Nodos que complican la topología

Seminario Rubio de Francia

Enrique Artal Bartolo

Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

18 de enero de 2007

Índice

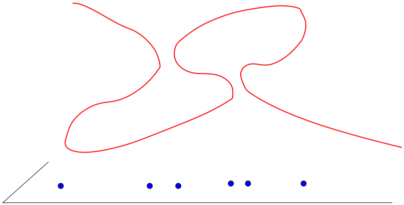
Índice

Variedades proyectivas lisas

- dim 1 Curvas algebraicas $\equiv$ superficies de Riemann
- dim 2 Ejemplos importantes para el estudio de variedades $\dim_{\mathbb{R}}$ 4

Técnica de trabajo

Proyectar

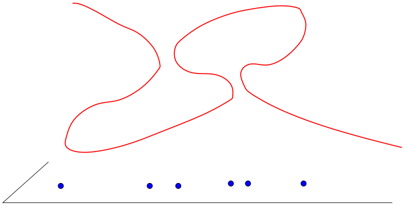


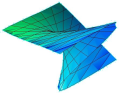
Variedades proyectivas lisas

- **dim 1** Curvas algebraicas $\equiv$ superficies de Riemann
- **dim 2** Ejemplos importantes para el estudio de variedades $\dim_{\mathbb{R}}$ 4

Técnica de trabajo

Proyectar



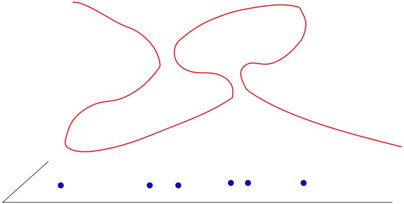


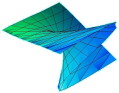
Variedades proyectivas lisas

- dim 1 Curvas algebraicas $\equiv$ superficies de Riemann
- dim 2 Ejemplos importantes para el estudio de variedades $\dim_{\mathbb{R}}$ 4

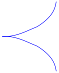
Técnica de trabajo

Proyectar





$$y^2 - x^3 = 0$$



Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).
- S^n subespacio proyectivo, $H \not\subset S$.

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).
- S^n subespacio proyectivo, $H \not\subset S$.
- $\pi : X \to S \equiv \mathbb{P}^n$

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).
- S^n subespacio proyectivo, $H \not\subset S$.
- $\pi : X \to S \equiv \mathbb{P}^n$
- $P \in X$, H_P $N - n$-subespacio tal que $P \in H_P$, $H \subset H_P$.

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).
- S^n subespacio proyectivo, $H \not\subset S$.
- $\pi : X \to S \equiv \mathbb{P}^n$
- $P \in X$, H_P $N - n$-subespacio tal que $P \in H_P$, $H \subset H_P$.
- $\pi(P) := H_P \cap S$.

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).
- S^n subespacio proyectivo, $H \not\subset S$.
- $\pi : X \to S \equiv \mathbb{P}^n$
- $P \in X$, H_P $N-n$-subespacio tal que $P \in H_P$, $H \subset H_P$.
- $\pi(P) := H_P \cap S$.
- $\exists Y \subset S$ hipersuperficie (discriminante) tal que $\forall Q \in S \setminus Y$, $\#\pi^{-1}(Q) = r$.

Proyección y discriminante

$X^n \subset \mathbb{P}^N$ subvariedad lisa, $n < N$.

- H^{N-n-1} subespacio proyectivo genérico ($H \cap X = \emptyset$).
- S^n subespacio proyectivo, $H \not\subset S$.
- $\pi : X \to S \equiv \mathbb{P}^n$
- $P \in X$, H_P $N-n$-subespacio tal que $P \in H_P$, $H \subset H_P$.
- $\pi(P) := H_P \cap S$.
- $\exists Y \subset S$ hipersuperficie (discriminante) tal que $\forall Q \in S \setminus Y$, $\#\pi^{-1}(Q) = r$.
- $\pi_| : X \setminus \pi^{-1}(Y) \to S \setminus Y$ es una cubierta de r hojas.

