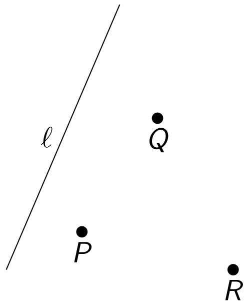
Rectas y números. De Pappus a Galois

Enrique ARTAL BARTOLO

Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Universidad de Zaragoza

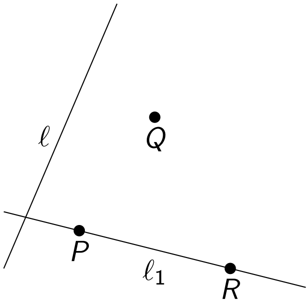
XLV Curso de Actualización en Matemáticas
Logroño, 14 de febrero 2025

Geometría sintética y plano ampliado



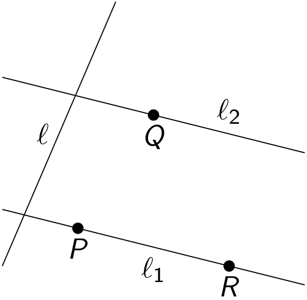
- Puntos P, rectas ℓ.

Geometría sintética y plano ampliado



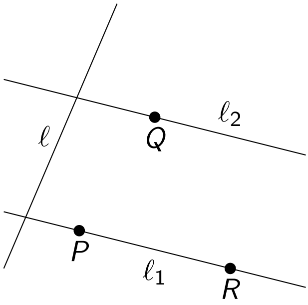
- Puntos P, rectas ℓ.
- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- Dos rectas disjuntas se llaman paralelas $\ell_1 \parallel \ell_2$.

Geometría sintética y plano ampliado



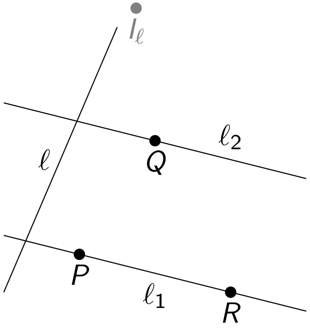
- Puntos P, rectas ℓ.
- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- Dos rectas disjuntas se llaman paralelas $\ell_1 \parallel \ell_2$.
- Si $Q \notin \ell_1$, $\exists! \ell_2 \parallel \ell_1$ t.q. $Q \in \ell_2$.

Geometría sintética y plano ampliado



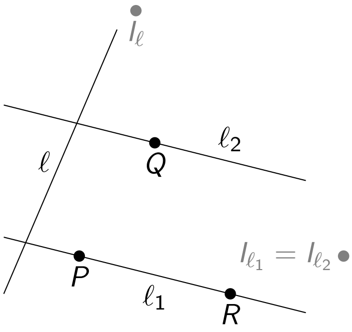
- Puntos P, rectas ℓ.
- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- Dos rectas disjuntas se llaman paralelas $\ell_1 \parallel \ell_2$.
- Si $Q \notin \ell_1$, $\exists! \ell_2 \parallel \ell_1$ t.q. $Q \in \ell_2$.
- *Ser iguales o paralelas*: relación de equivalencia.

Geometría sintética y plano ampliado



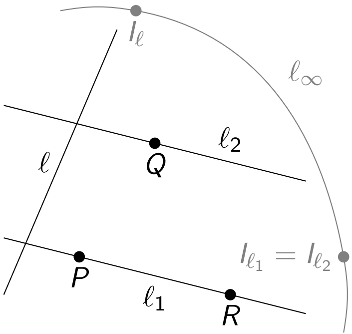
- Puntos P, rectas ℓ.
- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- A cada recta ℓ se le añade un *punto virtual en el infinito* I_ℓ.

Geometría sintética y plano ampliado



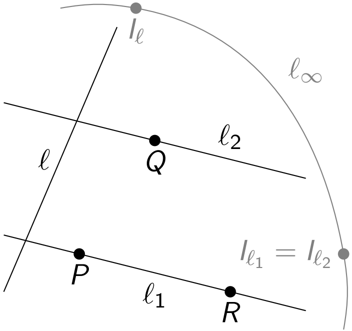
- Puntos P, rectas ℓ.
- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- A cada recta ℓ se le añade un *punto virtual en el infinito* I_ℓ.
- Dos rectas paralelas comparten puntos virtuales

Geometría sintética y plano ampliado



- Puntos P, rectas ℓ.
- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- A cada recta ℓ se le añade un *punto virtual en el infinito* I_ℓ.
- Dos rectas paralelas comparten puntos virtuales
- Los puntos virtuales forman la *recta del infinito* ℓ_∞.

Geometría sintética y plano ampliado



Plano ampliado

La recta del infinito y los puntos virtuales se *camuflan* como puntos y rectas normales.

- Por dos puntos distintos pasa una única recta.
- Dos rectas distintas se cortan en único punto.

Colineaciones y homografías sintéticas

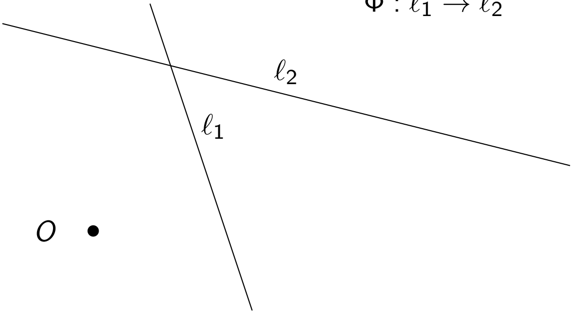
Colineaciones

Una colineación de un plano ampliado es una biyección que respeta rectas.

Homografías de rectas en un plano ampliado

Una homografía entre rectas ampliadas del plano es una composición de perspectividades.

$\Phi : \ell_1 \to \ell_2$



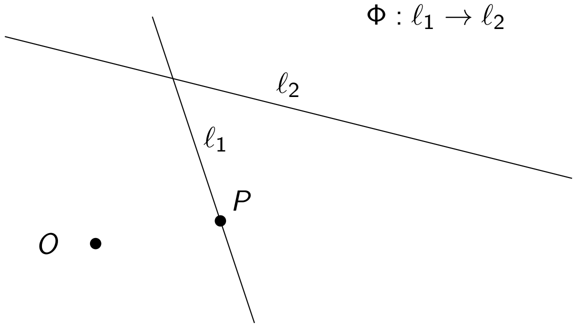
Colineaciones y homografías sintéticas

Colineaciones

Una colineación de un plano ampliado es una biyección que respeta rectas.

Homografías de rectas en un plano ampliado

Una homografía entre rectas ampliadas del plano es una composición de perspectividades.



Colineaciones y homografías sintéticas

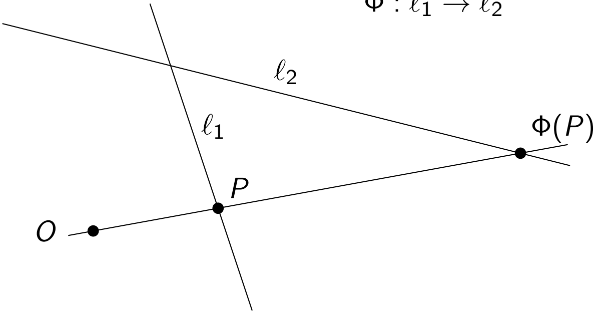
Colineaciones

Una colineación de un plano ampliado es una biyección que respeta rectas.

