

Topologie et combinatoire d'arrangements de droites complexes

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

Séminaire de Géométrie et Topologie
Genève, 7 Décembre 2017



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement central d'hyperplans dans \mathbb{K}^{n+1} : famille finie



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement affine d'hyperplans dans \mathbb{K}^{n+1} : famille finie



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{K})$: famille finie

Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement de droites $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: famille finie



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement central d'hyperplans dans \mathbb{K}^{n+1} : famille finie

Combinatoire

Matroïd (*dépendance linéaire sans équations*) : poset d'intersections avec l'inclusion renversée



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement de droites $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: famille finie

Combinatoire

Modèle d'intersections

Arrangements et combinatoire

A arrangement de droites $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: famille finie

Combinatoire

Modèle d'intersections

Definition

Combinatoire de droites $\mathcal{C} := (\mathcal{L}, \mathcal{P})$, où $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$ tel que

- ▶ $\forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, l_1 \neq l_2, \exists ! p \in \mathcal{P}$ tel que $l_1, l_2 \in p$
- ▶ $\forall p \in \mathcal{P}, m_p := \#p \geq 2$.



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement de droites $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: famille finie

Combinatoire

Modèle d'intersections

Definition

Combinatoire de droites $\mathcal{C} := (\mathcal{L}, \mathcal{P})$, où $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$ tel que

- ▶ $\forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, l_1 \neq l_2, \exists ! p \in \mathcal{P}$ tel que $l_1, l_2 \in p$
- ▶ $\forall p \in \mathcal{P}, m_p := \#p \geq 2$.

Espace de réalisation d'une combinatoire de droites

- ▶ \mathcal{A} arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \implies \mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{A}, \{\text{points multiples}\}) \leftrightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{P})$$



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement de droites $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: famille finie

Combinatoire

Modèle d'intersections

Definition

Combinatoire de droites $\mathcal{C} := (\mathcal{L}, \mathcal{P})$, où $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$ tel que

- ▶ $\forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, l_1 \neq l_2, \exists ! p \in \mathcal{P}$ tel que $l_1, l_2 \in p$
- ▶ $\forall p \in \mathcal{P}, m_p := \#p \geq 2$.

Espace de réalisation d'une combinatoire de droites

- ▶ \mathcal{A} arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \implies \mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{A}, \{\text{points multiples}\}) \leftrightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{P})$$

- ▶ $\Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}\}$ *espace de réalisation*



Arrangements et combinatoire

\mathcal{A} arrangement de droites $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$: famille finie

Combinatoire

Modèle d'intersections

Definition

Combinatoire de droites $\mathcal{C} := (\mathcal{L}, \mathcal{P})$, où $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$ tel que

- ▶ $\forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, l_1 \neq l_2, \exists ! p \in \mathcal{P}$ tel que $l_1, l_2 \in p$
- ▶ $\forall p \in \mathcal{P}, m_p := \#p \geq 2$.

Espace de réalisation d'une combinatoire de droites

- ▶ \mathcal{A} arrangement de droites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \implies \mathcal{C}(\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{A}, \{\text{points multiples}\}) \leftrightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{P})$$

- ▶ $\Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}\}$ *espace de réalisation*
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}) := \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}) / \text{PGL}(3; \mathbb{K})$ *espace de modules*



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

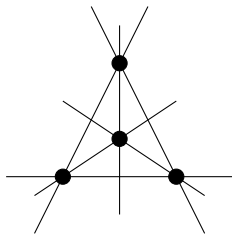
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

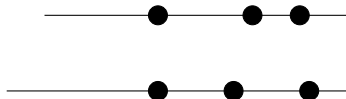
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ *Combinatoire de Ceva* :



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

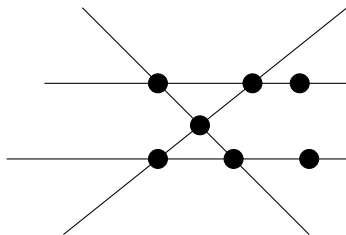
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ *Combinatoire de Pappus*



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

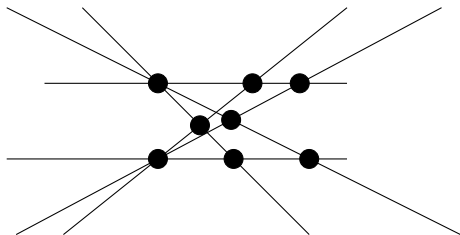
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ *Combinatoire de Pappus*



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

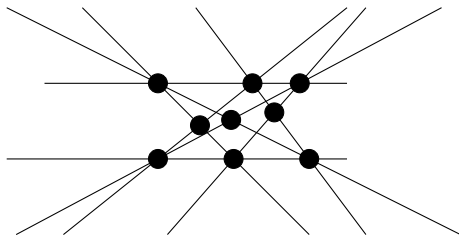
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ *Combinatoire de Pappus*



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

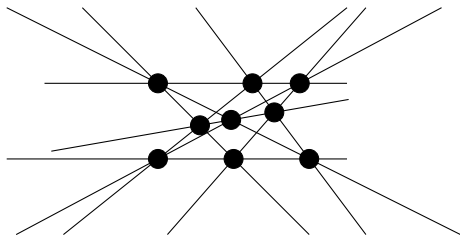
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ *Combinatoire de Pappus*



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

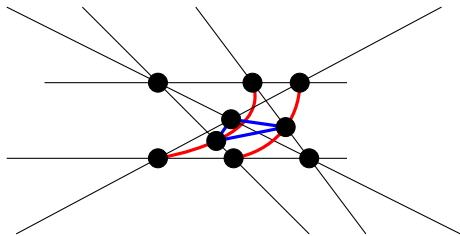
- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ *Combinatoire de Pappus*



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ \mathcal{C} *Combinatoire non-Pappus* (les trois points ne sont pas alignés) : $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}) = \emptyset$



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ Si \mathcal{C} n'a pas de points doubles, $\#\mathcal{P} > 1$: $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = \emptyset$



Espaces de réalisation et modules I

Exemples et commentaires I

- ▶ *Combinatoire de points* \mathcal{C}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#\mathcal{P} \leq 1$.
 - ▶ $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_n) = 1$ if $n = 1, 2, 3$.
 - ▶ $\dim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}_4) = 1$ paramétré par le *birapport* (à permutation près).
- ▶ *Combinatoire générique* \mathcal{G}_n : $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, $\#p = 2, \forall p \in \mathcal{P}$.
- ▶ $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{G}_n)$ connexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ Si \mathcal{C} n'a pas de points doubles, $\#\mathcal{P} > 1$: $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = \emptyset$
- ▶ $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3) = 0$.

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x - \zeta y)(x - \bar{\zeta} y), \quad \zeta = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$



Espaces de réalisation et modules II

Exemples et commentaires II

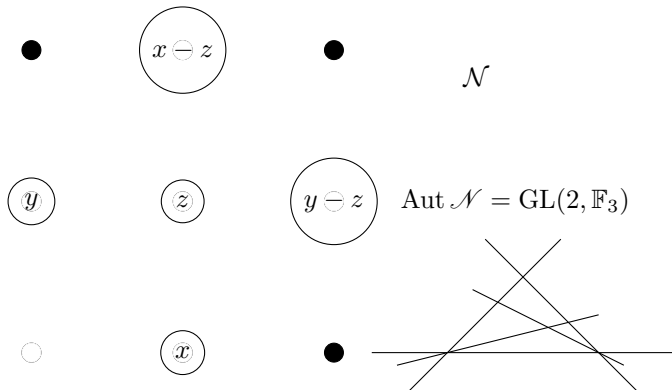
- ▶ *Combinatoire de McLane \mathcal{N} .*



Espaces de réalisation et modules II

Exemples et commentaires II

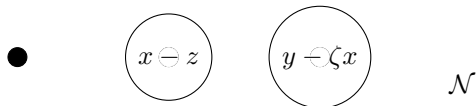
- *Combinatoire de McLane \mathcal{N} .*



Espaces de réalisation et modules II

Exemples et commentaires II

- *Combinatoire de McLane \mathcal{N} .*



Espaces de réalisation et modules II

Exemples et commentaires II

► *Combinatoire de McLane \mathcal{N} .*

$$(\zeta - 1)x - y + z$$

$$x - z$$

$$y - \zeta x$$

$$\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$$

$$\mathcal{N}_{\pm}$$

$$y$$

$$z$$

$$y - z$$

$$\text{Aut } \mathcal{N} = \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$$

$$\circ$$

$$x$$

$$x + (1 - \bar{\zeta})y - z$$



Espaces de réalisation et modules II

Exemples et commentaires II

- *Combinatoire de McLane \mathcal{N} .*

$$(\zeta - 1)x - y + z$$

$$x - z$$

$$y - \zeta x$$

$$\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$$

$$\mathcal{N}_{\pm}$$

$$y$$

$$z$$

$$y - z$$

$$\text{Aut } \mathcal{N} = \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$$

$$\circ$$

$$x$$

$$x + (1 - \bar{\zeta})y - z$$

- $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{N}) = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3, \mathbb{C}$.