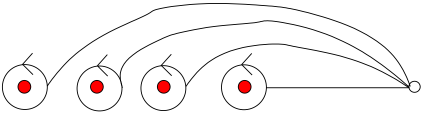
Índice

Cubiertas y grupo fundamental

La cubierta $\pi_| : X \setminus \pi^{-1}(Y) \to \mathbb{P}^n \setminus Y$ está clasificada por un homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus Y) \to \Sigma_r$.

Ejemplo

Si X es una curva, $\mathbb{P}^1 \setminus Y$ es $\mathbb{P}^1$ menos un número finito de puntos y $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus Y)$ es libre.

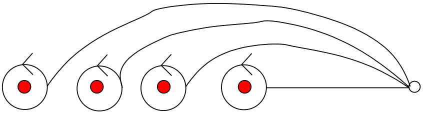


Cubiertas y grupo fundamental

La cubierta $\pi_| : X \setminus \pi^{-1}(Y) \to \mathbb{P}^n \setminus Y$ está clasificada por un homomorfismo de grupos $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus Y) \to \Sigma_r$.

Ejemplo

Si X es una curva, $\mathbb{P}^1 \setminus Y$ es $\mathbb{P}^1$ menos un número finito de puntos y $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus Y)$ es libre.



Base del estudio de la superficie de Riemann asociada a una función multivalorada.

Teoría de Lefschetz-Zariski

Teorema

Sea L^k un subespacio de $\mathbb{P}^n$ y sea $Y_L := Y \cap L$. Entonces, la inclusión $L \setminus Y_L \hookrightarrow \mathbb{P}^n \setminus Y$ induce un morfismo de grupos $\pi_1(L \setminus Y_L) \to \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus Y)$ que es una biyección si $k \geq 2$ y una sobreyección si $k = 1$.

Teoría de Lefschetz-Zariski

Teorema

Sea L^k un subespacio de $\mathbb{P}^n$ y sea $Y_L := Y \cap L$. Entonces, la inclusión $L \setminus Y_L \hookrightarrow \mathbb{P}^n \setminus Y$ induce un morfismo de grupos $\pi_1(L \setminus Y_L) \to \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus Y)$ que es una biyección si $k \geq 2$ y una sobreyección si $k = 1$.

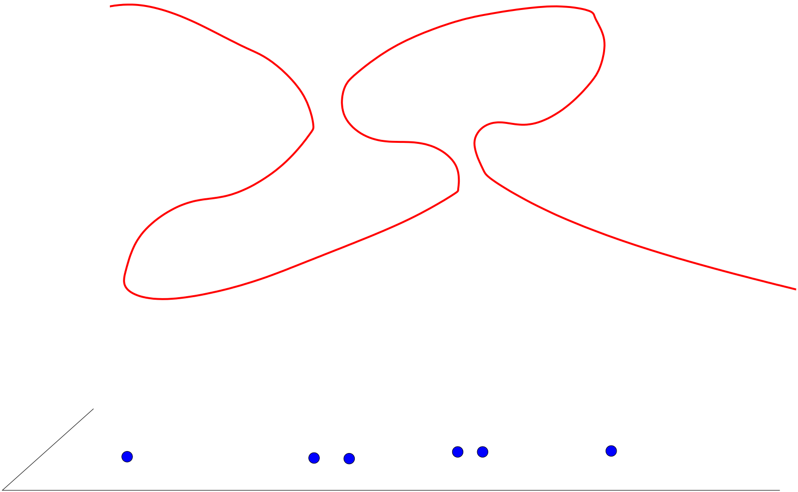
Consecuencia

Es importante conocer los grupos fundamentales de los complementarios de curvas planas C