Homografías de rectas en un plano ampliado

Una homografía entre rectas ampliadas del plano es una composición de perspectividades.

$$\Phi : \ell_1 \to \ell_2$$



Colineaciones y homografías sintéticas

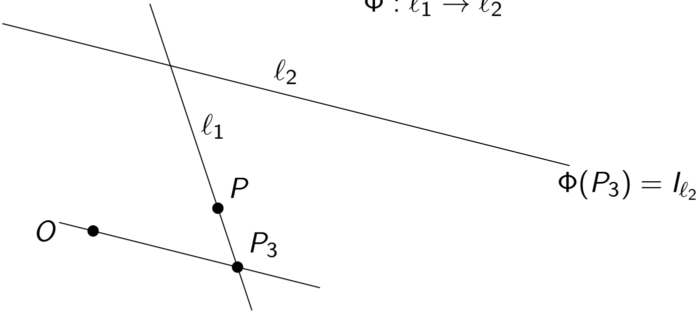
Colineaciones

Una colineación de un plano ampliado es una biyección que respeta rectas.

Homografías de rectas en un plano ampliado

Una homografía entre rectas ampliadas del plano es una composición de perspectividades.

$$\Phi : \ell_1 \to \ell_2$$



Colineaciones y homografías sintéticas

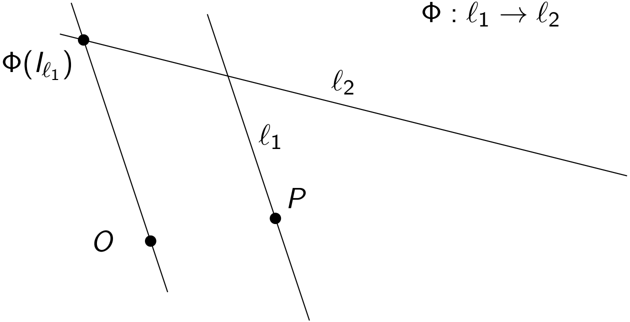
Colineaciones

Una colineación de un plano ampliado es una biyección que respeta rectas.

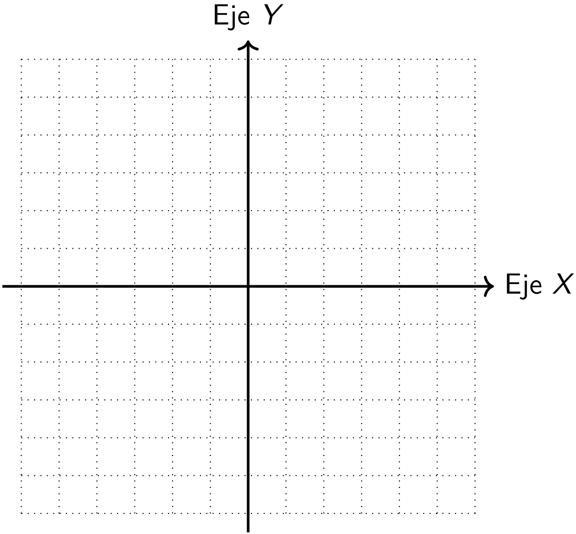
Homografías de rectas en un plano ampliado

Una homografía entre rectas ampliadas del plano es una composición de perspectividades.

