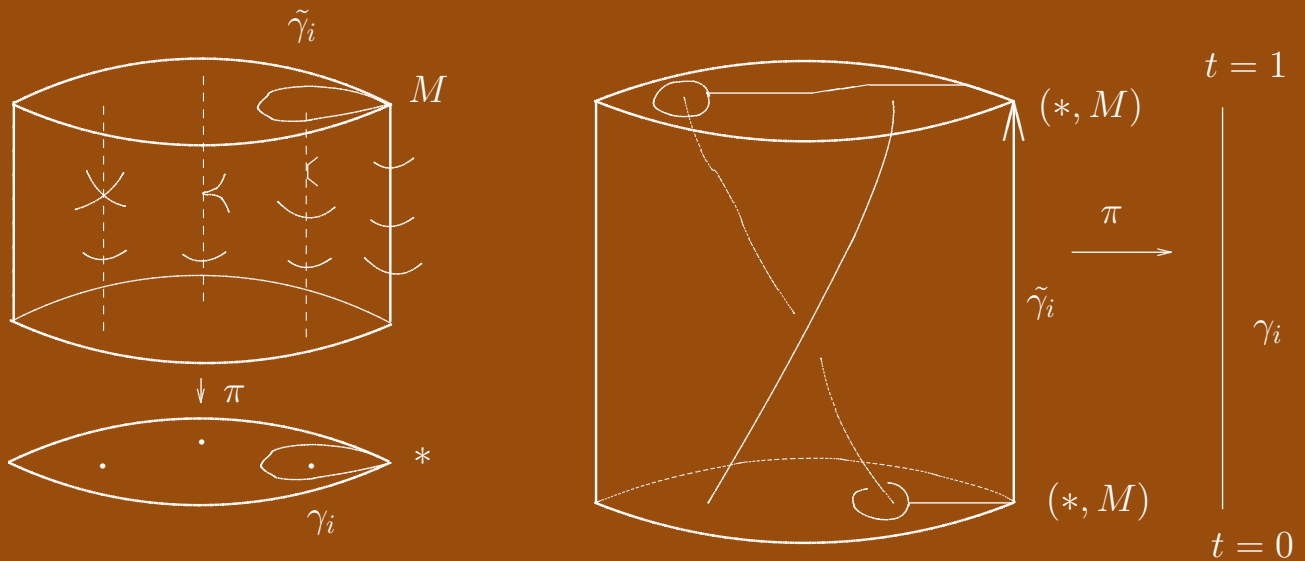


Figura 3: Polidiscos adaptados y conjugación

Para tener una presentación de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M))$ necesitamos calcular $\mu_i^{\tilde{\gamma}^j}$. Ver figura 3.

Para tener una presentación de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M))$ necesitamos calcular $\mu_i^{\tilde{\gamma}_j}$. Ver figura 3.

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) = \langle \mu_1, \dots, \mu_d, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r \mid$$

$$\mu_i^{\tilde{\gamma}_j} = \mu_i^{\nabla(\gamma_j)}, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r \rangle$$

(1)

(1)+ Teorema de Seifert-Van Kampen



Teorema de Zariski-Van Kampen

(a) $\tilde{\gamma}_i = 1$ (para las rectas de \mathcal{L}).

Para tener una presentación de $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M))$ necesitamos calcular $\mu_i^{\tilde{\gamma}_j}$. Ver figura 3.

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) = \langle \mu_1, \dots, \mu_d, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r :$$

$$\mu_i^{\tilde{\gamma}_j} = \mu_i^{\nabla(\gamma_j)}, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r \rangle$$

(1)

(1)+ Teorema de Seifert-Van Kampen



Teorema de Zariski-Van Kampen

- (a) $\tilde{\gamma}_i = 1$ (para las rectas de \mathcal{L}).
- (b) En el caso proyectivo y genérico $\mu_d \cdot \dots \cdot \mu_1 = 1$ (recta del infinito).

6. Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ de grado 6, $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_1\}$. Se tiene:

6. Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ de grado 6, $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_1\}$. Se tiene:

◇ $\mathcal{C} = \mathcal{C}^5 \cup \mathcal{C}^1$, \mathcal{C}^j curva irreducible de grado j

6. Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ de grado 6, $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_1\}$. Se tiene:

◇ $\mathcal{C} = \mathcal{C}^5 \cup \mathcal{C}^1$, \mathcal{C}^j curva irreducible de grado j

◇ $\text{Sing}(\mathcal{C}^5) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}$

◇ $\mathcal{C}^5 \cap \mathcal{C}^1 = \{P_4, P_1\} \subset \mathcal{C}^5 \setminus \text{Sing}(\mathcal{C}^5)$, $(\mathcal{C}^5 \cdot \mathcal{C}^1)_{P_j} = j$

6. Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ de grado 6, $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_1\}$. Se tiene:

◇ $\mathcal{C} = \mathcal{C}^5 \cup \mathcal{C}^1$, \mathcal{C}^j curva irreducible de grado j

◇ $\text{Sing}(\mathcal{C}^5) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}$

◇ $\mathcal{C}^5 \cap \mathcal{C}^1 = \{P_4, P_1\} \subset \mathcal{C}^5 \setminus \text{Sing}(\mathcal{C}^5)$, $(\mathcal{C}^5 \cdot \mathcal{C}^1)_{P_j} = j$

\mathcal{C} es proyectivamente equivalente a \mathcal{C}_β , $\beta^2 = 2$, de ecuación $f_\beta(x, y, z)g_\beta(x, y, z) = 0$ y $\mathcal{C}_{\sqrt{2}}$ no es proyectivamente equivalente a $\mathcal{C}_{-\sqrt{2}}$

6. Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ de grado 6, $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_7, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_1\}$. Se tiene:

◇ $\mathcal{C} = \mathcal{C}^5 \cup \mathcal{C}^1$, \mathcal{C}^j curva irreducible de grado j

◇ $\text{Sing}(\mathcal{C}^5) = \{\mathbb{E}_6, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_2\}$

◇ $\mathcal{C}^5 \cap \mathcal{C}^1 = \{P_4, P_1\} \subset \mathcal{C}^5 \setminus \text{Sing}(\mathcal{C}^5)$, $(\mathcal{C}^5 \cdot \mathcal{C}^1)_{P_j} = j$

\mathcal{C} es proyectivamente equivalente a \mathcal{C}_β , $\beta^2 = 2$, de ecuación $f_\beta(x, y, z)g_\beta(x, y, z) = 0$ y $\mathcal{C}_{\sqrt{2}}$ no es proyectivamente equivalente a $\mathcal{C}_{-\sqrt{2}}$

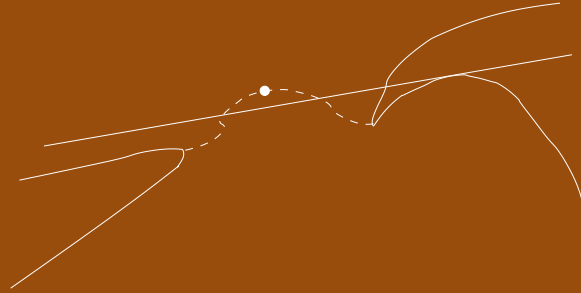
$$\begin{aligned} f_{\beta}(x, y, z) &:= y^2 z^3 + (303 - 216 \beta) y z^2 x^2 + (-636 + 450 \beta) y z x^3 + \\ &\quad + (-234 \beta + 331) y x^4 + (-18 \beta + 27) z x^4 + (18 \beta - 26) x^5, \\ g_{\beta}(x, y, z) &:= y + \left(\frac{10449}{196} - \frac{3645}{98} \beta \right) z + \left(-\frac{432}{7} + \frac{297}{7} \beta \right) x. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
f_{\beta}(x, y, z) &:= y^2 z^3 + (303 - 216 \beta) y z^2 x^2 + (-636 + 450 \beta) y z x^3 + \\
&\quad + (-234 \beta + 331) y x^4 + (-18 \beta + 27) z x^4 + (18 \beta - 26) x^5, \\
g_{\beta}(x, y, z) &:= y + \left(\frac{10449}{196} - \frac{3645}{98} \beta \right) z + \left(-\frac{432}{7} + \frac{297}{7} \beta \right) x.
\end{aligned}
\tag{2}$$