Espaces de réalisation et modules II

Exemples et commentaires II

► *Combinatoire de McLane \mathcal{N} .*

$$(\zeta - 1)x - y + z$$

$$x - z$$

$$y - \zeta x$$

$$\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$$

$$\mathcal{N}_{\pm}$$

$$y$$

$$z$$

$$y - z$$

$$\text{Aut } \mathcal{N} = \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$$

$$0$$

$$x$$

$$x + (1 - \zeta)y - z$$

► $\#\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{N}) = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3, \mathbb{C}$.

► $\#\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathcal{N}) = 0$.



Combinatoire et topologie

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$



Combinatoire et topologie

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

Résultats positifs : Arnol'd (Math. Notes 1969), Brieskorn (Sém. Bourbaki 1971), Orlik-Solomon (Invent. Math. 1980)

La structure d'anneau de $H^*(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \bigcup \mathcal{A})$ est combinatoire



Combinatoire et topologie

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

Résultats positifs : Arnol'd (Math. Notes 1969), Brieskorn (Sém. Bourbaki 1971), Orlik-Solomon (Invent. Math. 1980)

La structure d'anneau de $H^*(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \bigcup \mathcal{A})$ est combinatoire

Objets combinatoires pour \mathcal{C}

$$\blacktriangleright \mathbb{Z}^{\mathcal{L}} = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{Z}x_{\ell},$$

$$\frac{\mathbb{Z}^{\mathcal{L}}}{\mathbb{Z}(\sum_{\ell \in \mathcal{L}} x_{\ell})} =: H_1^{\mathcal{C}} \cong H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}; \mathbb{Z}) \text{ si } \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$$



Combinatoire et topologie

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

Résultats positifs : Arnol'd (Math. Notes 1969), Brieskorn (Sém. Bourbaki 1971), Orlik-Solomon (Invent. Math. 1980)

La structure d'anneau de $H^*(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \bigcup \mathcal{A})$ est combinatoire

Objets combinatoires pour \mathcal{C}

$$\blacktriangleright \mathbb{Z}^{\mathcal{L}} = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{Z}x_{\ell},$$

$$\frac{\mathbb{Z}^{\mathcal{L}}}{\mathbb{Z}(\sum_{\ell \in \mathcal{L}} x_{\ell})} =: H_1^{\mathcal{C}} \cong H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}; \mathbb{Z}) \text{ si } \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$$

$$\blacktriangleright x_p = \sum_{\ell \in p} x_{\ell}$$

$$\mathbb{Z}\{x_L \wedge x_P \in H_1^{\mathcal{C}} \wedge H_1^{\mathcal{C}} \mid P < L\} = H_2^{\mathcal{C}} \cong H_2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}; \mathbb{Z})$$



Combinatoire et topologie

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

Résultats positifs : Arnol'd (Math. Notes 1969), Brieskorn (Sém. Bourbaki 1971), Orlik-Solomon (Invent. Math. 1980)

La structure d'anneau de $H^*(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \bigcup \mathcal{A})$ est combinatoire

Objets combinatoires pour \mathcal{C}

$$\blacktriangleright \mathbb{Z}^{\mathcal{L}} = \bigoplus_{\ell \in \mathcal{L}} \mathbb{Z}x_{\ell},$$

$$\frac{\mathbb{Z}^{\mathcal{L}}}{\mathbb{Z}(\sum_{\ell \in \mathcal{L}} x_{\ell})} =: H_1^{\mathcal{C}} \cong H_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}; \mathbb{Z}) \text{ si } \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$$

$$\blacktriangleright x_p = \sum_{\ell \in p} x_{\ell}$$

$$\mathbb{Z}\{x_L \wedge x_P \in H_1^{\mathcal{C}} \wedge H_1^{\mathcal{C}} \mid P < L\} = H_2^{\mathcal{C}} \cong H_2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}; \mathbb{Z})$$

$$\blacktriangleright H_{\mathcal{C}}^0 = \mathbb{Z}, H_{\mathcal{C}}^j \cong H^j(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}; \mathbb{Z}) \text{ dual de } H_j^{\mathcal{C}}, j = 1, 2.$$



Arrangements de Rybnikov

Théorème

Il y a deux arrangements de droites $\mathcal{B}_{++}, \mathcal{B}_{+-}$ ayant la même combinatoire \mathcal{B} (13 droites) et tels que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{++}) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{+-})$

Arrangements de Rybnikov

Théorème

Il y a deux arrangements de droites $\mathcal{B}_{++}, \mathcal{B}_{+-}$ ayant la même combinatoire \mathcal{B} (13 droites) et tels que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{++}) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{+-})$

On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement

- ▶ *Funct. Anal. Appl.* **45** (2011), no. 2, 137–148



Arrangements de Rybnikov

Théorème

Il y a deux arrangements de droites $\mathcal{B}_{++}, \mathcal{B}_{+-}$ ayant la même combinatoire \mathcal{B} (13 droites) et tels que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{++}) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{+-})$

On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement

▶ [arXiv:math/9805056](https://arxiv.org/abs/math/9805056)

▶ *Funct. Anal. Appl.* **45** (2011), no. 2, 137–148



Arrangements de Rybnikov

Théorème

Il y a deux arrangements de droites $\mathcal{B}_{++}, \mathcal{B}_{+-}$ ayant la même combinatoire \mathcal{B} (13 droites) et tels que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{++}) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{+-})$

On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement

- ▶ 1994 prépublication
 - ▶ arXiv:math/9805056
-
- ▶ *Funct. Anal. Appl.* **45** (2011), no. 2, 137–148



Arrangements de Rybnikov

Théorème

Il y a deux arrangements de droites $\mathcal{B}_{++}, \mathcal{B}_{+-}$ ayant la même combinatoire \mathcal{B} (13 droites) et tels que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{++}) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}_{+-})$

On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement

- ▶ 1994 prépublication
- ▶ arXiv:math/9805056
——, Carmona, Cogolludo, Marco, Invariants of combinatorial line arrangements and Rybnikov's example, *Singularity Theory and its Applications*, Adv. Studies in Pure Math., vol. 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, 1–34
- ▶ *Funct. Anal. Appl.* **45** (2011), no. 2, 137–148



Théorème (Rybnikov)

$\exists \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ *isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.*

Rybnykov et McLane

Théorème (Rybnykov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ *isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.*

Idée de la preuve.

- ▶ $\gamma_n(G)$ est la suite centrale descendante de G/G''
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_{\pm})$



Rybnikov et McLane

Théorème (Rybnikov)

$\exists \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.

Idée de la preuve.

- ▶ $\gamma_n(G)$ est la suite centrale descendante de G/G''
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_{\pm})$
- ▶ Supposons $\varphi : G_+ \xrightarrow{\cong} G_-$, induisant $\mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{N}}}$



Rybnikov et McLane

Théorème (Rybnikov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.

Idée de la preuve.

- ▶ $\gamma_n(G)$ est la suite centrale descendante de G/G''
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_{\pm})$
- ▶ Supposons $\varphi : G_+ \xrightarrow{\cong} G_-$, induisant $\mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{N}}}$
- ▶ $\varphi : G_+/\gamma_4 G_+ \rightarrow G_-/\gamma_4 G_-$

$$x_i^+ \mapsto x_i^- \cdot \prod [x_j^-, x_k^-]^{n_{ijk}}.$$



Rybnikov et McLane

Théorème (Rybnikov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.

Idée de la preuve.

- ▶ $\gamma_n(G)$ est la suite centrale descendante de G/G''
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_{\pm})$
- ▶ Supposons $\varphi : G_+ \xrightarrow{\cong} G_-$, induisant $\mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{N}}}$
- ▶ $\varphi : G_+/\gamma_4 G_+ \rightarrow G_-/\gamma_4 G_-$

$$x_i^+ \mapsto x_i^- \cdot \prod [x_j^-, x_k^-]^{n_{ijk}}.$$

- ▶ Équations linéaires entières sur n_{ijk} : réduites à 49 équations linéaires indépendantes avec 56 inconnues.



Rybnikov et McLane

Théorème (Rybnikov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.

Idée de la preuve.

- ▶ $\gamma_n(G)$ est la suite centrale descendante de G/G''
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_{\pm})$
- ▶ Supposons $\varphi : G_+ \xrightarrow{\cong} G_-$, induisant $\mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{N}}}$
- ▶ $\varphi : G_+/\gamma_4 G_+ \rightarrow G_-/\gamma_4 G_-$

$$x_i^+ \mapsto x_i^- \cdot \prod [x_j^-, x_k^-]^{n_{ijk}}.$$

- ▶ Équations linéaires entières sur n_{ijk} : réduites à 49 équations linéaires indépendantes avec 56 inconnues.
- ▶ Anneau *minimal* pour les solutions : $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$.



Théorème (Rybniakov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ *isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.*

Corollaire

$\# \rho : (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_+) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_-)$ *homéomorphisme préservant l'orientation et l'ordre.*

Théorème (Rybnikov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.

Corollaire

$\# \rho : (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_+) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_-)$ homéomorphisme preservant l'orientation et l'ordre.

Orientation

$\exists \rho : (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_+) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_-)$ homéomorphisme preservant l'ordre et renversant l'orientation : *conjugaison complexe*.