Índice

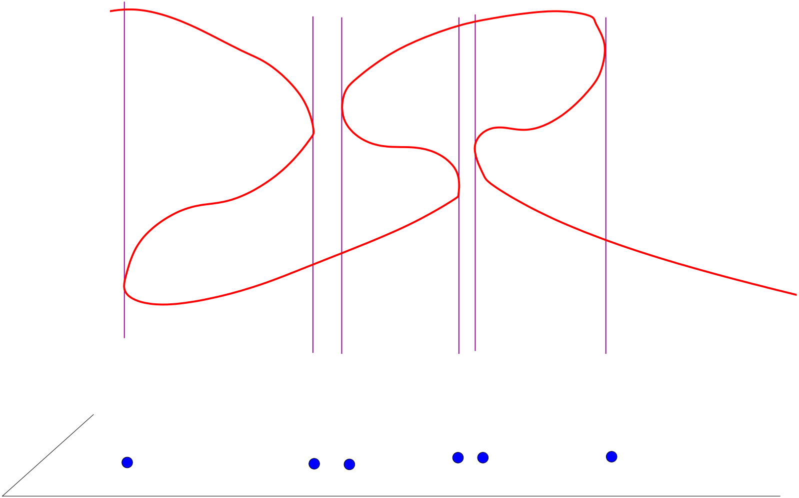
Zariski-van Kampen

L_∞ recta genérica, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$



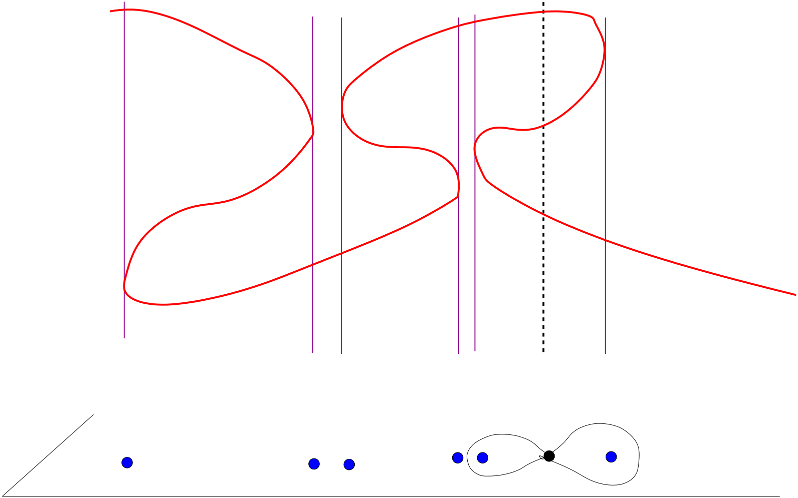
Zariski-van Kampen

L_∞ recta genérica, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$

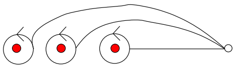


Zariski-van Kampen

L_∞ recta genérica, $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$



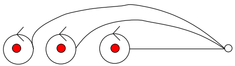
Generadores y relaciones



Recta genérica L

$$\pi_1(L \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$$

Generadores y relaciones

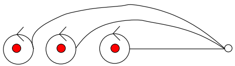


Recta genérica L

$$\pi_1(L \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$$

Sobre un elemento de la base tenemos un *cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ de manera que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap C$ son r puntos.

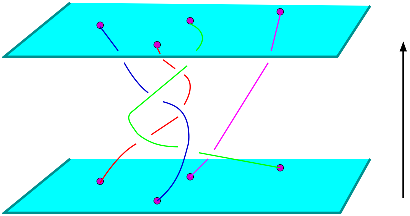
Generadores y relaciones



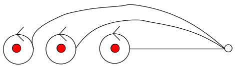
Recta genérica L

$$\pi_1(L \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$$

Sobre un elemento de la base tenemos un *cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ de manera que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap C$ son r puntos.



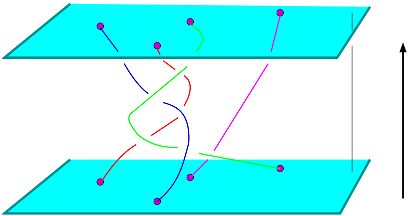
Generadores y relaciones



Recta genérica L

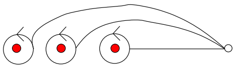
$$\pi_1(L \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$$

Sobre un elemento de la base tenemos un *cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ de manera que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap C$ son r puntos.



Camino vertical$\equiv$ Lazo trivial

Generadores y relaciones

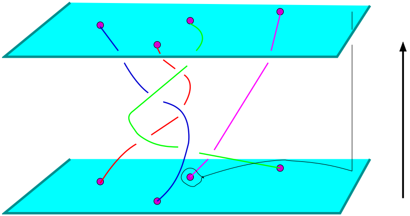


Recta genérica L

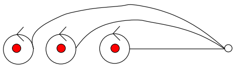
$$\pi_1(L \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$$

Sobre un elemento de la base tenemos un *cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ de manera que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap C$ son r puntos.