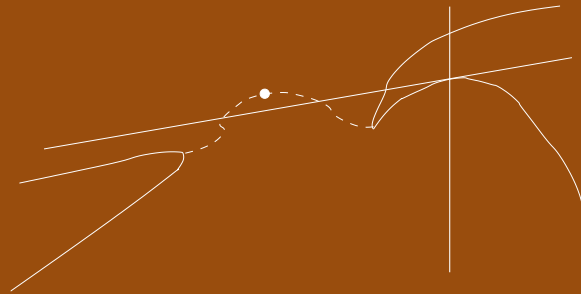
Los dibujos reales de estas curvas permite calcular las monodromías de trenzas asociadas a las ternas $(\mathcal{C}_{\beta}, L, P)$ ya que el discriminante con respecto a y solo tiene soluciones reales. Ver [2].

En los dibujos las líneas discontinuas representan las partes reales de las soluciones complejas conjugadas.

Curva $C_{\sqrt{2}}$



Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

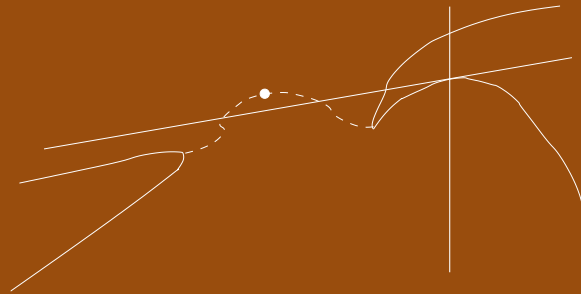
$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

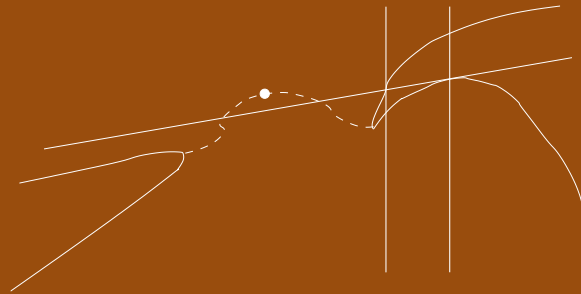
$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\sigma_2^4$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

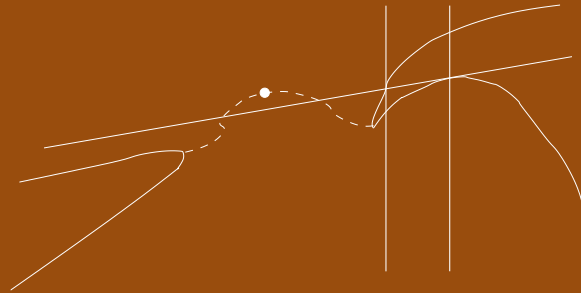
$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

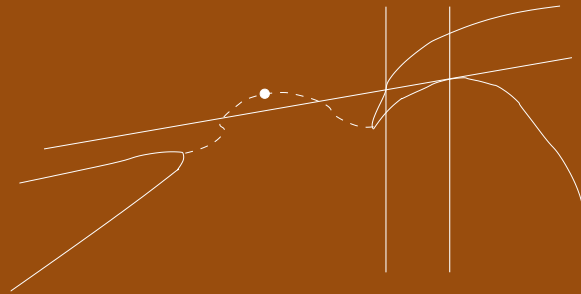
$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

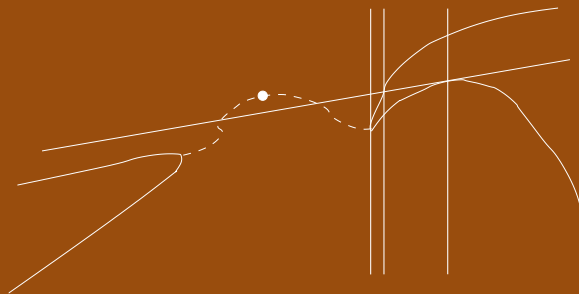
$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