Théorème (Rybnikov)

$\# \varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_+) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{N}_-)$ isomorphisme de groupes induisant l'identité en homologie.

Corollaire

$\# \rho : (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_+) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_-)$ homéomorphisme préservant l'orientation et l'ordre.

Orientation

$\exists \rho : (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_+) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_-)$ homéomorphisme préservant l'ordre et renversant l'orientation : *conjugaison complexe*.

Ordre

$\exists \rho : (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_+) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{N}_-)$ homéomorphisme préservant l'orientation : $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Exemple de Rybnikov

Combinatoire de Rybnikov

$\mathcal{B} = \mathcal{N}_1 \cup_{xz(x-z)=0} \mathcal{N}_2$ (les autres couples de 5 droites en position générique)



Exemple de Rybnikov

Combinatoire de Rybnikov

$\mathcal{B} = \mathcal{N}_1 \cup_{xz(x-z)=0} \mathcal{N}_2$ (les autres couples de 5 droites en position générique)

Idées de la preuve du Théorème de Rybnikov.

Supposons que les groupes sont isomorphes.



Exemple de Rybnikov

Combinatoire de Rybnikov

$\mathcal{B} = \mathcal{N}_1 \cup_{xz(x-z)=0} \mathcal{N}_2$ (les autres couples de 5 droites en position générique)

Idées de la preuve du Théorème de Rybnikov.

Supposons que les groupes sont isomorphes.

1. L'isomorphisme induit $\pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{B}}}$ (purement combinatoire : rigidité homologique d'une combinatoire).



Exemple de Rybnikov

Combinatoire de Rybnikov

$\mathcal{B} = \mathcal{N}_1 \cup_{xz(x-z)=0} \mathcal{N}_2$ (les autres couples de 5 droites en position générique)

Idées de la preuve du Théorème de Rybnikov.

Supposons que les groupes sont isomorphes.

1. L'isomorphisme induit $\pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{B}}}$ (purement combinatoire : rigidité homologique d'une combinatoire).
2. Des arguments combinatoires plus le Théorème sur les arrangements de McLane donnent une contradiction.

□



Exemple de Rybnikov

Combinatoire de Rybnikov

$\mathcal{B} = \mathcal{N}_1 \cup_{xz(x-z)=0} \mathcal{N}_2$ (les autres couples de 5 droites en position générique)

Idées de la preuve du Théorème de Rybnikov.

Supposons que les groupes sont isomorphes.

1. L'isomorphisme induit $\pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{B}}}$ (purement combinatoire : rigidité homologique d'une combinatoire).
2. Des arguments combinatoires plus le Théorème sur les arrangements de McLane donnent une contradiction.

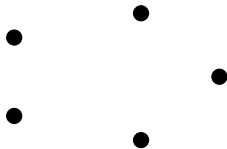


Preuve alternative

On suit les mêmes idées que pour les arrangements de McLane : 168 équations linéaires entières indépendentes avec 180 inconnues ; l'anneau *minimal* des solutions est $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$.



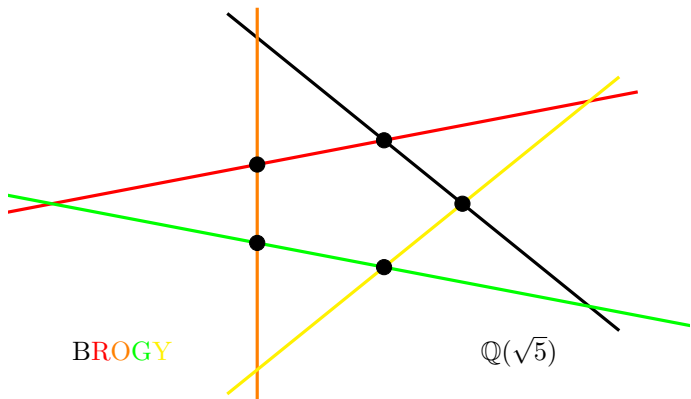
Pentagone



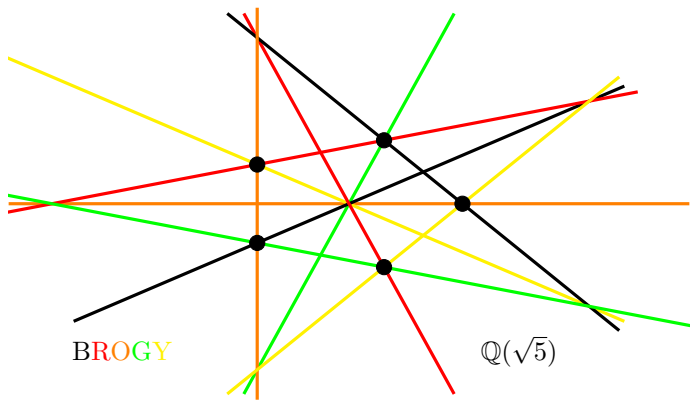
$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$



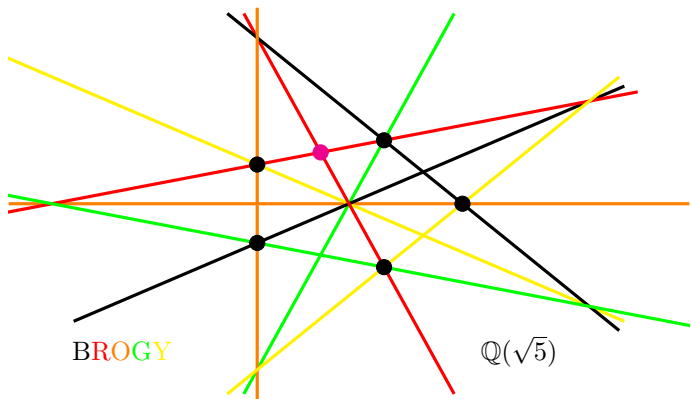
Pentagone



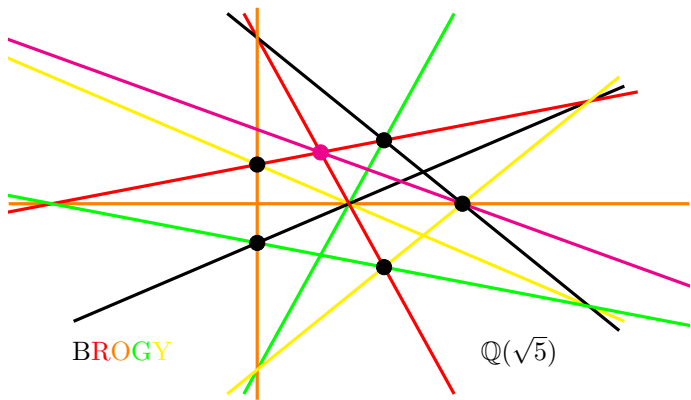
Pentagone



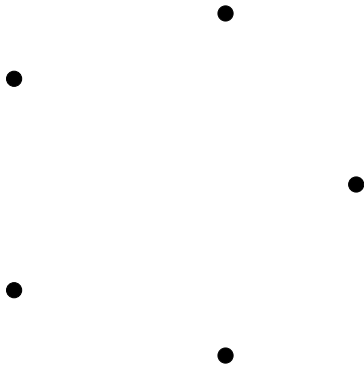
Pentagone



Pentagone



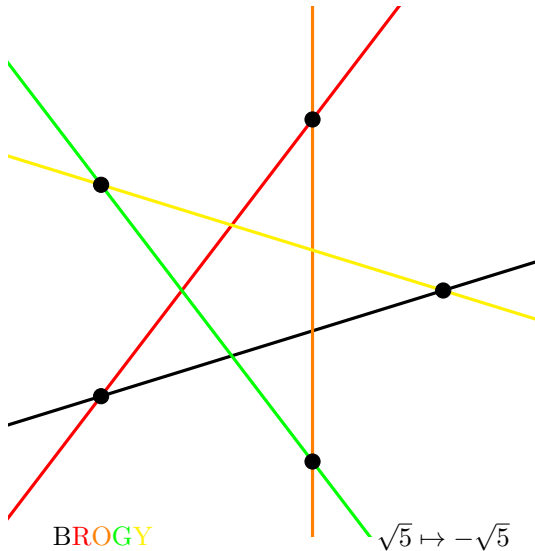
Pentagramme



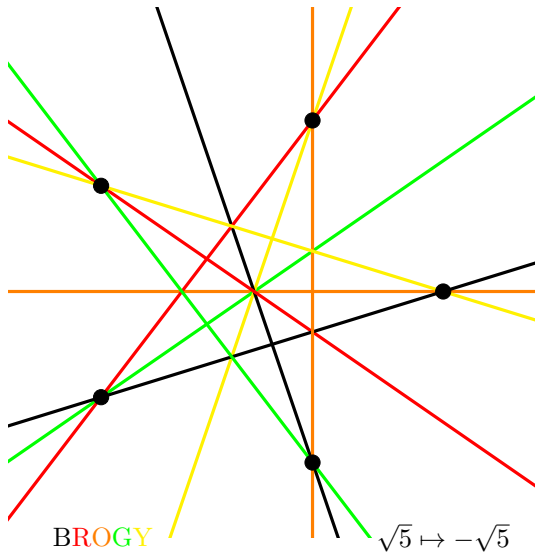
$$\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$$