Camino vertical$\equiv$ Lazo trivial



Generadores y relaciones

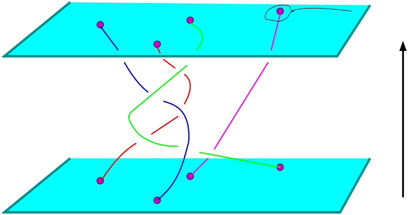


Recta genérica L

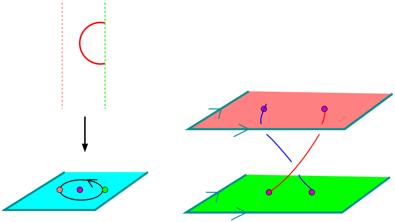
$$\pi_1(L \setminus C) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$$

Sobre un elemento de la base tenemos un *cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}$ de manera que $\forall z \in \mathbb{S}^1$, $(\{z\} \times \mathbb{C}) \cap C$ son r puntos.

Camino vertical$\equiv$ Lazo trivial



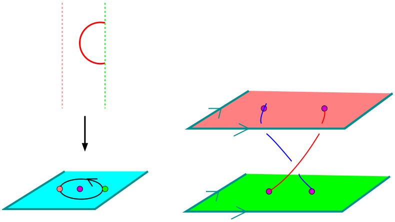
Ejemplos



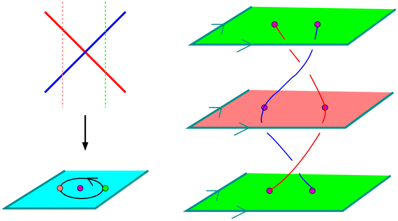
$$y^2 - x = 0$$

$t \mapsto \pm \exp(i\pi t)$
a, b

Ejemplos



$$y^2 - x = 0$$



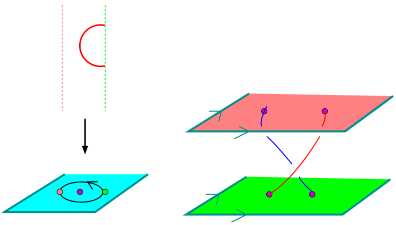
$$y^2 - x^2 = 0$$

$t \mapsto \pm\exp(i\pi t)$
a, b

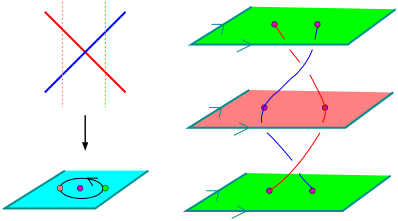
a, b

Relación: $a = b$

Ejemplos



$$y^2 - x = 0$$



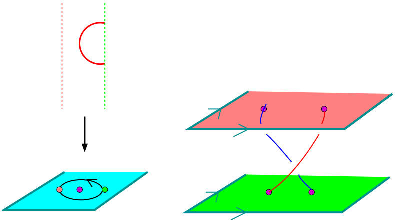
$$y^2 - x^2 = 0$$

$t \mapsto \pm\exp(i\pi t)$
a, b

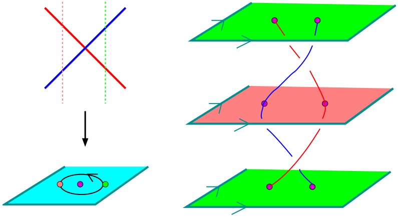
$a, b\ [a, b] = 1$

Relación: $a = b$

Ejemplos



$$y^2 - x = 0$$



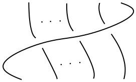
$$y^2 - x^2 = 0$$

$t \mapsto \pm \exp(i\pi t)$
a, b

Relación: $a = b$

$a, b \; [a, b] = 1$
$y^2 - x^n = 0 \Rightarrow$
$$\underbrace{a \cdot b \cdot \ldots}_{n \text{ veces}} = \underbrace{b \cdot a \cdot \ldots}_{n \text{ veces}}$$

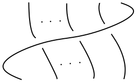
Curvas con flexos



$$y^r - x = 0$$

$t \mapsto \pm \exp(\frac{2i\pi t}{k})$
$a_1, \ldots, a_k$

Curvas con flexos



$$y^r - x = 0$$

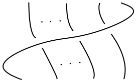
$t \mapsto \pm\exp(\frac{2i\pi t}{k})$
$a_1, \ldots, a_k$

Relación: $a_1 = \cdots = a_k$

Teorema (van Kampen)

$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$: relaciones anteriores.