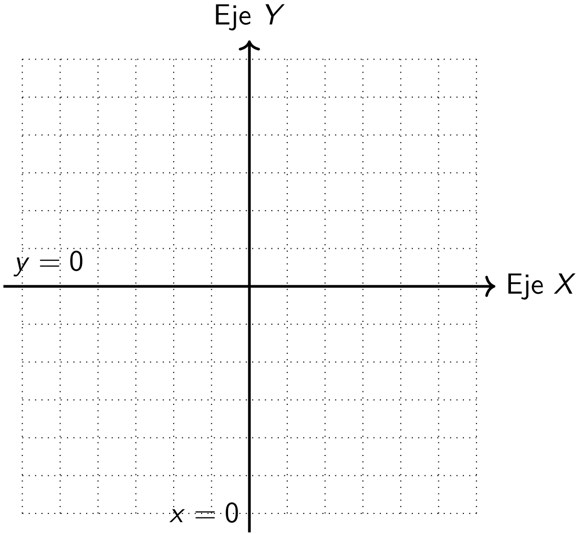
$\Phi : \ell_1 \to \ell_2$



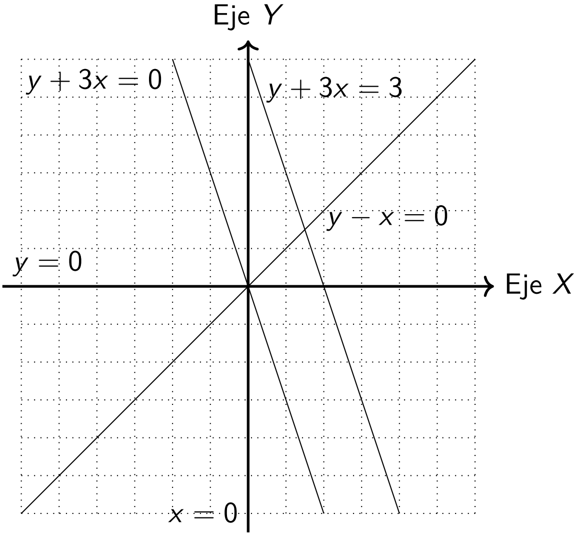
Geometría cartesiana



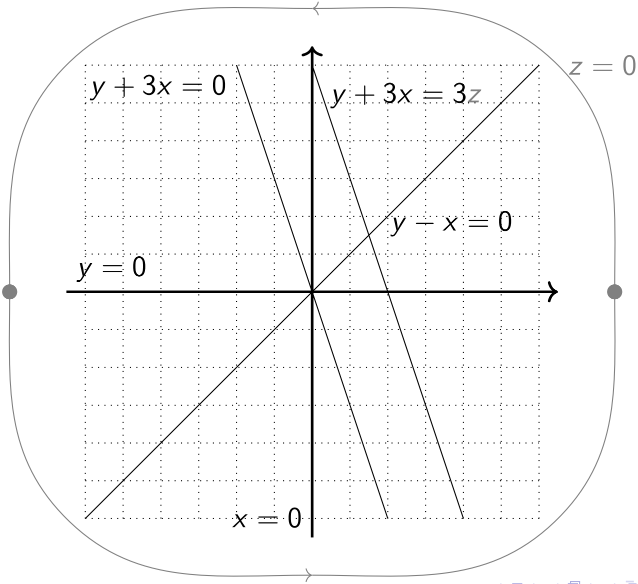
Geometría cartesiana



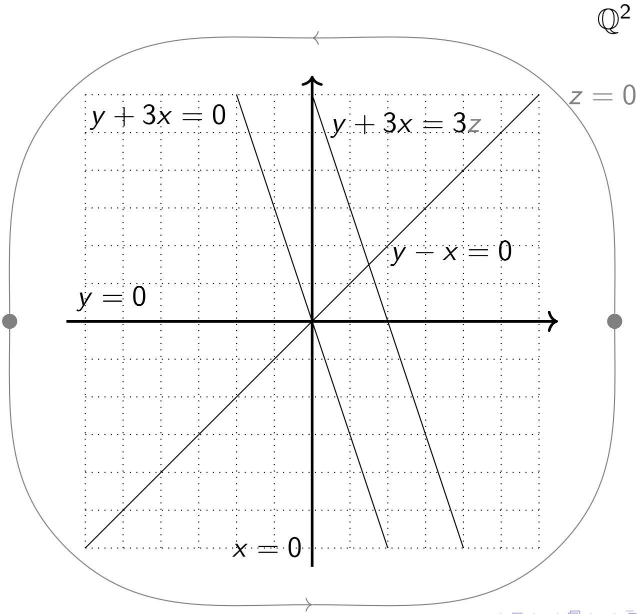
Geometría cartesiana



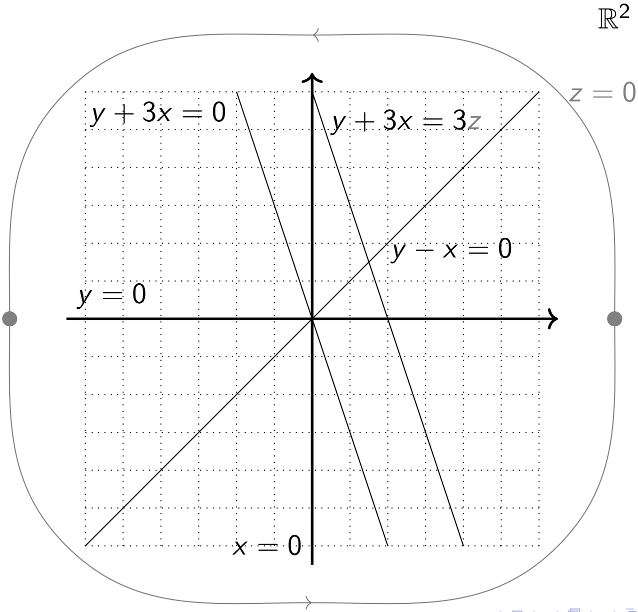
Geometría cartesiana



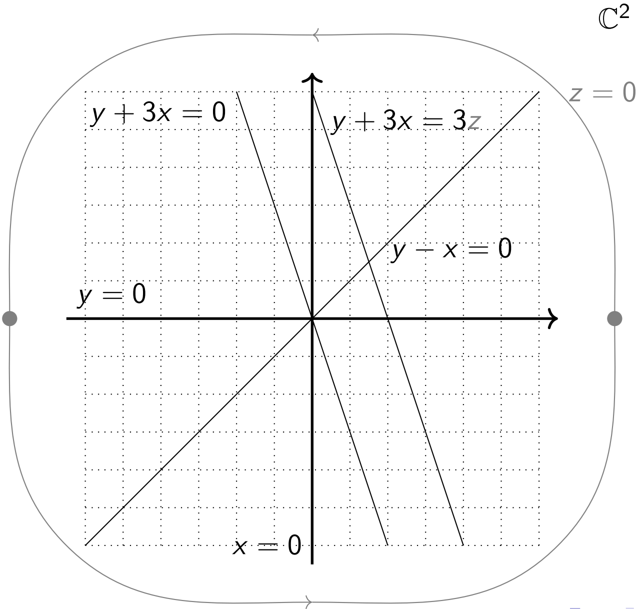
Geometría cartesiana



Geometría cartesiana



Geometría cartesiana

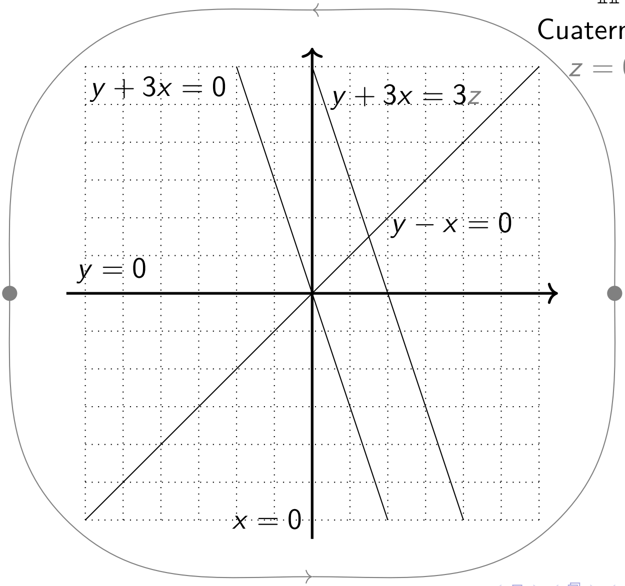


Geometría cartesiana

$\mathbb{H}^2$

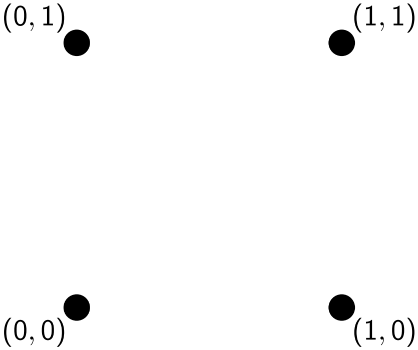
Cuaterniones

$z = 0$



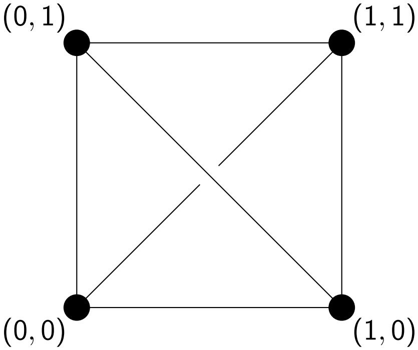
Geometría cartesiana

$\mathbb{F}_2^2$



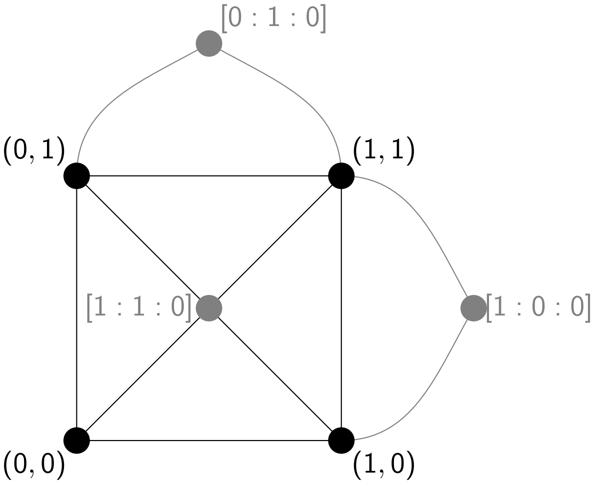
Geometría cartesiana

$\mathbb{F}_2^2$



Geometría cartesiana

$\mathbb{F}_2^2$



Colineaciones y homografías cartesianas

Colineaciones en coordenadas homogéneas ($\mathbb{R}$)