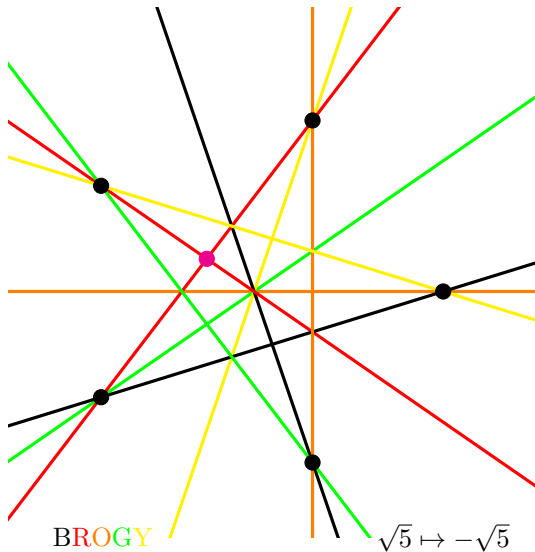
Pentagramme



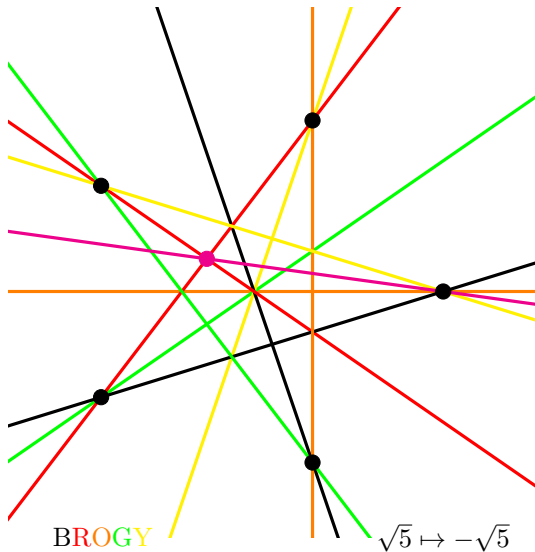
Pentagramme



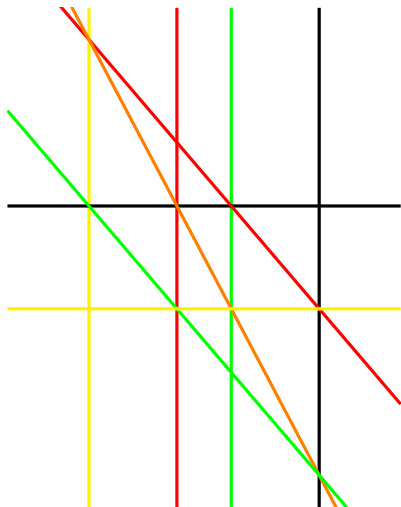
Pentagramme



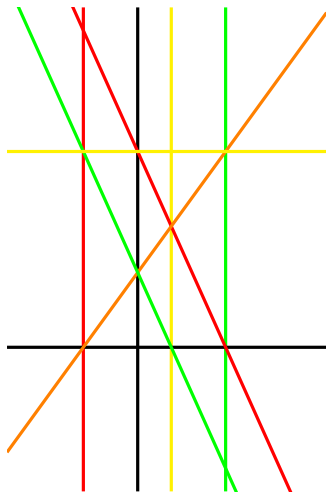
Pentagramme



Versions verticales



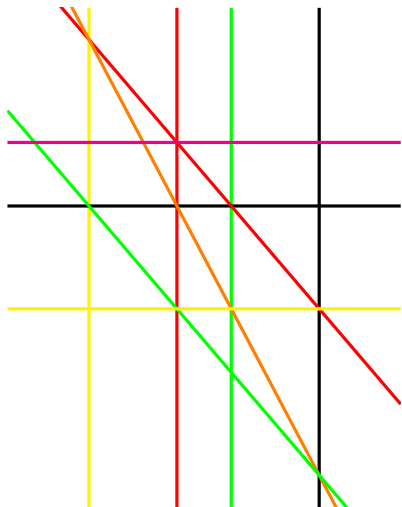
$\sqrt{5}$



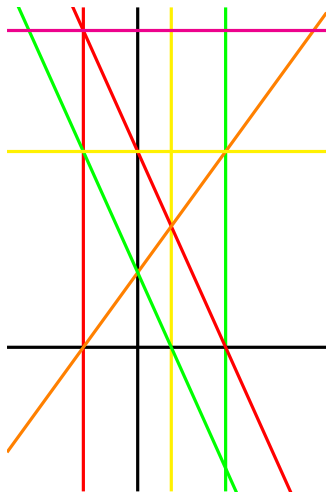
$-\sqrt{5}$



Versions verticales



$\sqrt{5}$



$-\sqrt{5}$



Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$



Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$

Théorème (___, Carmona, Cogolludo, Marco, Compos. Math. 2005)

Il n'y a pas d'homéomorphisme $\Phi : (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{\sqrt{5}}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{-\sqrt{5}})$.



Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$

Théorème (___, Carmona, Cogolludo, Marco, Compos. Math. 2005)

Il n'y a pas d'homéomorphisme $\Phi : (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{\sqrt{5}}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{-\sqrt{5}})$.

Commentaires



Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$

Théorème (___, Carmona, Cogolludo, Marco, Compos. Math. 2005)

Il n'y a pas d'homéomorphisme $\Phi : (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{\sqrt{5}}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{-\sqrt{5}})$.

Commentaires

- ▶ Argument clé : monodromie de tresses.



Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$

Théorème (___, Carmona, Cogolludo, Marco, Compos. Math. 2005)

Il n'y a pas d'homéomorphisme $\Phi : (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{\sqrt{5}}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{-\sqrt{5}})$.

Commentaires

- ▶ Argument clé : monodromie de tresses.
- ▶ Pas de renseignements sur les types d'homéomorphisme de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\pm\sqrt{5}}$.

Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$

Théorème (___, Carmona, Cogolludo, Marco, Compos. Math. 2005)

Il n'y a pas d'homéomorphisme $\Phi : (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{\sqrt{5}}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{-\sqrt{5}})$.

Commentaires

- ▶ Argument clé : monodromie de tresses.
- ▶ Pas de renseignements sur les types d'homéomorphisme de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\pm\sqrt{5}}$.
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\pm\sqrt{5}})$.



Monodromie de tresses et topologie

Espace des modules

$$\#\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2$$

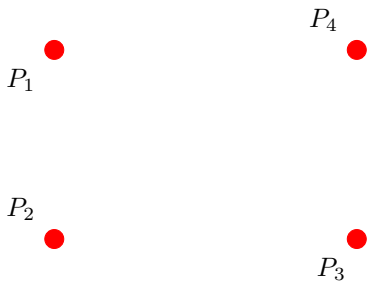
Théorème (___, Carmona, Cogolludo, Marco, Compos. Math. 2005)

Il n'y a pas d'homéomorphisme $\Phi : (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{\sqrt{5}}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_{-\sqrt{5}})$.

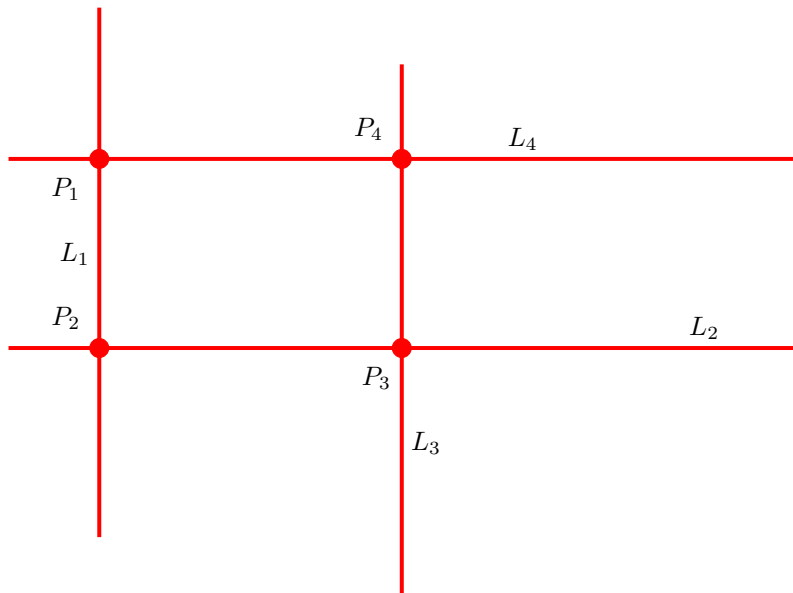
Commentaires

- ▶ Argument clé : monodromie de tresses.
- ▶ Pas de renseignements sur les types d'homéomorphisme de $\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\pm\sqrt{5}}$.
- ▶ $G_{\pm} = \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\pm\sqrt{5}})$.
- ▶ G_{\pm} ont les mêmes quotients finis (on ne sait pas s'ils sont isomorphes!).