Curvas con flexos



$$y^r - x = 0$$

$t \mapsto \pm \exp(\frac{2i\pi t}{k})$
$a_1, \ldots, a_k$

Relación: $a_1 = \cdots = a_k$

Teorema (van Kampen)

$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)$: relaciones anteriores. Si $a_1, \ldots, a_r$ son generadores libres bien ordenados, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) = \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C)/\langle a_r \cdot \ldots \cdot a_1 = 1\rangle$.

Teorema

Si C tiene un flexo de orden r, entonces $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C \cong \mathbb{Z}$ y $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C) \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.

Índice

Familias equisingulares

Definición

Una familia de curvas reducidas $C_t = \{f_t = 0\}_{t\in J}$, J conexo, *continua* si los coeficientes de f_t varían continuamente. Si además las singularidades no cambian es *equisingular*.

Definición

$C_t = \{f_t = 0\}_{t\in[0,1]}$, continua curvas reducidas, *degenera en* $t = 0$ si es equisingular en $(0, 1]$.

Teorema

$C_t = \{f_t = 0\}_{t\in J}$ equisingular $\Rightarrow$ $(\mathbb{P}^2, C_t)$ isótopo a $(\mathbb{P}^2, C_s)$. Además, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_0) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_t)$.

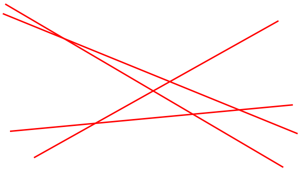
Curvas lisas y nodales

Teorema

Si C es lisa $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Teorema

Si C es una configuración de rectas en posición general, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.



Configuración real

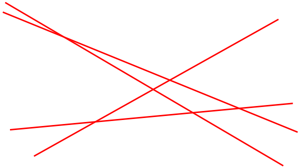
Curvas lisas y nodales

Teorema

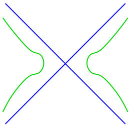
Si C es lisa $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Teorema

Si C es una configuración de rectas en posición general, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.



Configuración real



Regeneración de un nodo

Regeneraciones

Teorema (Zariski)

Si C nodal (irreducible) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ *es abeliano.*

Regeneraciones

Teorema (Zariski)

Si C nodal (irreducible) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ *es abeliano.*

Severi-Zariski-Fulton-Deligne-Harris.

- Severi había demostrado dos curvas nodales irreducibles con igual grado y nodos están en familia equisingular.

Regeneraciones

Teorema (Zariski)

Si C nodal (irreducible) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ es abeliano.

Severi-Zariski-Fulton-Deligne-Harris.

- Severi había demostrado dos curvas nodales irreducibles con igual grado y nodos están en familia equisingular.
- Basta probarlo para curvas que son regeneración de una configuración de rectas en posición general.

Regeneraciones

Teorema (Zariski)

Si C nodal (irreducible) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ *es abeliano.*

Severi-Zariski-Fulton-Deligne-Harris.

- Severi había demostrado dos curvas nodales irreducibles con igual grado y nodos están en familia equisingular.
- Basta probarlo para curvas que son regeneración de una configuración de rectas en posición general.
- Error en la demostración de Severi.

Regeneraciones

Teorema (Zariski)

Si C nodal (irreducible) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ *es abeliano.*

Severi-Zariski-Fulton-Deligne-Harris.

- Severi había demostrado dos curvas nodales irreducibles con igual grado y nodos están en familia equisingular.
- Basta probarlo para curvas que son regeneración de una configuración de rectas en posición general.
- Error en la demostración de Severi.
- Demostraciones de Fulton y Deligne

Regeneraciones

Teorema (Zariski)

Si C nodal (irreducible) $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ *es abeliano.*

Severi-Zariski-Fulton-Deligne-Harris.

- Severi había demostrado dos curvas nodales irreducibles con igual grado y nodos están en familia equisingular.
- Basta probarlo para curvas que son regeneración de una configuración de rectas en posición general.
- Error en la demostración de Severi.
- Demostraciones de Fulton y Deligne
- Harris demuestra el resultado de Severi.

