Funciones zeta de singularidades cuasiordinarias [1]

Enrique Artal (Universidad de Zaragoza)

MAT.ES Valencia, Febrero 2005
Sesión especial de Geometría Algebraica

Trabajo en común con:
Pi. Cassou-Noguès (UBdx)
I. Luengo (UCM)
A. Melle Hernández (UCM)

Índice

1. Funciones zeta

$h \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_d)$, $p \in \mathbb{Z}$ primo. Serie de Poincaré de h

$$P(T) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k T^k,$$

$N_k := \#$ soluciones de $h \equiv 0$ mod p^k.

1. Funciones zeta

$h \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_d)$, $p \in \mathbb{Z}$ primo. Serie de Poincaré de h

$$P(T) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k T^k,$$

$N_k := \#$ soluciones de $h \equiv 0 \bmod p^k$.
J. Igusa demuestra que $P(T)$ es racional en T mediante

$$I(h,s) := \int_{\mathbb{Z}_p^d} |h(x)|^s |dx|, \quad s \in \mathbb{C}, \Re s > 0$$

$$P(p^{-d-s}) = \frac{1 - p^{-s} I(h,s)}{1 - p^{-s}}$$

$\boxed{\text{Resolución encajada de } h^{-1}(0)}$.

Conjetura de la Monodromía de Igusa. $0 \neq h \in F[x_1, \ldots, x_d]$, $F \subset \mathbb{C}$ *cuerpo de números; entonces para casi todas las compleciones* p*-ádicas* K *de* F*, si* s_0 *es un polo de* $I(h, K, s)$*, entonces* $\exp(2i\pi\Re(s_0))$ *es valor propio de la monodromía de* h *en algún punto complejo de* $h^{-1}(0)$.

Conjetura de la Monodromía de Igusa. $0 \neq h \in F[x_1, \ldots, x_d]$, *$F \subset \mathbb{C}$ cuerpo de números; entonces para casi todas las compleciones p-ádicas K de F, si s_0 es un polo de $I(h, K, s)$, entonces $\exp(2i\pi\Re(s_0))$ es valor propio de la monodromía de h en algún punto complejo de $h^{-1}(0)$.*

$h \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$, $\pi : X \to (\mathbb{C}^d, 0)$ resolución encajada de $V := h^{-1}(0)$,

Conjetura de la Monodromía de Igusa. $0 \neq h \in F[x_1, \ldots, x_d]$, *$F \subset \mathbb{C}$ cuerpo de números; entonces para casi todas las compleciones p-ádicas K de F, si s_0 es un polo de $I(h, K, s)$, entonces $\exp(2i\pi\Re(s_0))$ es valor propio de la monodromía de h en algún punto complejo de $h^{-1}(0)$.*

$h \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$, $\pi : X \to (\mathbb{C}^d, 0)$ resolución encajada de $V := h^{-1}(0)$,

$$\pi^*(V) = \sum_{j=0}^{r} N_j E_j, \quad (\pi^* d\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{r} (\nu_j - 1) E_j.$$

Denef y Loeser definen la función zeta topológica:

$$Z_{\mathrm{top},0}(h, s) := \sum_{J \subset \{0,1,\ldots,r\}} \chi_{\mathrm{top}}(\check{E}_J) \prod_{j \in J} \frac{1}{\nu_j + N_j s}.$$

Conjetura de la Monodromía Topológica. *Sea* $h \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$*; si* s_0 *es un polo de* $Z_{\mathrm{top},0}(h,s)$*, entonces* $\exp(2i\pi s_0)$ *es valor propio de la monodromía de* h *en algún punto de* $h^{-1}(0)$*.*

Conjetura de la Monodromía Topológica. *Sea* $h \in \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$*; si* s_0 *es un polo de* $Z_{\mathrm{top},0}(h,s)$*, entonces* $\exp(2i\pi s_0)$ *es valor propio de la monodromía de* h *en algún punto de* $h^{-1}(0)$*.*

Casos demostrados

- Loeser y Veys para curvas.
- Loeser para funciones no degeneradas con respecto al poliedro de Newton (condición técnica)
- ACLM para singularidades superaisladas
- (Veys-Rodrigues)+(ACLM) para singularidades homogéneas.