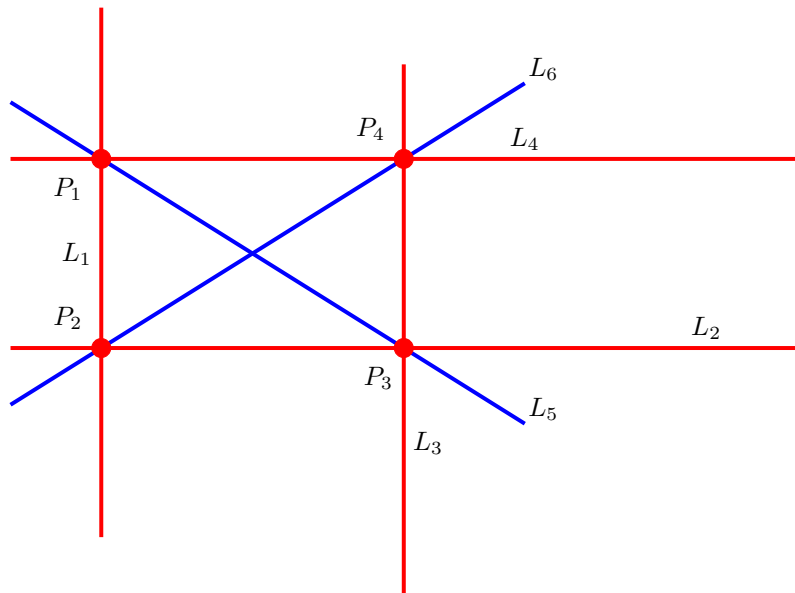
Combinatoire de Guerville



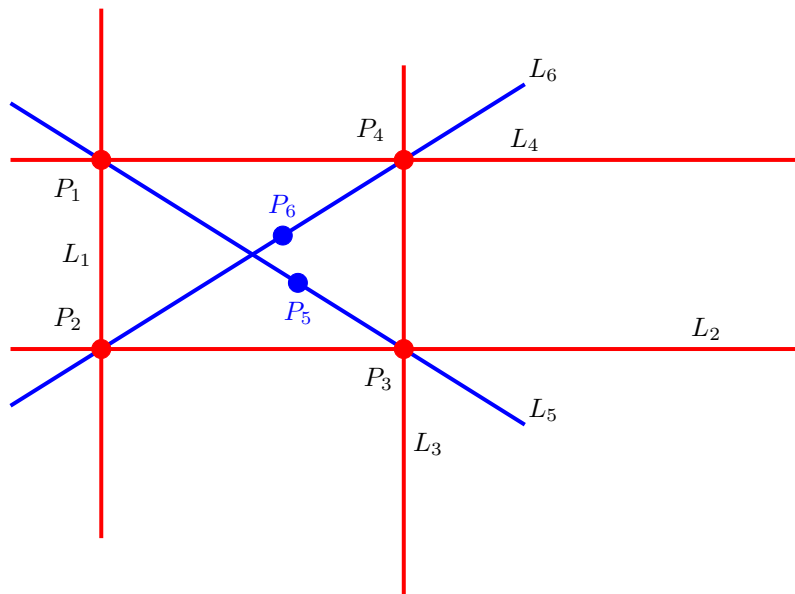
Combinatoire de Guerville



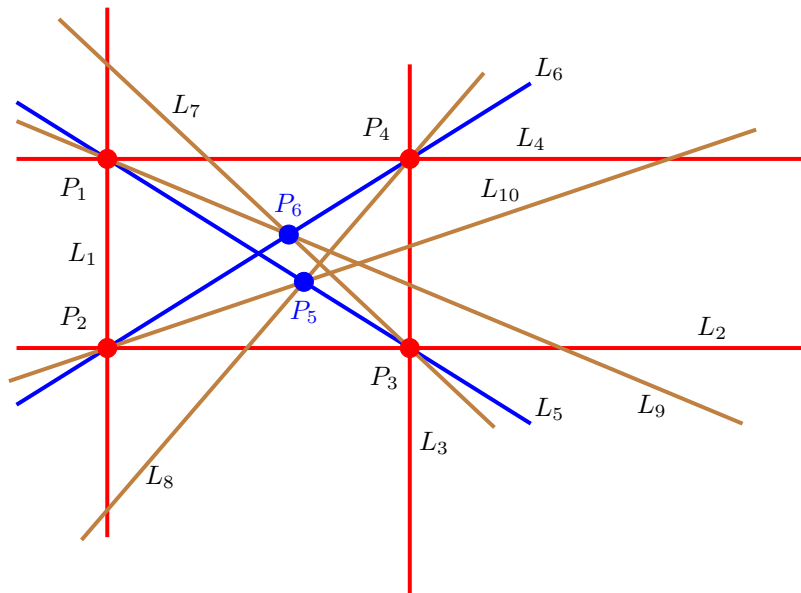
Combinatoire de Guerville



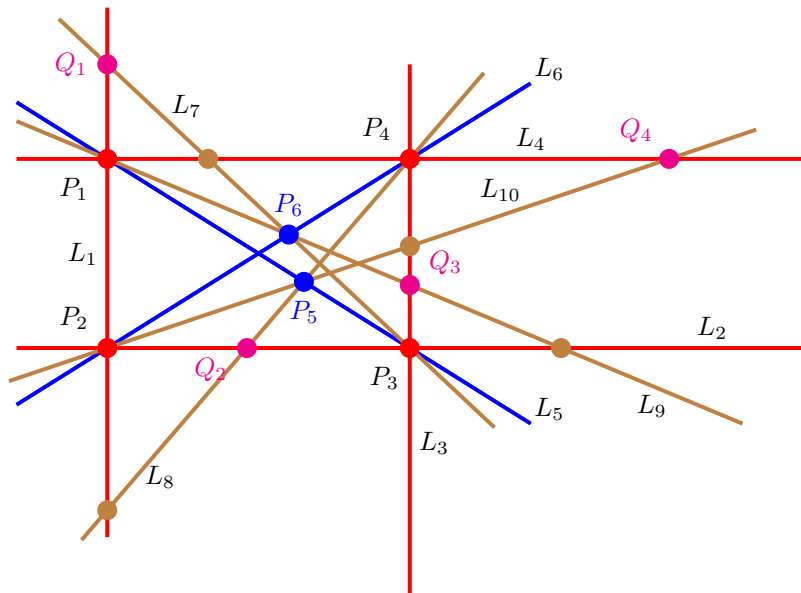
Combinatoire de Guerville



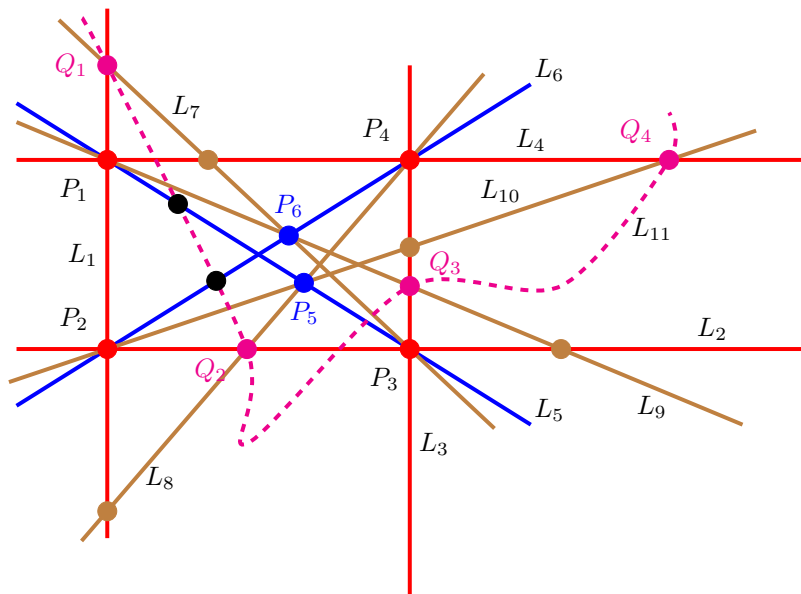
Combinatoire de Guerville



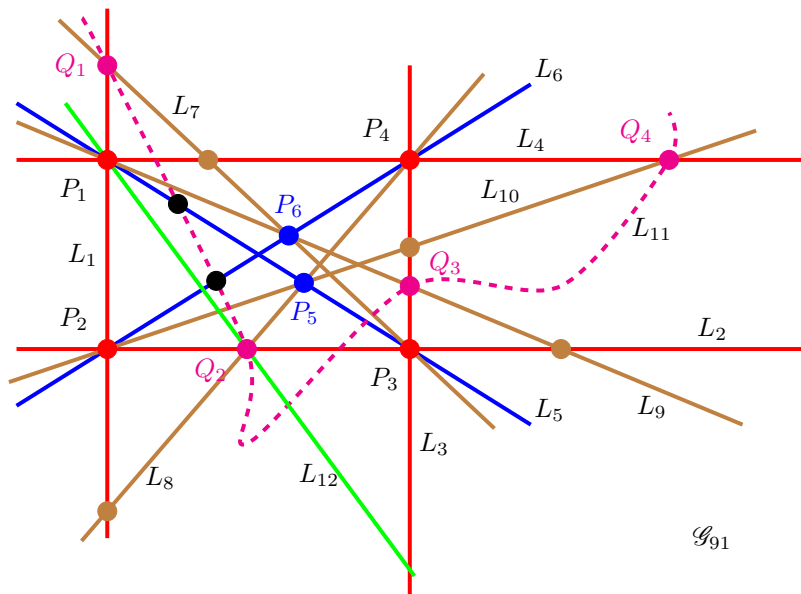
Combinatoire de Guerville



Combinatoire de Guerville



Combinatoire de Guerville



Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .

Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .
- ▶ Il n'y a pas d'homéomorphisme (preservant toutes les orientations) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_1}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_2})$ si $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .
- ▶ Il n'y a pas d'homéomorphisme (preservant toutes les orientations) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_1}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_2})$ si $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Corollaire

Il n'y a pas d'homéomorphisme $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$.

Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .
- ▶ Il n'y a pas d'homéomorphisme (preservant toutes les orientations) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_1}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_2})$ si $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Corollaire

Il n'y a pas d'homéomorphisme $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$.

Démonstration.



Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .
- ▶ Il n'y a pas d'homéomorphisme (preservant toutes les orientations) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_1}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_2})$ si $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Corollaire

Il n'y a pas d'homéomorphisme $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$.

Démonstration.

- ▶ On utilise un sort de *nombre d'enlacement*.



Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 2016)

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .
- ▶ Il n'y a pas d'homéomorphisme (preservant toutes les orientations) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_1}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_2})$ si $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Corollaire

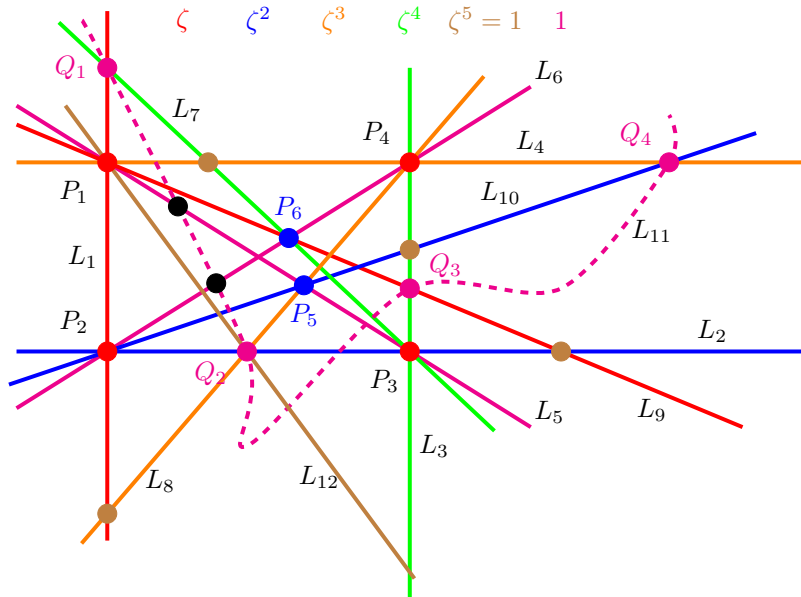
Il n'y a pas d'homéomorphisme $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$.

Démonstration.

- ▶ On utilise un sort de *nombre d'enlacement*.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{G}_{91}} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\xi^5 = 1$.



Caractère



Exemple de Guerville

Théorème (Guerville-Ballé, Geom. Topol. 20 (2016))

- ▶ $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{91}) = \{\mathcal{G}_{91,\zeta} \mid \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0\}$; ils admettent des équations conjugués par un élément du groupe de Galois du corps cyclotomique \mathbb{K}_5 .
- ▶ Il n'y a pas d'homéomorphisme (preservant toutes les orientations) $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_1}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta_2})$ si $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Corollaire

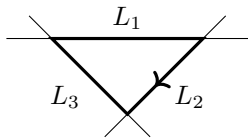
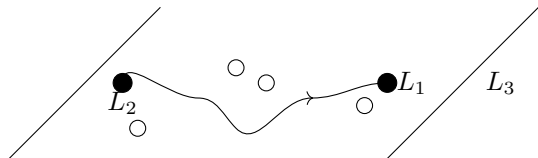
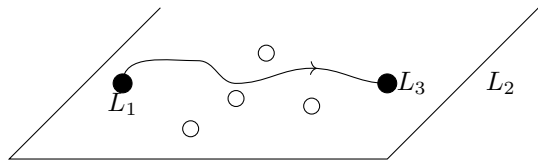
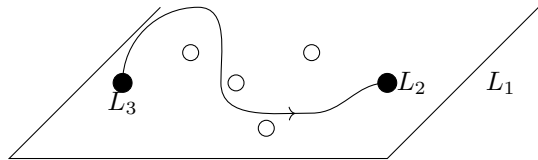
Il n'y a pas d'homéomorphisme $(\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta}) \rightarrow (\mathbb{P}^2, \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$.

Démonstration.

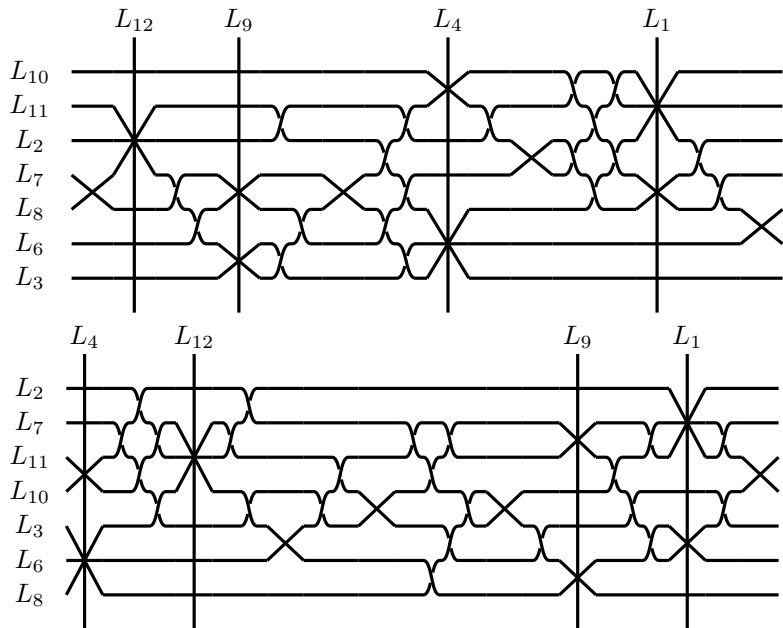
- ▶ On utilise un sort de *nombre d'enlacement*.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{G}_{91}} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\xi^5 = 1$.
- ▶ Un cycle spécial γ $\xi(\gamma) = \zeta_j$: invariant topologique.



Cycle



Diagrammes de câblage



Groupe fondamental I

- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ont des complétions profinies isomorphes.

Groupe fondamental I

- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ont des complétions profinies isomorphes.
- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^4})$ sont isomorphes.

Groupe fondamental I

- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ont des complétions profinies isomorphes.
- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^4})$ sont isomorphes.

Théorème (____, Cogolludo, Guerville-Ballé, Marco, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* 2017)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ne sont pas isomorphes.



Groupe fondamental I

- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ont des complétions profinies isomorphes.
- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^4})$ sont isomorphes.

Théorème (____, Cogolludo, Guerville-Ballé, Marco, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* 2017)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ne sont pas isomorphes.

Premier pas

$\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ est un isomorphisme $\implies \varphi_* = \pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$.



Groupe fondamental I

- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ont des complétions profinies isomorphes.
- ▶ Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^4})$ sont isomorphes.

Théorème (____, Cogolludo, Guerville-Ballé, Marco, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM* 2017)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta})$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{G}_{91,\zeta^2})$ ne sont pas isomorphes.

Premier pas

$\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ est un isomorphisme $\implies \varphi_* = \pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$.

- ▶ Purement combinatoire.



Groupe fondamental II

Théorème

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta)$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ ne sont pas isomorphes bien que leurs complétions profinies le sont.

Premier pas

$\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ est un isomorphisme $\implies \varphi_* = \pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$.

Deuxième pas

Il n'y a pas d'isomorphisme $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ induisant $\varphi_* = \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$

Groupe fondamental II

Théorème

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta)$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ ne sont pas isomorphes bien que leurs complétions profinies le sont.

Premier pas

$\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ est un isomorphisme $\implies \varphi_* = \pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$.

Deuxième pas

Il n'y a pas d'isomorphisme $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ induisant $\varphi_* = \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$

On utilise la même méthode pour les arrangements de Rybnikov : 241 équations linéaires entières indépendentes avec 253 inconnues dont l'anneau *minimal* des solutions est $\frac{1}{5}\mathbb{Z}$

Groupe fondamental II

Théorème

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta)$ et $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ ne sont pas isomorphes bien que leurs complétions profinies le sont.

Premier pas

$\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ est un isomorphisme $\implies \varphi_* = \pm \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$.

Deuxième pas

Il n'y a pas d'isomorphisme $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ induisant $\varphi_* = \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$

On utilise la même méthode pour les arrangements de Rybnikov : 241 équations linéaires entières indépendantes avec 253 inconnues dont l'anneau *minimal* des solutions est $\frac{1}{5}\mathbb{Z}$

Troisième pas

Il n'y a pas d'isomorphisme $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^3})$ induisant $\varphi_* = \mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}} \Leftrightarrow \nexists$ isomorphisme $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_\zeta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_{\zeta^2})$ induisant $\varphi_* = -\mathbf{1}_{H_1^{\mathcal{G}_{91}}}$



Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3

Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$

Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.

Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.



Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}^*, \xi(\mu_{L_j}) = 1, \xi(\mu_{M_j}) = -1$

Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\vee} \rightarrow \mathbb{C}^*, \xi(\mu_{L_j}) = 1, \xi(\mu_{M_j}) = -1$
- ▶ γ cycle triangulaire spécial : $\xi(\gamma)$ est un invariant topologique.



Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\vee} \rightarrow \mathbb{C}^*, \xi(\mu_{L_j}) = 1, \xi(\mu_{M_j}) = -1$
- ▶ γ cycle triangulaire spécial : $\xi(\gamma)$ est un invariant topologique.

Théorème (Guerville-Ballé, Viu-Sos, [arXiv:1702.00922](https://arxiv.org/abs/1702.00922))



Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites M_1, \dots, M_{2n} , $P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i$, $P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\xi(\mu_{L_j}) = 1$, $\xi(\mu_{M_j}) = -1$
- ▶ γ cycle triangulaire spécial : $\xi(\gamma)$ est un invariant topologique.

Théorème (Guerville-Ballé, Viu-Sos, [arXiv:1702.00922](https://arxiv.org/abs/1702.00922))

- ▶ *A arrangement complexifié réel dont la combinatoire est \mathcal{V} .*



Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}^*, \xi(\mu_{L_j}) = 1, \xi(\mu_{M_j}) = -1$
- ▶ γ cycle triangulaire spécial : $\xi(\gamma)$ est un invariant topologique.

Théorème (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

- ▶ *A arrangement complexifié réel dont la combinatoire est \mathcal{V} .*
- ▶ *Les droites passant par $\check{L}_i \in \check{\mathbb{P}}^2(\mathbb{R})$ déterminent une décomposition cellulaire de $\check{\mathbb{P}}^2(\mathbb{R})$ (avec quatre 2-céllules).*

Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}^*, \xi(\mu_{L_j}) = 1, \xi(\mu_{M_j}) = -1$
- ▶ γ cycle triangulaire spécial : $\xi(\gamma)$ est un invariant topologique.

Théorème (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

- ▶ *A arrangement complexifié réel dont la combinatoire est \mathcal{V} .*
- ▶ *Les droites passant par $\check{L}_i \in \check{\mathbb{P}}^2(\mathbb{R})$ déterminent une décomposition cellulaire de $\check{\mathbb{P}}^2(\mathbb{R})$ (avec quatre 2-céllules).*
- ▶ *La parité $\varepsilon = \pm 1$ du nombre des points \check{M}_j dans chaque 2-céllule est constante.*



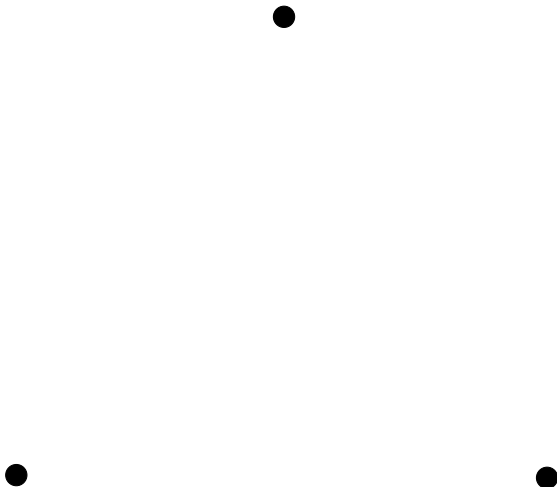
Arrangements de Guerville-Viu

- ▶ Trois droites en position générique : L_1, L_2, L_3 se coupent en P_1, P_2, P_3
- ▶ $2n$ droites $M_1, \dots, M_{2n}, P_i \notin M_j$
- ▶ Si $P \in L_i, P \neq P_j$, est un point multiple, sa multiplicité est impaire.
- ▶ En dehors de L_i , il n'y a que de points doubles.
- ▶ $\xi : H_1^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}^*, \xi(\mu_{L_j}) = 1, \xi(\mu_{M_j}) = -1$
- ▶ γ cycle triangulaire spécial : $\xi(\gamma)$ est un invariant topologique.

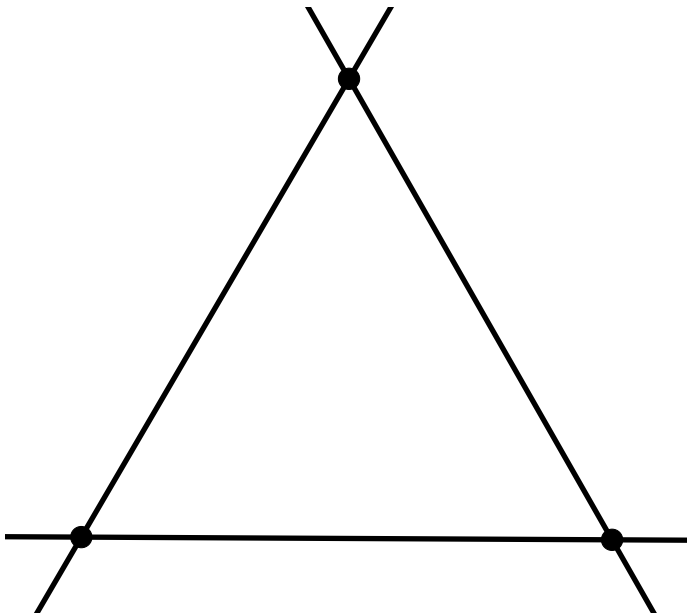
Théorème (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

- ▶ *A arrangement complexifié réel dont la combinatoire est \mathcal{V} .*
- ▶ *Les droites passant par $\check{L}_i \in \check{\mathbb{P}}^2(\mathbb{R})$ déterminent une décomposition cellulaire de $\check{\mathbb{P}}^2(\mathbb{R})$ (avec quatre 2-céllules).*
- ▶ *La parité $\varepsilon = \pm 1$ du nombre des points \check{M}_j dans chaque 2-céllule est constante.*
- ▶ $\xi(\gamma) = \varepsilon.$