Aplicaciones lineales regulares en $\mathbb{R}^3$ módulo homotecias

Colineaciones y homografías cartesianas

Colineaciones en coordenadas homogéneas ($\mathbb{R}$)

Aplicaciones lineales regulares en $\mathbb{R}^3$ módulo homotecias

Homografías de la recta ampliada cartesiana

$\ell = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\Phi(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

Colineaciones y homografías cartesianas

Colineaciones en coordenadas homogéneas ($\mathbb{R}$)

Aplicaciones lineales regulares en $\mathbb{R}^3$ módulo homotecias

Homografías de la recta ampliada cartesiana

$\ell = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\Phi(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

Colineaciones en coordenadas homogéneas ($\mathbb{C}$)

Aplicaciones regulares lineales y hermitianas en $\mathbb{R}^3$ módulo homotecias

Colineaciones y homografías cartesianas

Colineaciones en coordenadas homogéneas ($\mathbb{R}$)

Aplicaciones lineales regulares en $\mathbb{R}^3$ módulo homotecias

Homografías de la recta ampliada cartesiana

$\ell = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\Phi(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

Colineaciones en coordenadas homogéneas ($\mathbb{C}$)

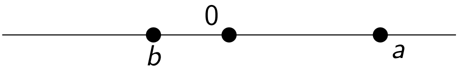
Aplicaciones regulares lineales y hermitianas en $\mathbb{R}^3$ módulo homotecias

Homografías de la recta ampliada cartesiana

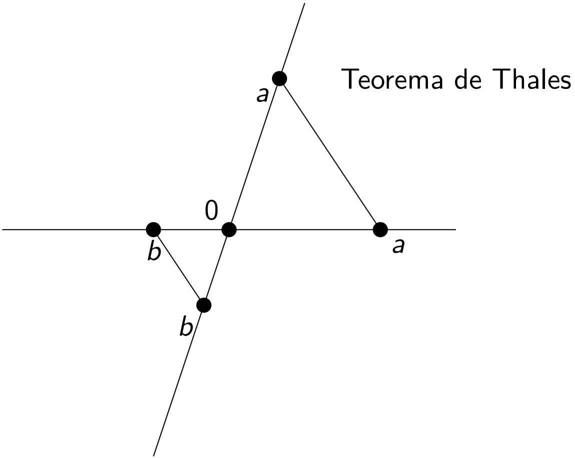
$\ell = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, esfera de Riemann

$$\Phi(t) = \frac{at+b}{ct+d}, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0, \quad \Psi(t) = \overline{\Phi(t)}.$$

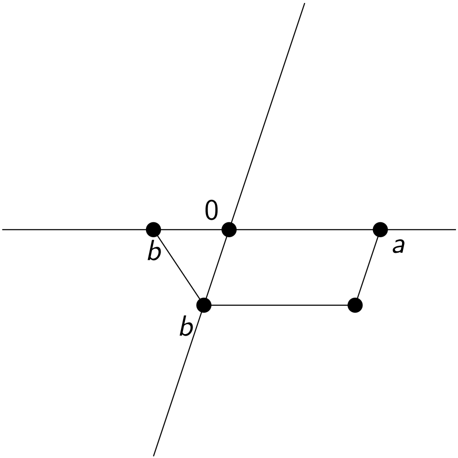
Suma



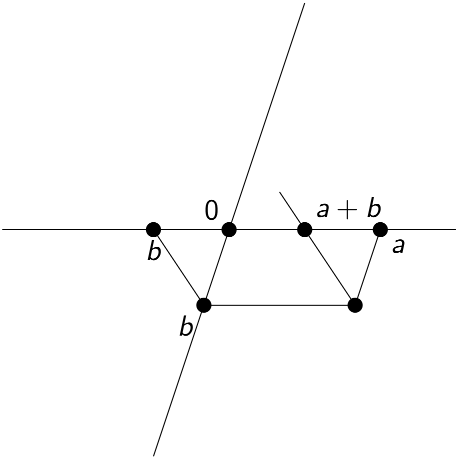
Suma



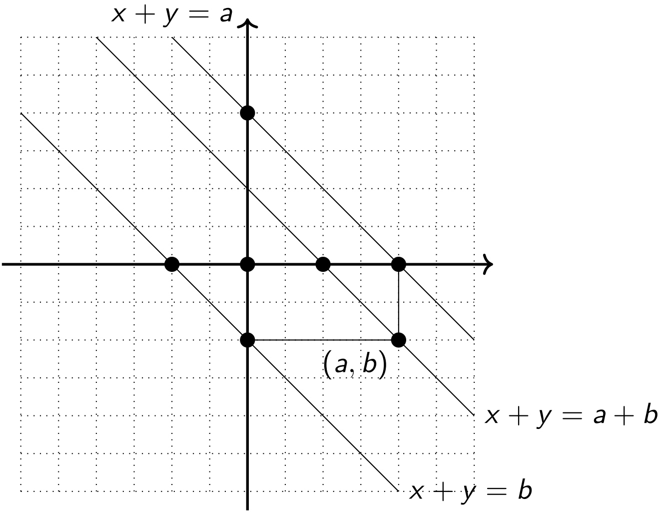
Suma



Suma



Suma



Suma

Resumen

- Fijamos un origen 0 en una recta.

Suma

Resumen

- Fijamos un origen 0 en una recta.
- Es posible sumar puntos del recta usando el Teorema de Thales y la construcción de paralelas.

Suma

Resumen

- Fijamos un origen 0 en una recta.
- Es posible sumar puntos del recta usando el Teorema de Thales y la construcción de paralelas.
- El 0 es el elemento neutro.

Suma

Resumen

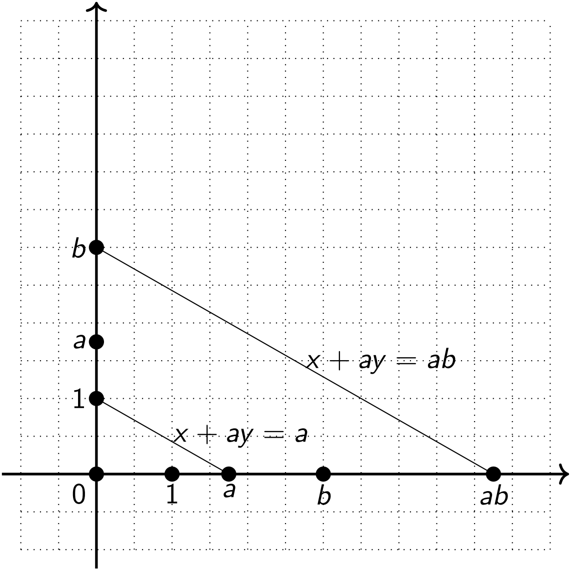
- Fijamos un origen 0 en una recta.
- Es posible sumar puntos del recta usando el Teorema de Thales y la construcción de paralelas.
- El 0 es el elemento neutro.

Preguntas

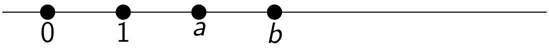
- ¿Es conmutativa?
- ¿Es asociativa?
- ¿Hay elementos opuestos?

Es decir, ¿es un grupo abeliano?