2. Integración motívica

$K_0(\mathsf{Var}_k)$ anillo de Grothendieck, $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1_k]$; $\mathscr{M}_k = K_0(\mathsf{Var}_k)[\mathbb{L}^{-1}]$.
$F^m\mathscr{M}_k$ generado por $[X]\mathbb{L}^{-i}$ con $\dim X - i \leq -m$.
$\widehat{\mathscr{M}_k}$, completado por la filtración $F^{\cdot}$ (Kontsevich).

2. Integración motívica

$K_0(\mathsf{Var}_k)$ anillo de Grothendieck, $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1_k]$; $\mathscr{M}_k = K_0(\mathsf{Var}_k)[\mathbb{L}^{-1}]$.
$F^m\mathscr{M}_k$ generado por $[X]\mathbb{L}^{-i}$ con $\dim X - i \leq -m$.
$\widehat{\mathscr{M}_k}$, completado por la filtración $F^{\cdot}$ (Kontsevich).

X variedad lisa irreducible de dimensión d
$\mathcal{L}_n(X)$ espacio de arcos modulo t^{n+1} sobre X
$\mathcal{L}(X)$ límite proyectivo de $\mathcal{L}_n(X)$
$\pi_n : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_n(X)$ proyección natural

$A \subset \mathcal{L}(X)$ ($k[t]$-)semialgebraico es estable de orden n si
$A = \pi_n^{-1}(\pi_n(A))$
cilíndrico si $A = \pi_n^{-1}(C)$, C constructible.
$\mathbf{B}^t$ conjunto de los subconjuntos $k[t]$-semialgebraicos de $\mathcal{L}(X)$.

$A \subset \mathcal{L}(X)$ ($k[t]$-)semialgebraico es estable de orden n si
$A = \pi_n^{-1}(\pi_n(A))$
cilíndrico si $A = \pi_n^{-1}(C)$, C constructible.
$\mathbf{B}^t$ conjunto de los subconjuntos $k[t]$-semialgebraicos de $\mathcal{L}(X)$.

Medida motívica $\mu_X : \mathbf{B}^t \to \widehat{\mathscr{M}_k}$
Si $A \in \mathbf{B}^t$ estable de orden n, $\mu_X(A) = [\pi_n(A)]\mathbb{L}^{-(n+1)d}$.
$X = \mathbb{A}^d$, $h \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, en el ideal maximal.

$$V_n := \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{L}_{\mathbf{0}}(X) \mid \mathrm{ord}(h \circ \boldsymbol{\varphi}) = n\}.$$

Función zeta local de Denef-Loeser

$$Z_{DL}(h,T) = \sum_{n \geq 1} \mu(V_n) T^n \in \mathscr{M}_k[[T]].$$

$\omega := \mathbf{x}^{\mathbf{N}} d\mathbf{x}$,

$$V_{n,m} := \{\boldsymbol{\varphi} \in V_n \mid \operatorname{ord}(\omega \circ \boldsymbol{\varphi}) = m\}.$$

Función zeta local de Denef-Loeser con respecto a ω:

$$Z_{DL}(h, \omega, T) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{L}^{-m} \mu(V_{n,m}) \right) T^n \in \widehat{\mathscr{M}_k}[[T]].$$

La función zeta topológica se obtiene:

- $T \to \mathbb{L}^{-s}$
- χ_{top}

$\omega := \mathbf{x}^{\mathbf{N}} d\mathbf{x}$,

$$V_{n,m} := \{\boldsymbol{\varphi} \in V_n \mid \operatorname{ord}(\omega \circ \boldsymbol{\varphi}) = m\}.$$