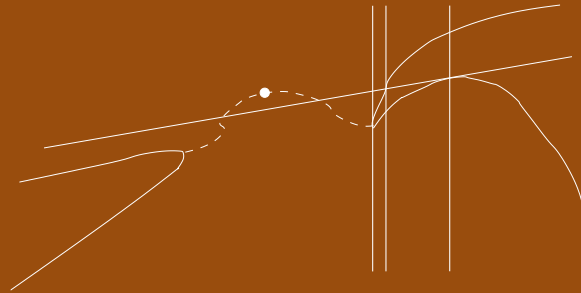
$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

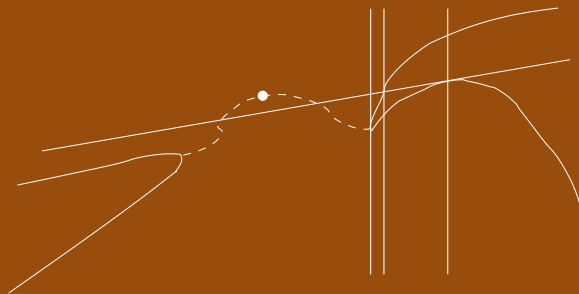
$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

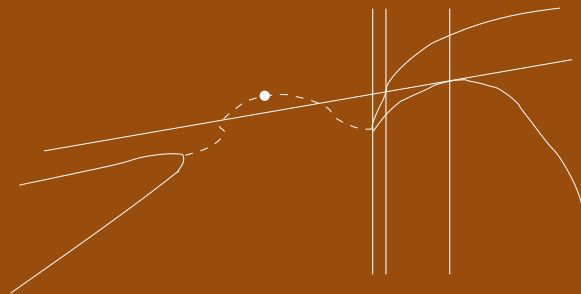
$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

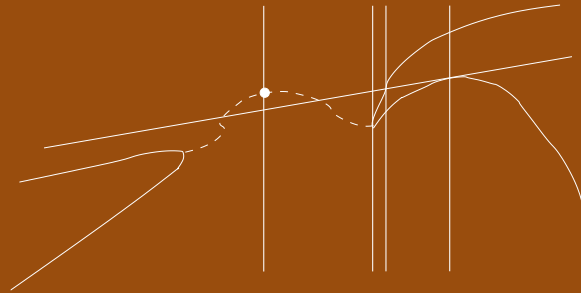
$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

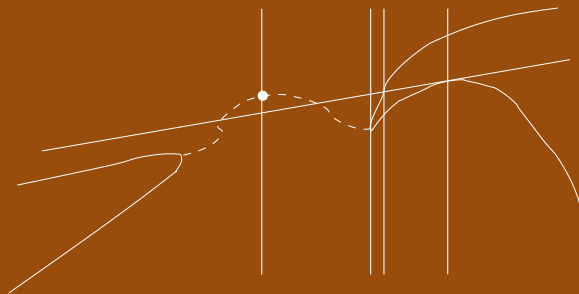
$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 * \sigma_1^4$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

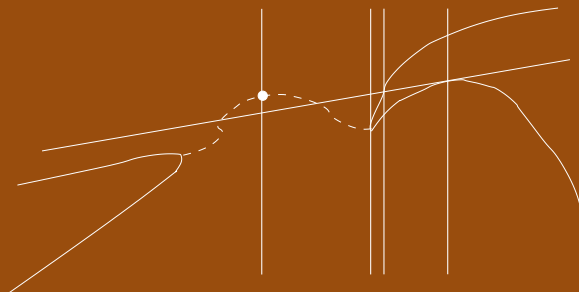
$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 * \sigma_1^4$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

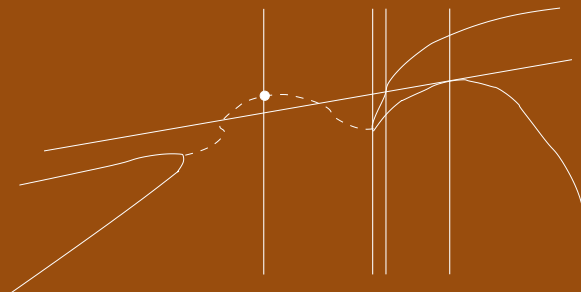
$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 * \sigma_1^4$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