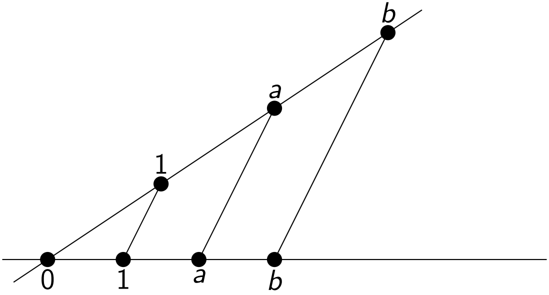
Producto



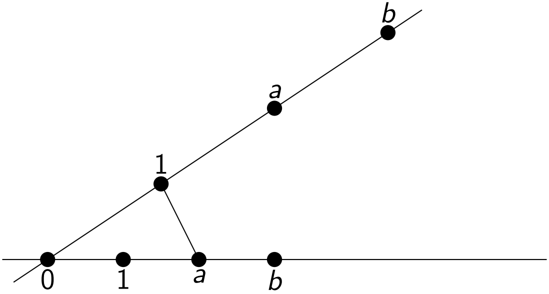
Producto



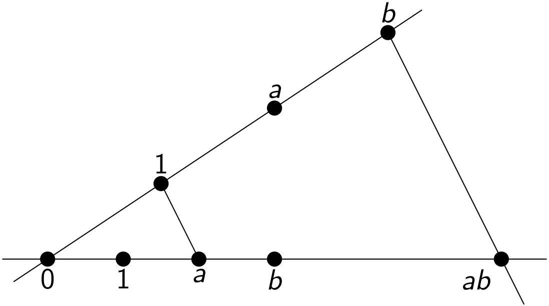
Producto



Producto



Producto



Producto

Resumen

- Fijamos además una unidad 1 en una recta.

Producto

Resumen

- Fijamos además una unidad 1 en una recta.
- Es posible multiplicar puntos del recta usando el Teorema de Thales y la construcción de paralelas.

Producto

Resumen

- Fijamos además una unidad 1 en una recta.
- Es posible multiplicar puntos del recta usando el Teorema de Thales y la construcción de paralelas.
- El 1 es el elemento neutro.

Producto

Resumen

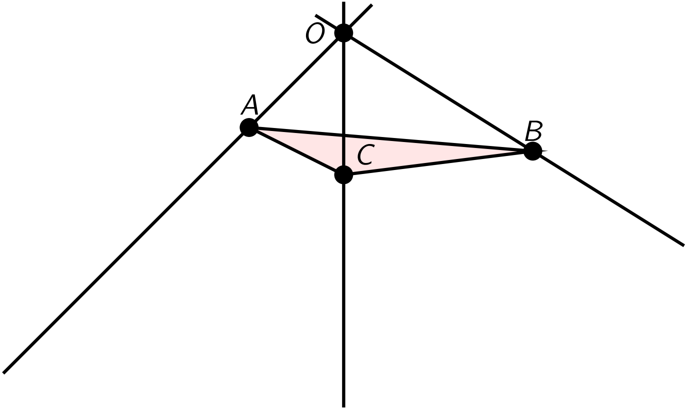
- Fijamos además una unidad 1 en una recta.
- Es posible multiplicar puntos del recta usando el Teorema de Thales y la construcción de paralelas.
- El 1 es el elemento neutro.

Preguntas

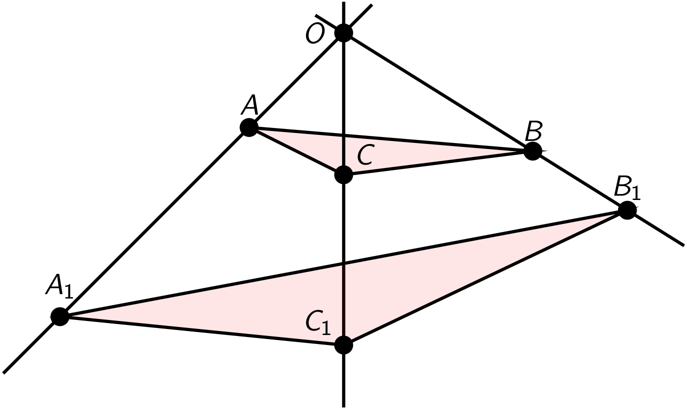
- ¿Es conmutativa?
- ¿Es asociativa?
- ¿Hay inversos?

Es decir, ¿es un cuerpo o un anillo de división?