Función zeta local de Denef-Loeser con respecto a ω:

$$Z_{DL}(h, \omega, T) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{L}^{-m} \mu(V_{n,m}) \right) T^n \in \widehat{\mathscr{M}_k}[[T]].$$

La función zeta topológica se obtiene:

- $T \longrightarrow \mathbb{L}^{-s}$
- χ_{top}

Fórmula de cambio de variable en integración motívica para t-morfismos (Denef-Loeser)

3. Singularidades cuasiordinarias

$h \in k[[\mathbf{x}]][z]$, z-grado n es cuasiordinario si:

$$D_z(h) = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon(\mathbf{0}) \neq 0$$

3. Singularidades cuasiordinarias

$h \in k[[\mathbf{x}]][z]$, z-grado n es cuasiordinario si:

$$D_z(h) = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon(\mathbf{0}) \neq 0$$

Generalización de Puiseux para curvas planas

Si z_b es raíz de $g(\mathbf{0}, z)$ de orden s_b, por el Teorema de Jung-Abhyankar hay exactamente s_b raíces distintas de $g(\mathbf{x}, z)$ (centradas en z_b) y en $k[[x_1^{1/m_b}, \ldots, x_d^{1/m_b}]]$

3. Singularidades cuasiordinarias

$h \in k[[\mathbf{x}]][z]$, z-grado n es cuasiordinario si:

$$D_z(h) = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon(\mathbf{0}) \neq 0$$

Generalización de Puiseux para curvas planas

Si z_b es raíz de $g(\mathbf{0}, z)$ de orden s_b, por el Teorema de Jung-Abhyankar hay exactamente s_b raíces distintas de $g(\mathbf{x}, z)$ (centradas en z_b) y en $k[[x_1^{1/m_b}, \ldots, x_d^{1/m_b}]]$

Punto clave

Parametrización multivalorada a partir de cubierta abeliana. Dificultades para cálculo efectivo.

- En buenas coordenadas (P. González) el poliedro de Newton es un camino poligonal ($\Rightarrow$ árbol de transformaciones de Newton).

- Fórmula para la función zeta de la monodromía (P. González, L.J. McEwan y A. Némethi): $(1-t^n)$ o función zeta de una curva.

- Existencia de resoluciones encajada (Villamayor) y tórica (P. González)

- En buenas coordenadas (P. González) el poliedro de Newton es un camino poligonal ($\Rightarrow$ árbol de transformaciones de Newton).

- Fórmula para la función zeta de la monodromía (P. González, L.J. McEwan y A. Némethi): $(1-t^n)$ o función zeta de una curva.

- Existencia de resoluciones encajada (Villamayor) y tórica (P. González)

Es difícil encontrar una fórmula para $Z_{\mathrm{top},0}$ (complejidad combinatoria y términos superfluos).

$\boxed{\text{Idea}}$ Calcula $Z_{\mathrm{top},0}$ a partir de Z_{DL} mediante integración motívica.

$$f(x,z) = x^a(z^v - x^u)^b + \dots \qquad (u,v) = 1.$$

$$\rho : (x_1, z_1) \mapsto (x_1^v, x_1^u(z_1 + 1))$$

$$f(\rho(x_1, z_1)) = x_1^{av+buv}\left(z_1^b + \dots\right)$$

$$f(x,z) = x^a (z^v - x^u)^b + \dots \qquad (u,v) = 1.$$

$$\rho : (x_1, z_1) \mapsto (x_1^v, x_1^u (z_1 + 1))$$

$$f(\rho(x_1, z_1)) = x_1^{av+buv} \left(z_1^b + \dots \right)$$

Partición del espacio de arcos a partir del camino poligonal: $t \mapsto (\tau_1 t^{mu} + \dots, \tau_2 t^{mv} + \dots)$, $\tau_1 \tau_2 \neq 0$.

$$f(x,z) = x^a (z^v - x^u)^b + \dots \qquad (u,v)=1.$$

$$\rho : (x_1, z_1) \mapsto (x_1^v, x_1^u(z_1+1))$$

$$f(\rho(x_1,z_1)) = x_1^{av+buv}\left(z_1^b + \dots\right)$$

Partición del espacio de arcos a partir del camino poligonal: $t \mapsto (\tau_1 t^{mu} + \dots, \tau_2 t^{mv} + \dots)$, $\tau_1\tau_2 \neq 0$.