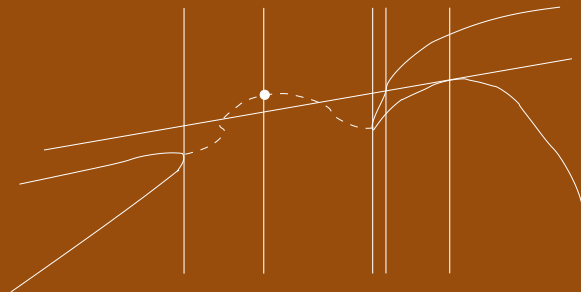
$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 * \sigma_1^4$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_1 \sigma_2^{-1}$$

Curva $C_{\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^8$$

$$\gamma_2^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 * \sigma_1^2$$

$$\gamma_3^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 * \sigma_2^3$$

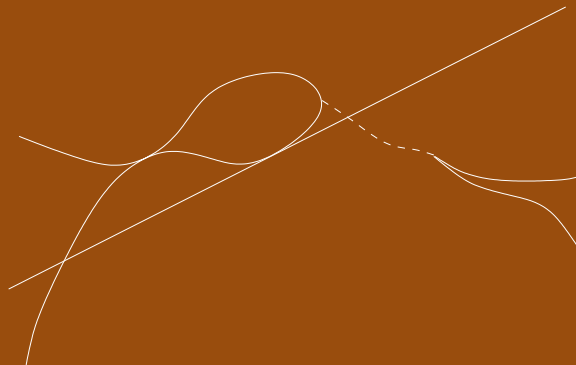
$$\gamma_4^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 * \sigma_1^4$$

$$\gamma_5^{\sqrt{2}} \mapsto$$

$$\sigma_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} * \sigma_2.$$

Curva $C_{-\sqrt{2}}$



$$\gamma_1^{-\sqrt{2}} \mapsto \sigma_2^3$$

$$\gamma_2^{-\sqrt{2}} \mapsto (\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2) * \sigma_1$$

$$\gamma_3^{-\sqrt{2}} \mapsto \sigma_2 * \sigma_1^8$$

$$\gamma_4^{-\sqrt{2}} \mapsto \sigma_1^{-2} * \sigma_2^4$$

$$\gamma_5^{-\sqrt{2}} \mapsto \sigma_1^{-3} * \sigma_2^2.$$

7. Ambigüedades en la elecciones

I.-

II.-

III.-

7. Ambigüedades en la elecciones

I.- Elección de la base geométrica

II.-

III.-

7. Ambigüedades en la elecciones

I.- Elección de la base geométrica

II.- Elección de la **trenza** de $-1, \dots, -d$ a y

III.-

7. Ambigüedades en la elecciones

I.- Elección de la base geométrica

II.- Elección de la **trenza** de $-1, \dots, -d$ a y

III.- Elección del punto base *

Soluciones

I.-

II y III.-

7. Ambigüedades en la elecciones

I.- Elección de la base geométrica

II.- Elección de la **trenza** de $-1, \dots, -d$ a y

III.- Elección del punto base $*$

Soluciones

I.- Acción de B_r en B_d^r mediante **movimientos de Hurwitz**. Esta acción es libre y transitiva en las bases geométricas (Artin)

II y III.-

7. Ambigüedades en la elecciones

I.- Elección de la base geométrica

II.- Elección de la **trenza** de $-1, \dots, -d$ a y

III.- Elección del punto base *

Soluciones

I.- Acción de B_r en B_d^r mediante **movimientos de Hurwitz**. Esta acción es libre y transitiva en las bases geométricas (Artin)

II y III.- Acción de B_d en B_d^r mediante **conjugación simultánea**. Da lugar a la noción de base pseudo-geométrica: $(\tilde{\gamma}_r \cdot \dots \cdot \tilde{\gamma}_1)^{-1}$ es UN meridiano de la recta del infinito