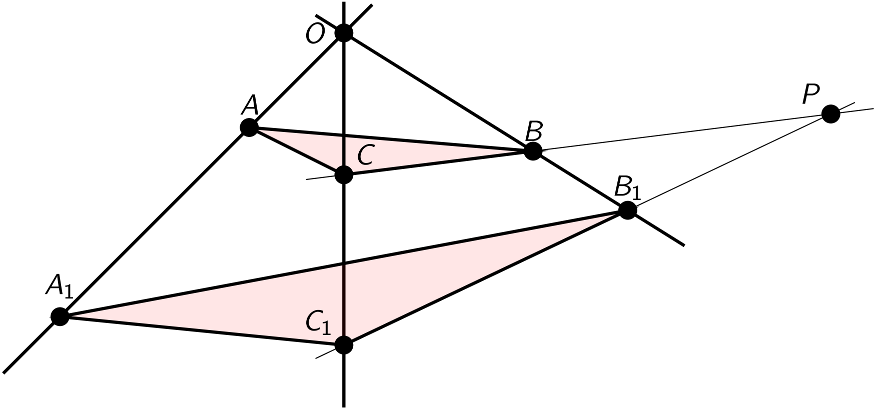
Desargues



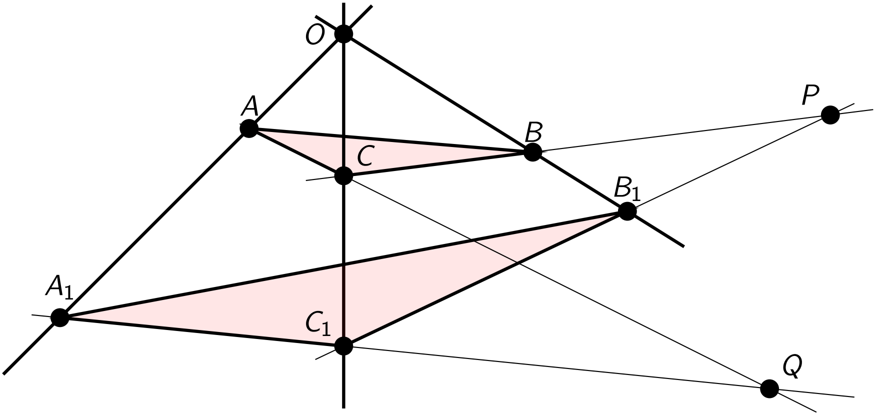
Desargues



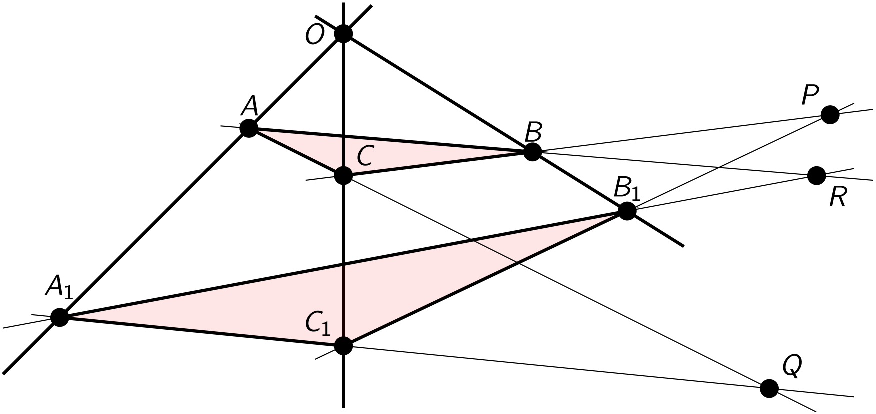
Desargues



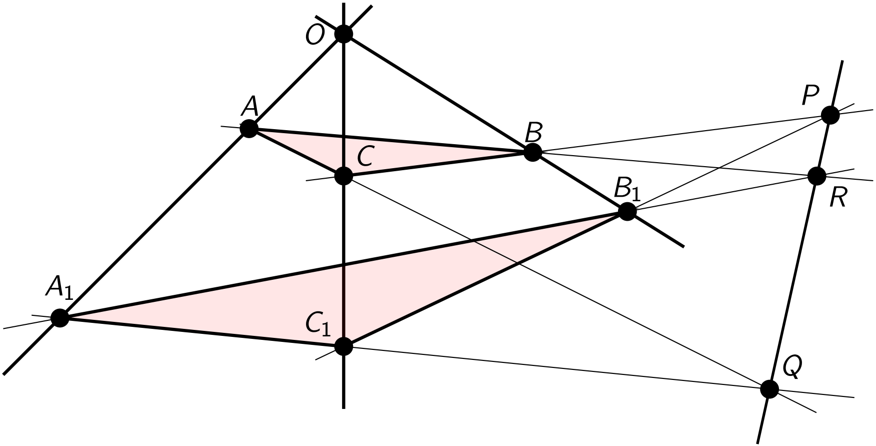
Desargues



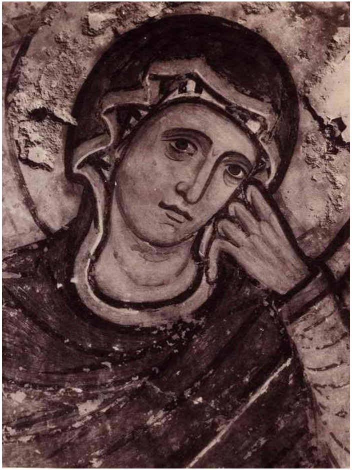
Desargues



Desargues



Desargues



Desargues

- El Teorema de Desargues no siempre es cierto para un plano proyectivo. Hacen falta *muchas* colineaciones

Desargues

- El Teorema de Desargues no siempre es cierto para un plano proyectivo. Hacen falta *muchas* colineaciones
- Es cierto si y solo si las operaciones suma y producto inducen una estructura de anillo de división

Desargues

- El Teorema de Desargues no siempre es cierto para un plano proyectivo. Hacen falta *muchas* colineaciones
- Es cierto si y solo si las operaciones suma y producto inducen una estructura de anillo de división
- Es cierto para $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \mathbb{H}$, ...

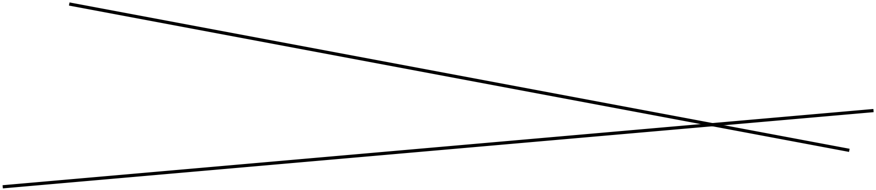
Desargues

- El Teorema de Desargues no siempre es cierto para un plano proyectivo. Hacen falta *muchas* colineaciones
- Es cierto si y solo si las operaciones suma y producto inducen una estructura de anillo de división
- Es cierto para $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \mathbb{H}, \ldots$
- Las colineaciones se pueden expresar de manera algebraica.

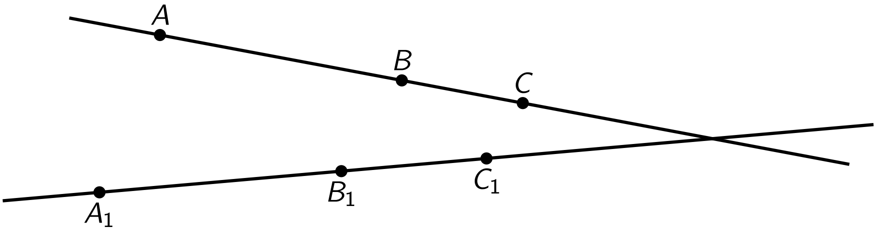
Desargues

- El Teorema de Desargues no siempre es cierto para un plano proyectivo. Hacen falta *muchas* colineaciones
- Es cierto si y solo si las operaciones suma y producto inducen una estructura de anillo de división
- Es cierto para $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \mathbb{H}$, ...
- Las colineaciones se pueden expresar de manera algebraica.
- Para los curiosos: libros de Seidenberg y Hartshorne.