Regeneraciones nodales

Definición

$\{C_t\}_{t\in[0,1]}$ es *regeneración nodal de C_0* si:

- La familia degenera a C_0;
- el número de componentes irreducibles es constante;
- C_0 solo adquiere nodos.

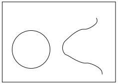
Problema

¿Se puede afirmar que $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_0)$ y $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C_t)$ son isomorfos?

Regeneraciones nodales a cúspide

Definición

$\{C_t\}_{t\in[0,1]}$ regeneración nodal de C_0 es *a cúspide* si C_0 degenera en cada nodo a una cúspide.

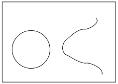


$$y^2 = x(x^2 - 1)$$

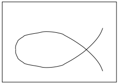
Regeneraciones nodales a cúspide

Definición

$\{C_t\}_{t\in[0,1]}$ regeneración nodal de C_0 es *a cúspide* si C_0 degenera en cada nodo a una cúspide.



$y^2 = x(x^2 - 1)$

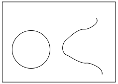


$y^2 = x^2(x + 1)$

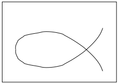
Regeneraciones nodales a cúspide

Definición

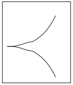
$\{C_t\}_{t\in[0,1]}$ regeneración nodal de C_0 es *a cúspide* si C_0 degenera en cada nodo a una cúspide.



$y^2 = x(x^2 - 1)$



$y^2 = x^2(x + 1)$

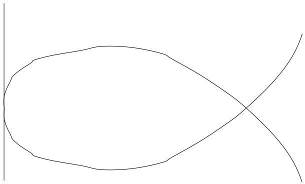


$y^2 = x^3$

Teorema

En una regeneración nodal a cúspide no cambia el grupo fundamental.

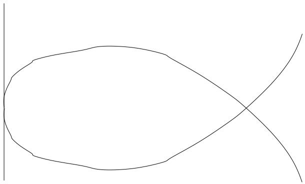
Nodos que complican



$$(y^2 - x^2(x+1))(x+1)$$

$$\alpha^{-1} a \alpha = b$$
$$[\alpha, ba] = 1$$
$$[a, b] = 1$$

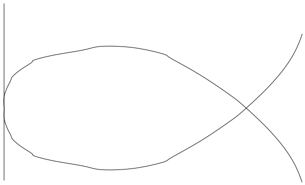
Nodos que complican



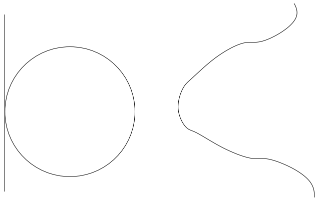
$$(y^2 - x^2(x+1))(x+1)$$

$\alpha^{-1} a \alpha = b$
$[\alpha, ba] = 1$
$[a, b] = 1$
Resultado: $(a\alpha)^2 = (\alpha a)^2$.

Nodos que complican



$(y^2 - x^2(x+1))(x+1)$

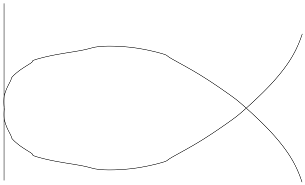


$y^2 = (x^2 - t^2)(x+1)$

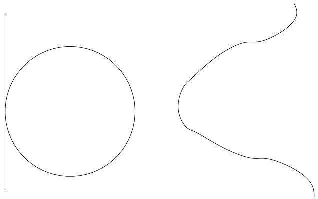
$\alpha^{-1} a \alpha = b$
$[\alpha, ba] = 1$
$[a, b] = 1$
Resultado: $(a\alpha)^2 = (\alpha a)^2$.

$\alpha^{-1} a \alpha = b$
$[\alpha, ba] = 1$
$a = b$.

Nodos que complican



$$(y^2 - x^2(x+1))(x+1)$$



$$y^2 = (x^2 - t^2)(x+1)$$

$\alpha^{-1} a \alpha = b$
$[\alpha, ba] = 1$
$[a, b] = 1$
Resultado: $(a\alpha)^2 = (\alpha a)^2$.

$\alpha^{-1} a \alpha = b$
$[\alpha, ba] = 1$
$a = b$.
Resultado: $[a, \alpha] = 1$.