Ambas acciones conmutan

Monodromía de trenzas

Ambas acciones conmutan

Monodromía de trenzas

|||

Elemento de $B_d^r / (B_r \times B_d)$

Objetivos

-
-

Ambas acciones conmutan

Monodromía de trenzas

|||

Elemento de $B_d^r / (B_r \times B_d)$

Objetivos

- Encontrar invariantes efectivos que distingan monodromías de trenzas
-

Ambas acciones conmutan

Monodromía de trenzas

|||

Elemento de $B_d^r / (B_r \times B_d)$

Objetivos

- Encontrar invariantes efectivos que distingan monodromías de trenzas
- Encontrar propiedades topológicas asociadas a las monodromías de trenzas

8. Aplicaciones Topológicas

-
-
-
-

8. Aplicaciones Topológicas

- Teorema de Zariski-Van Kampen [9] [5]: grupo fundamental del complemento de la curva
-
-
-

8. Aplicaciones Topológicas

- Teorema de Zariski-Van Kampen [9] [5]: grupo fundamental del complemento de la curva
- A. Ligbober (1986) [7]: tipo de homotopía del complemento de la curva
-
-

8. Aplicaciones Topológicas

- Teorema de Zariski-Van Kampen [9] [5]: grupo fundamental del complemento de la curva
- A. Ligbober (1986) [7]: tipo de homotopía del complemento de la curva
- V. Kulikov, M. Teicher (2000) [6]: encaje de la curva en el plano proyectivo si la curva solo posee nodos y cúspides ordinarios

■

8. Aplicaciones Topológicas

- Teorema de Zariski-Van Kampen [9] [5]: grupo fundamental del complemento de la curva
- A. Ligbober (1986) [7]: tipo de homotopía del complemento de la curva
- V. Kulikov, M. Teicher (2000) [6]: encaje de la curva en el plano proyectivo si la curva solo posee nodos y cúspides ordinarios
- J. Carmona (2002) [3]: resultado anterior sin restricciones sobre la curva

9. Teorema principal

Teorema. Sean:

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ curvas

9. Teorema principal

Teorema. Sean:

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ curvas
- L recta no contenida en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

9. Teorema principal

Teorema. Sean:

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ curvas
- L recta no contenida en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$
- $P \in L$ tal que (\mathcal{C}_1, L, P) y (\mathcal{C}_2, L, P) son ternas horizontales

Sea $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo que preserva la orientación tal que

9. Teorema principal

Teorema. Sean:

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ curvas
- L recta no contenida en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$
- $P \in L$ tal que (\mathcal{C}_1, L, P) y (\mathcal{C}_2, L, P) son ternas horizontales

Sea $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo que preserva la orientación tal que

(I) $F(P) = P,$

(II) $F(L) = L$ respetando orientaciones

9. Teorema principal

Teorema. Sean:

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ curvas
- L recta no contenida en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$
- $P \in L$ tal que (\mathcal{C}_1, L, P) y (\mathcal{C}_2, L, P) son ternas horizontales

Sea $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo que preserva la orientación tal que

(I) $F(P) = P,$

(II) $F(L) = L$ respetando orientaciones

(III) $F(\mathcal{C}_1^\varphi) = \mathcal{C}_2^\varphi$ respetando orientaciones.

9. Teorema principal

Teorema. Sean:

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{P}^2$ curvas
- L recta no contenida en $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$
- $P \in L$ tal que (\mathcal{C}_1, L, P) y (\mathcal{C}_2, L, P) son ternas horizontales

Sea $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo que preserva la orientación tal que

(I) $F(P) = P,$

(II) $F(L) = L$ respetando orientaciones

(III) $F(\mathcal{C}_1^\varphi) = \mathcal{C}_2^\varphi$ respetando orientaciones.

Entonces, las monodromías de trenzas de ambas ternas coinciden.