Parte A ($\tau_1^v - \tau_2^u \neq 0$): medida en función del polígono (generalización de Denef-Hornaert)

$$f(x,z) = x^a(z^v - x^u)^b + \dots \qquad (u,v)=1.$$

$$\rho : (x_1, z_1) \mapsto (x_1^v, x_1^u(z_1+1))$$

$$f(\rho(x_1,z_1)) = x_1^{av+buv}\left(z_1^b + \dots\right)$$

Partición del espacio de arcos a partir del camino poligonal: $t \mapsto (\tau_1 t^{mu} + \dots, \tau_2 t^{mv} + \dots)$, $\tau_1\tau_2 \neq 0$.

Parte A ($\tau_1^v - \tau_2^u \neq 0$): medida en función del polígono (generalización de Denef-Hornaert)
Parte B: Levantar arcos a $f \circ \rho$: inducción (fórmula de cambio de variables, forma diferencial)
ρ no es birracional pero fijando una raíz los arcos se levantan de forma **ÚNICA**

Se obtiene fórmula para Z_{DL} con número óptimo de términos
Conjeturas de la monodromía para curvas.

Se obtiene fórmula para Z_{DL} con número óptimo de términos
Conjeturas de la monodromía para curvas.

$\boxed{\text{Dimensión mayor: Problemas}}$

- ρ tampoco es birracional pero hay arcos que no se levantan.

Se obtiene fórmula para Z_{DL} con número óptimo de términos
Conjeturas de la monodromía para curvas.

Dimensión mayor: Problemas

- ρ tampoco es birracional pero hay arcos que no se levantan.
- Utilizando $k[t]$-morfismos se resuelve el problema para singularidades Newton no degeneradas (Denef, Guibert, ACLM).
- Utilizando $k[t]$-morfismos se levantan todos los arcos.

$$(z^2 - x_1x_2)^2 + \ldots$$

$$\rho : (y_1, y_2, z_1) \longmapsto (y_1^2, y_2^2, y_1y_2(z_1 + 1))$$

$t \longmapsto (t^2, t^4, t^3 + t^4)$ se levanta en $t \longmapsto (t, t^2, t)$

$t \longmapsto (t^{2a+1}, t^{2b+1}, t^{a+b+1}(1 + t))$ no se levanta

Tomando el $k[t]$-morfismo de Newton

$$(y_1, y_2, z_1) \longmapsto (ty_1^2, ty_2^2, ty_1y_2(z_1 + 1))$$

y se levanta en

$$t \longmapsto (t^a, t^b, t)$$

Se descomponen en tres conjuntos medibles

- Tipo A: medida en función del polígono
- Tipo B: Arcos que se levantan en el origen por el $k[t]$-morfismo de Newton
- Arcos que NO se levantan en el origen por el $k[t]$-morfismo de Newton

Tipos A,B La contribución a $Z_{\text{top},0}$ no depende del $k[t]$-morfismo

Se descomponen en tres conjuntos medibles

- Tipo A: medida en función del polígono
- Tipo B: Arcos que se levantan en el origen por el $k[t]$-morfismo de Newton
- Arcos que NO se levantan en el origen por el $k[t]$-morfismo de Newton

Tipos A,B La contribución a $Z_{\mathrm{top},0}$ no depende del $k[t]$-morfismo

Introducción de funciones t-cuasiordinarias h^t ponderadas con noción de pares característicos.