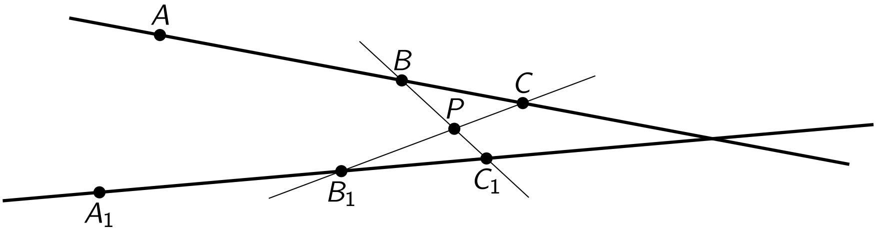
Pappus



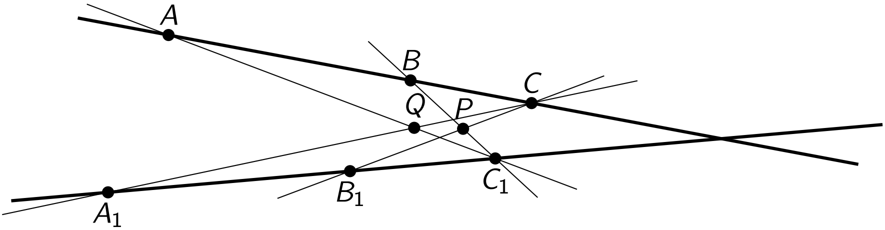
Pappus



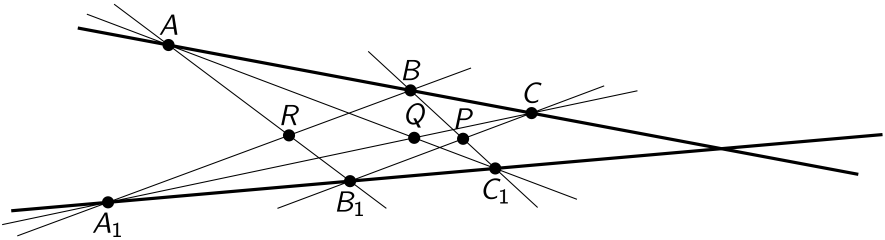
Pappus



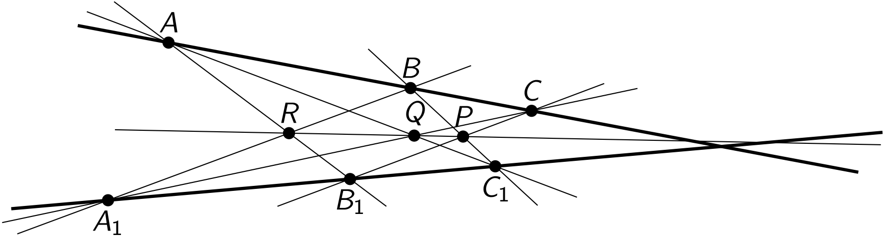
Pappus



Pappus



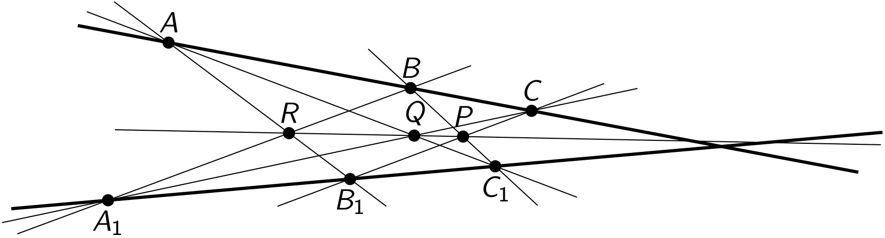
Pappus



Desargues y Pappus

- El Teorema de Pappus no siempre es cierto para un plano proyectivo.

Pappus



Desargues y Pappus

- El Teorema de Pappus no siempre es cierto para un plano proyectivo.
- Es cierto si y solo si las operaciones de suma y producto inducen una estructura de cuerpo
- Desargues es consecuencia de Pappus, pero no al revés.

Pascal y Pappus

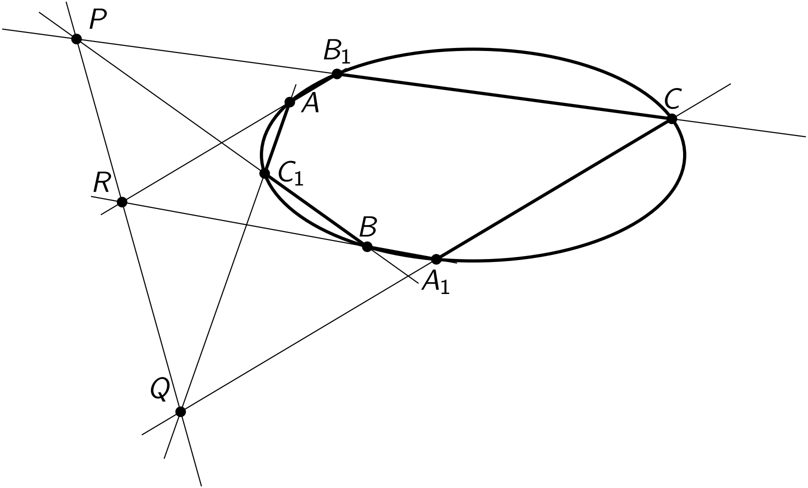
Pappus es una degeneración de Pascal.

Pascal y Pappus

El Teorema de Pappus es una degeneración del Teorema de Pascal.

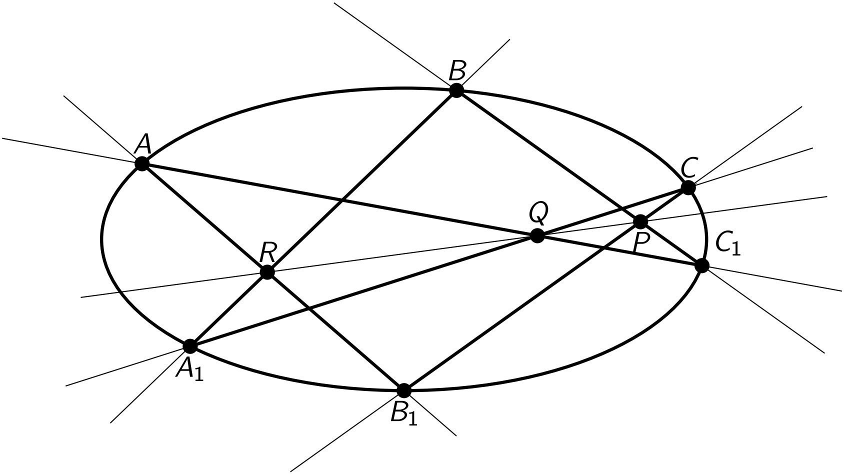
Pascal y Pappus

El Teorema de Pappus es una degeneración del Teorema de Pascal.



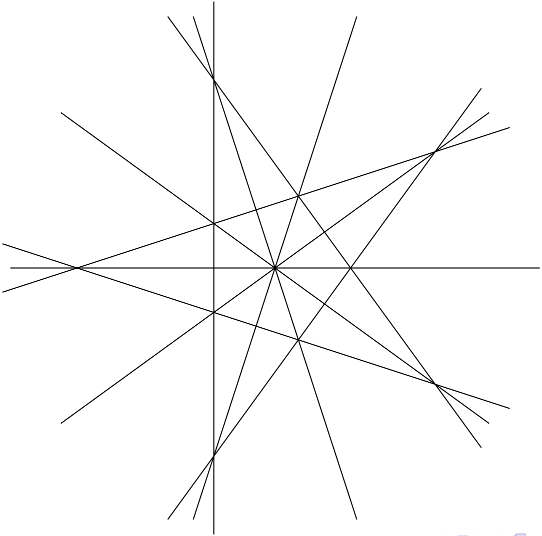
Pascal y Pappus

El Teorema de Pappus es una degeneración del Teorema de Pascal.



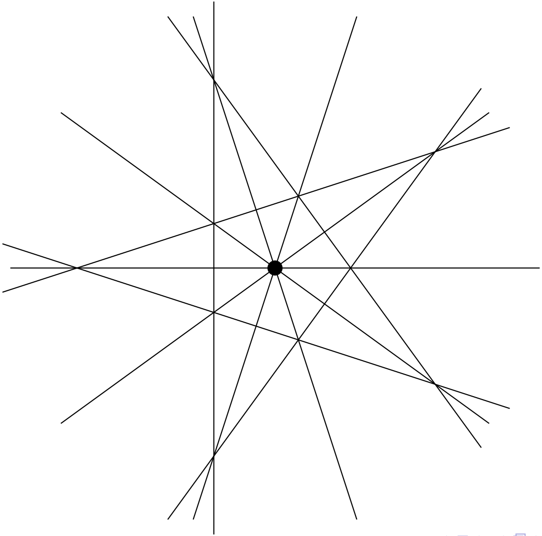
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