10. Idea de la demostración

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) & \rightarrow & 1 \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & K & & G & & H & & \end{array}$$

△ Elección de la base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

10. Idea de la demostración

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) & \rightarrow & 1 \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & K & & G & & H & & \end{array}$$

△ Elección de la base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

△ Elección de la base seudogeométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

10. Idea de la demostración

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) & \rightarrow & 1 \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & K & & G & & H & & \end{array}$$

△ Elección de la base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

△ Elección de la base seudogeométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

△ Elección de la elevación $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r$

10. Idea de la demostración

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M) & \rightarrow & \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{C}^\varphi; (*, M)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *) & \rightarrow & 1 \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & K & & G & & H & & \end{array}$$

△ Elección de la base geométrica μ_1, \dots, μ_d de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbf{y}^*; M)$

△ Elección de la base seudogeométrica $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(\mathbb{C}_{\mathcal{C}}; *)$

△ Elección de la elevación $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r$

determinan

$$G = \langle \mu_1, \dots, \mu_d, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r \rangle :$$

$$\mu_i^{\tilde{\gamma}_j} = \mu_i^{\nabla(\gamma_j)}, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r \rangle$$

(3)

$$G = \langle \mu_1, \dots, \mu_d, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r \mid$$

$$\mu_i^{\tilde{\gamma}_j} = \mu_i^{\nabla(\gamma_j)}, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r \rangle$$

(3)

△ Esta presentación determina la monodromía de trenzas.

$$G = \langle \mu_1, \dots, \mu_d, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r \mid$$

$$\mu_i^{\tilde{\gamma}_j} = \mu_i^{\nabla(\gamma_j)}, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r \rangle$$

(3)

- △ Esta presentación determina la monodromía de trenzas.
- △ Los datos anteriores no son *a priori* topológicos.

$$G = \langle \mu_1, \dots, \mu_d, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_r : \mu_i^{\tilde{\gamma}_j} = \mu_i^{\nabla(\gamma_j)}, i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r \rangle \quad (3)$$

- △ Esta presentación determina la monodromía de trenzas.
- △ Los datos anteriores no son *a priori* topológicos.
- △ El objetivo es probar que la topología orientada de $(\mathcal{C}^\varphi, L, P)$ determina estos datos.

Paso 1. *Los meridianos de \mathcal{C} están determinados por la topología orientada de $(\mathcal{C}^\varphi, L, P)$.*

Paso 1. Los meridianos de \mathcal{C} están determinados por la topología orientada de $(\mathcal{C}^\varphi, L, P)$.

Paso 2. K es el subgrupo engendrado por los meridianos de \mathcal{C} . En particular, la sucesión exacta no depende de π_ .*

Paso 1. Los meridianos de \mathcal{C} están determinados por la topología orientada de $(\mathcal{C}^\varphi, L, P)$.

Paso 2. K es el subgrupo engendrado por los meridianos de \mathcal{C} . En particular, la sucesión exacta no depende de π_* .

Paso 3. Si elegimos $*$ próximo a un x_{i_r} , el elemento $c := \mu_d \cdot \dots \cdot \mu_1$ está bien definido por la topología orientada de $(\mathcal{C}^\varphi, L, P)$.

Paso 4. Una familia $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_d$ de meridianos de \mathcal{C} tal que $c = \hat{\mu}_d \cdot \dots \cdot \hat{\mu}_1$ es una base geométrica de K .

Paso 4. Una familia $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_d$ de meridianos de \mathcal{C} tal que $c = \hat{\mu}_d \cdot \dots \cdot \hat{\mu}_1$ es una base geométrica de K .

Paso 5. El elemento $\tilde{\gamma}_j$ es la única elevación de $\gamma_j \in H$ que es meridiano de la recta $x = x_j z$ y tal que la conjugación por $\tilde{\gamma}_j$ induce en K un automorfismo tipo trenza con respecto a la familia de bases geométricas de K .

Paso 4. Una familia $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_d$ de meridianos de \mathcal{C} tal que $c = \hat{\mu}_d \cdot \dots \cdot \hat{\mu}_1$ es una base geométrica de K .