Se descomponen en tres conjuntos medibles

- Tipo A: medida en función del polígono
- Tipo B: Arcos que se levantan en el origen por el $k[t]$-morfismo de Newton
- Arcos que NO se levantan en el origen por el $k[t]$-morfismo de Newton

Tipos A,B La contribución a $Z_{\mathrm{top},0}$ no depende del $k[t]$-morfismo Introducción de funciones t-cuasiordinarias h^t ponderadas con noción de pares característicos.
Tercer tipo Asociadas a funciones t-cuasiordinarias más generales La contribución topológica es nula

Se definen conceptos de t-función cuasiordinaria estables por transformaciones de Newton.

Se definen conceptos de t-función cuasiordinaria estables por transformaciones de Newton.

Por inducción se construye una fórmula optimal y combinatoria de $Z_{\mathrm{top},0}$ (usando formas diferenciales y fórmula de cambio de variable)

Se definen conceptos de t-función cuasiordinaria estables por transformaciones de Newton.

Por inducción se construye una fórmula optimal y combinatoria de $Z_{\mathrm{top},0}$ (usando formas diferenciales y fórmula de cambio de variable)

Se demuestra las conjeturas de la monodromía para cuasiordinarias.

4. Método de Jung

$V := \{f(x,y,z) = 0\} \subset (\mathbb{C}^3, 0)$
$\pi : (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (x,y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi_{|V}$ es finita.
Δ discriminante de π con respecto a V.

4. Método de Jung

$V := \{f(x,y,z) = 0\} \subset (\mathbb{C}^3, 0)$
$\pi : (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (x,y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi_{|V}$ es finita.
Δ discriminante de π con respecto a V.

$$\begin{array}{c} V \subset \mathbb{C}^3 \\ \downarrow \\ \mathbb{C}^2 \supset \Delta \end{array}$$

4. Método de Jung

$V := \{f(x,y,z) = 0\} \subset (\mathbb{C}^3, 0)$
$\pi : (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (x,y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi_{|V}$ es finita.
Δ discriminante de π con respecto a V.

$$\begin{tikzcd} & V \subset \mathbb{C}^3 \arrow[d] \\ \text{Resolución de } \Delta \quad Y \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \supset \Delta \end{tikzcd}$$

4. Método de Jung

$V := \{f(x,y,z)=0\} \subset (\mathbb{C}^3, 0)$
$\pi : (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (x,y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi_{|V}$ es finita.
Δ discriminante de π con respecto a V.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{V} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Pull-back}"] & V \subset \mathbb{C}^3 \arrow[d] \\
\text{Resolución de } \Delta & Y \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \supset \Delta
\end{tikzcd}$$

4. Método de Jung

$V := \{f(x, y, z) = 0\} \subset (\mathbb{C}^3, 0)$
$\pi : (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi_{|V}$ es finita.
Δ discriminante de π con respecto a V.

$$
\begin{tikzcd}
V^\nu \arrow[dr, "\text{Normalización}"'] & & \\
& \widetilde{V} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Pull-back}"] & V \subset \mathbb{C}^3 \arrow[d] \\
\text{Resolución de } \Delta & Y \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \supset \Delta
\end{tikzcd}
$$

4. Método de Jung

$V := \{f(x,y,z) = 0\} \subset (\mathbb{C}^3, 0)$

$\pi : (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mapsto (x,y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\pi_{|V}$ es finita.

Δ discriminante de π con respecto a V.

$$
\begin{tikzcd}
V^{\nu} \arrow[dr, "\text{Normalización}"'] & & \\
Y \times \mathbb{C} \supset & \widetilde{V} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Pull-back}"] & V \subset \mathbb{C}^3 \arrow[d] \\
\text{Resolución de } \Delta & Y \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \supset \Delta
\end{tikzcd}
$$

Referencias

[1] E. Artal, P. Cassou-Noguès, I. Luengo, and A. Melle, Quasi-ordinary power series and their zeta functions, Preprint available at `arXiv:math.NT/0306249`, accepted in Memoirs of the A.M.S., 2003, p. 93 pages.