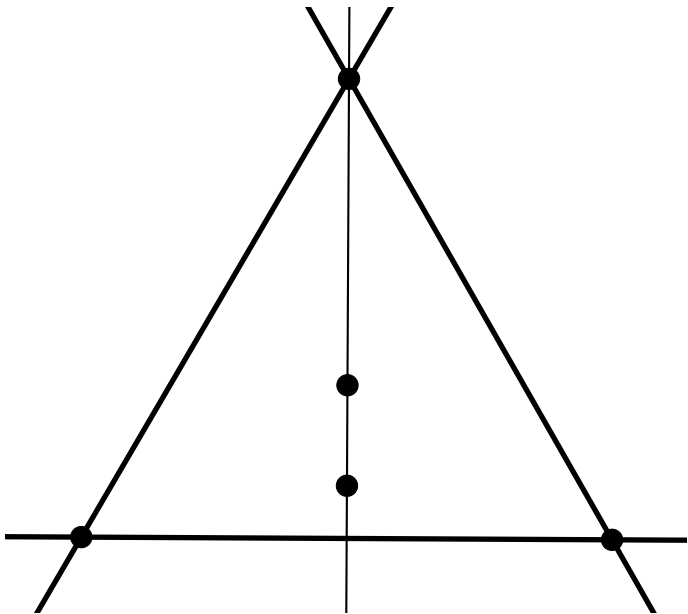
Dessin dual I



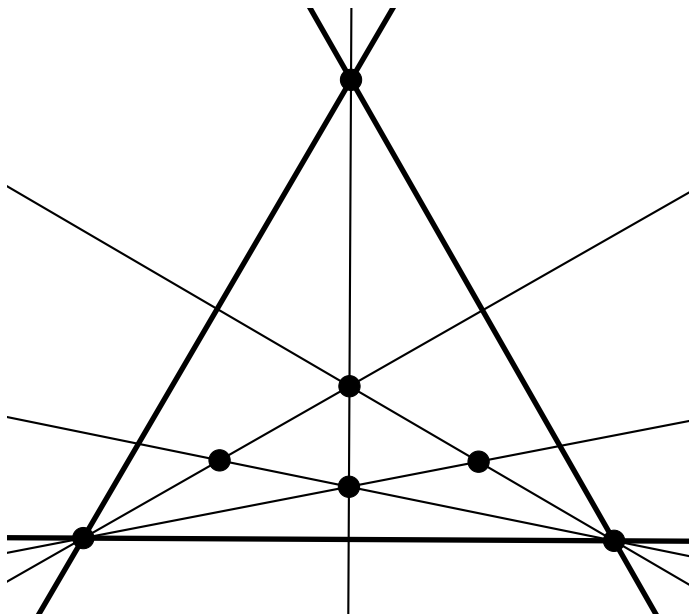
Dessin dual I



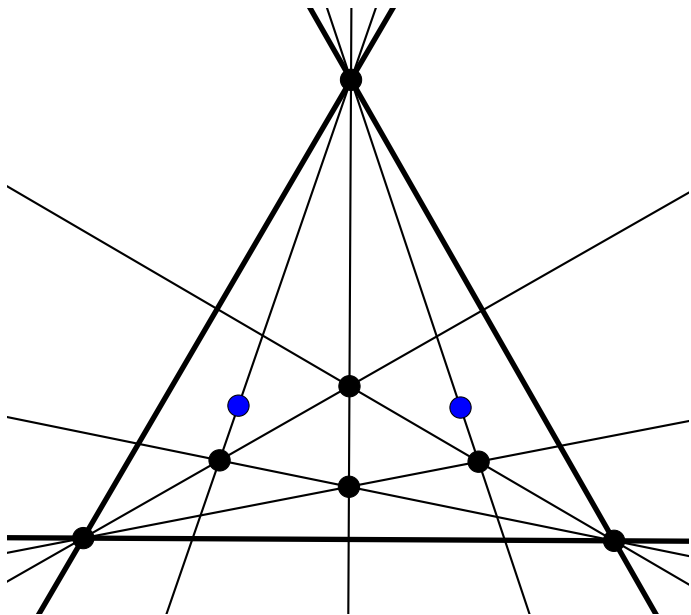
Dessin dual I



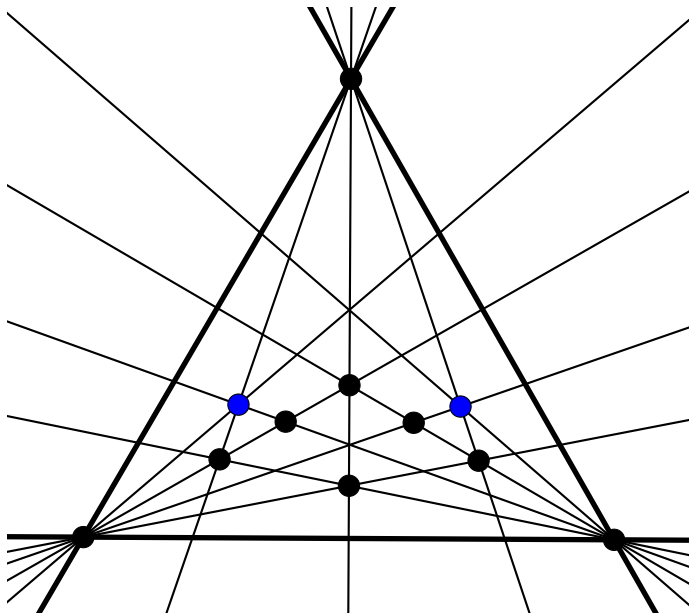
Dessin dual I



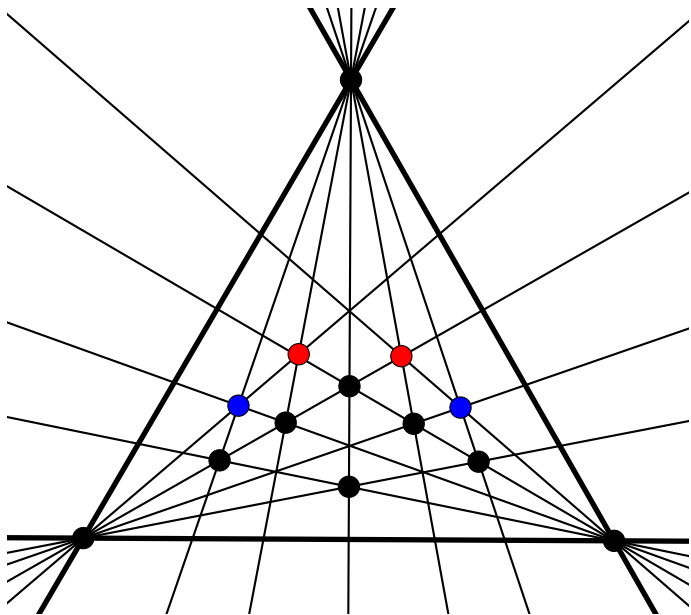
Dessin dual I



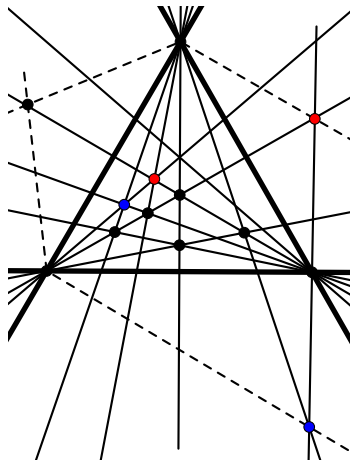
Dessin dual I



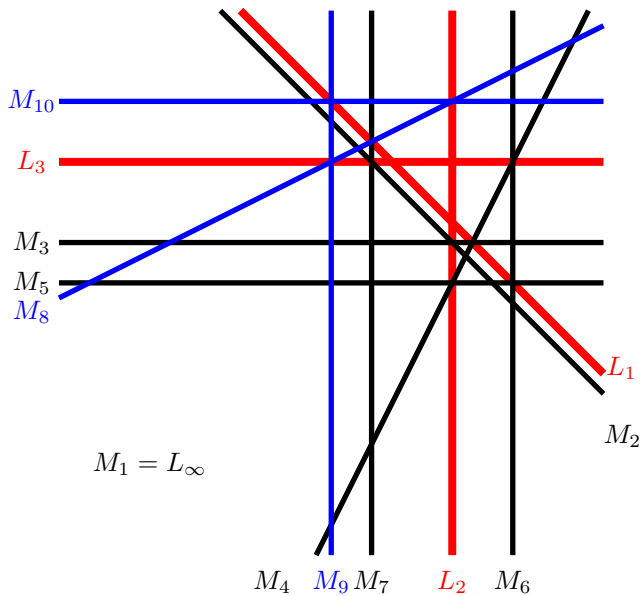
Dessin dual I



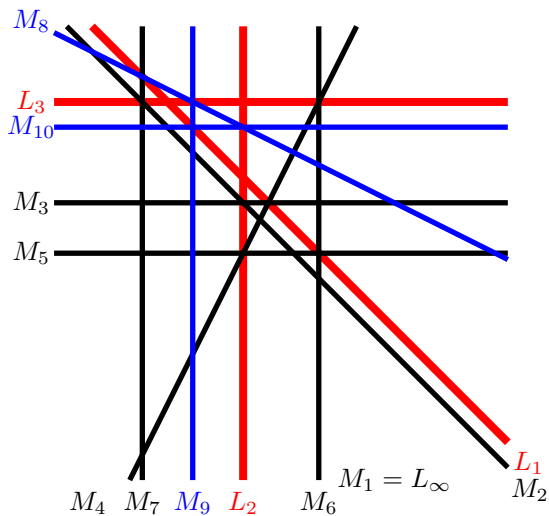
Dessin dual II



Arrangements \mathcal{A}_j^v



Arrangements \mathcal{A}_j^V



Nombre d'enlacement et groupe fondamental

Corollaire (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

Les paires $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$, provenant d'arrangements complexifiés réels ayant la même combinatoire \mathcal{V} , ne sont pas homéomorphes.

Nombre d'enlacement et groupe fondamental

Corollaire (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

Les paires $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$, provenant d'arrangements complexifiés réels ayant la même combinatoire \mathcal{V} , ne sont pas homéomorphes.

Théorème (____, Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1704.04152)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $\pi_2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$ ne sont pas isomorphes.



Nombre d'enlacement et groupe fondamental

Corollaire (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

Les paires $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$, provenant d'arrangements complexifiés réels ayant la même combinatoire \mathcal{V} , ne sont pas homéomorphes.

Théorème (____, Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1704.04152)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $\pi_2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$ ne sont pas isomorphes.

- ▶ Il s'agit du premier exemple de couples de Zariski complexifiés réels avec des groupes fondamentaux non isomorphes.



Nombre d'enlacement et groupe fondamental

Corollaire (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

Les paires $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$, provenant d'arrangements complexifiés réels ayant la même combinatoire \mathcal{V} , ne sont pas homéomorphes.

Théorème (____, Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1704.04152)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $\pi_2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$ ne sont pas isomorphes.

- ▶ Il s'agit du premier exemple de couples de Zariski complexifiés réels avec des groupes fondamentaux non isomorphes.
- ▶ Ils sont distingués par la torsion des gradués de la suite centrale descendante



Nombre d'enlacement et groupe fondamental

Corollaire (Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1702.00922)

Les paires $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $(\mathbb{P}^2, \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$, provenant d'arrangements complexifiés réels ayant la même combinatoire \mathcal{V} , ne sont pas homéomorphes.

Théorème (____, Guerville-Ballé, Viu-Sos, arXiv:1704.04152)

Les groupes $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_1^{\mathcal{V}})$ et $\pi_2(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}_2^{\mathcal{V}})$ ne sont pas isomorphes.

- ▶ Il s'agit du premier exemple de couples de Zariski complexifiés réels avec des groupes fondamentaux non isomorphes.
- ▶ Ils sont distingués par la torsion des gradués de la suite centrale descendante
- ▶ Les deux arrangements ont des comportements différents pour l'existence de coniques passant par 6 points multiples ou tangentes en 6 droites.

Merci !