Paso 5. El elemento $\tilde{\gamma}_j$ es la única elevación de $\gamma_j \in H$ que es meridiano de la recta $x = x_j z$ y tal que la conjugación por $\tilde{\gamma}_j$ induce en K un automorfismo tipo trenza con respecto a la familia de bases geométricas de K .

Paso 6. El producto $(\tilde{\gamma}_r \cdot \dots \cdot \tilde{\gamma}_1)^{-1}$ es meridiano de la recta L en $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus (\mathcal{L} \cup L); (*, M))$.

11. Curvas conjugadas

- Suponer que existe $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo tal que $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi \cup L) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi \cup L$

11. Curvas conjugadas

- Suponer que existe $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo tal que $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi \cup L) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi \cup L$
- Es fácil ver que $\Phi(P) = P$, $\Phi(L) = L$ y $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi$

11. Curvas conjugadas

- Suponer que existe $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo tal que $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi \cup L) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi \cup L$
- Es fácil ver que $\Phi(P) = P$, $\Phi(L) = L$ y $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi$
- Por cuestiones de orientación de nudos algebraicos Φ respeta la orientación de \mathbb{P}^2

11. Curvas conjugadas

- Suponer que existe $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo tal que $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi \cup L) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi \cup L$
- Es fácil ver que $\Phi(P) = P$, $\Phi(L) = L$ y $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi$
- Por cuestiones de orientación de nudos algebraicos Φ respeta la orientación de \mathbb{P}^2
- Como las curvas poseen ecuaciones reales, utilizando eventualmente la conjugación compleja podemos suponer que Φ respeta las orientaciones de las quinticas de $\mathcal{C}_{\sqrt{2}}$ y $\mathcal{C}_{-\sqrt{2}}$

11. Curvas conjugadas

- Suponer que existe $\Phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo tal que $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi \cup L) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi \cup L$
- Es fácil ver que $\Phi(P) = P$, $\Phi(L) = L$ y $\Phi(\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi) = \mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi$
- Por cuestiones de orientación de nudos algebraicos Φ respeta la orientación de \mathbb{P}^2
- Como las curvas poseen ecuaciones reales, utilizando eventualmente la conjugación compleja podemos suponer que Φ respeta las orientaciones de las quinticas de $\mathcal{C}_{\sqrt{2}}$ y $\mathcal{C}_{-\sqrt{2}}$
- Utilizando las propiedades del número de intersección se tiene que Φ respeta las orientaciones de L , $\mathcal{C}_{\sqrt{2}}^\varphi$ y $\mathcal{C}_{-\sqrt{2}}^\varphi$

- Por tanto Φ cumple las hipótesis del teorema

- Por tanto Φ cumple las hipótesis del teorema
- En [2] hemos probado que las monodromías de trenzas son distintas

No existe Φ

- Por tanto Φ cumple las hipótesis del teorema
- En [2] hemos probado que las monodromías de trenzas son distintas

No existe Φ

$C_{\sqrt{2}}^{\varphi} \cup L$ y $C_{-\sqrt{2}}^{\varphi} \cup L$ son

curvas conjugadas en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ no homeomorfas en \mathbb{P}^2

Referencias

- [1] E. Artal, J. Carmona y J.I. Cogolludo, *Braid monodromy and topology of plane curves*, aceptado en Duke Math. J., 2002.
- [2] E. Artal, J. Carmona y J.I. Cogolludo, *Effective invariants of braid monodromy*, Preprint, 2002.
- [3] J. Carmona, *próxima tesis*.
- [4] O. Chisini, *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane*, Ist. Lombardo, Rend., II. Ser. **66** (1933), 1141–1155.
- [5] E.R. van Kampen, *On the fundamental group of an algebraic curve*, Amer. J. Math. **55** (1933), 255–260.

- [6] Vik. S. Kulikov and M. Teicher, *Braid monodromy factorizations and diffeomorphism types*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **64** (2000), no. 2, 89–120.
- [7] A. Libgober, *On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves*, J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 103–114.
- [8] B. G. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies*, L.N.M. 862, Algebraic geometry (Chicago, Ill., 1980), Springer, Berlin, 1981, pp. 107–192.
- [9] O. Zariski, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), 305–328.