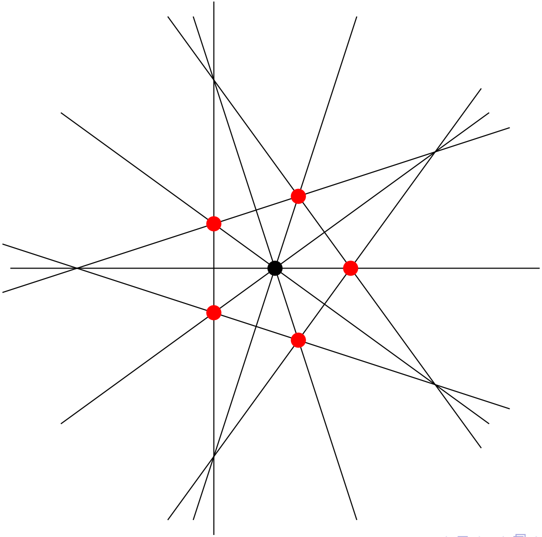
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



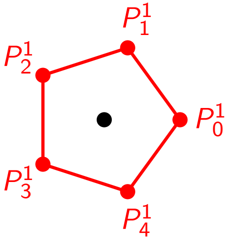
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



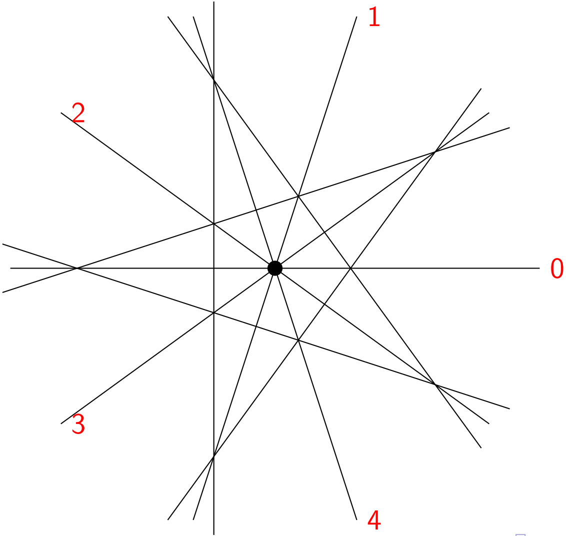
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



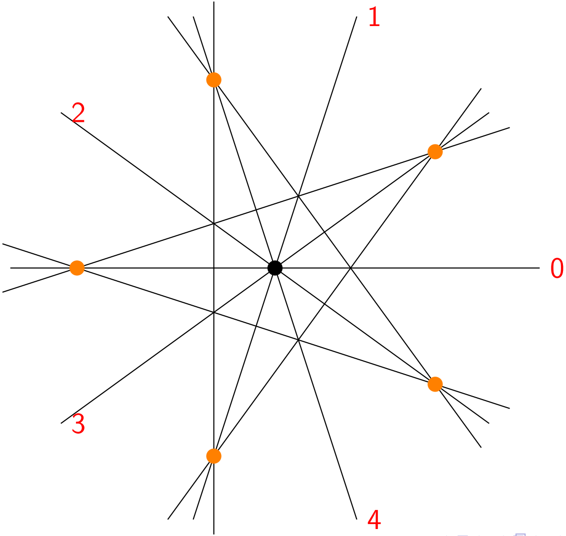
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



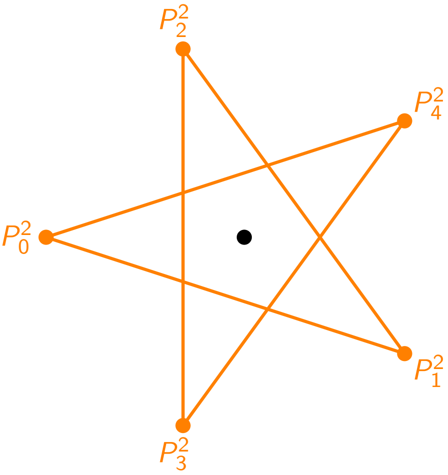
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



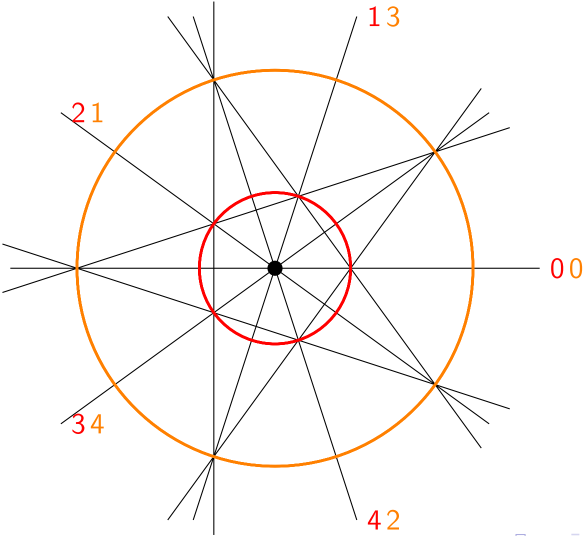
¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



¿Y Galois?

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ cuerpo de números o $\mathbb{F}_q$, q no primo (las colineaciones pueden ser sesquilineales).



Ecuaciones y simetrías, $N = 2n + 1$

- Puntos triples:

$$\frac{\cos\frac{2\pi}{N}+1}{\cos\frac{2\pi(k+1)}{N}+\cos\frac{2\pi k}{N}}\left(\cos\frac{2\pi\ell}{N},\operatorname{sen}\frac{2\pi\ell}{N}\right)=b_{k,N}\left(T_\ell(a_N),\operatorname{sen}\frac{2\pi}{N}U_{\ell-1}(a_N)\right)$$

$$a_N := \cos\frac{2\pi}{N}$$

$$b_{k,N} := \frac{a_N+1}{T_{k+1}(a_N)+T_k(a_N)}$$

- Polinomios de Chebyshev:

$$T_\ell(\cos x) = \cos \ell x$$

$$\operatorname{sen} x\, U_\ell(\cos x) = \operatorname{sen} \ell x$$

Ecuaciones y simetrías, $N = 2n + 1$

- Las ecuaciones se pueden escribir en $\mathbb{Q}[a_N]$ (dividiendo la segunda coordenada por sen $\frac{2\pi}{N}$).

Ecuaciones y simetrías, $N = 2n + 1$

- Las ecuaciones se pueden escribir en $\mathbb{Q}[a_N]$.
- $q_N(t)$ polinomio mínimo de a_N se obtiene a partir de los polinomos ciclotómicos:

$$2^2 q_5\left(\frac{t}{2}\right) = t^2 + t - 1$$

$$2^3 q_7\left(\frac{t}{2}\right) = t^3 + t^2 - 2\,t - 1$$

$$2^3 q_9\left(\frac{t}{2}\right) = t^3 - 3\,t + 1$$

$$2^5 q_{11}\left(\frac{t}{2}\right) = t^5 + t^4 - 4\,t^3 - 3\,t^2 + 3\,t + 1$$

$$2^6 q_{13}\left(\frac{t}{2}\right) = t^6 + t^5 - 5\,t^4 - 4\,t^3 + 6\,t^2 + 3\,t - 1$$

$$2^4 q_{15}\left(\frac{t}{2}\right) = t^4 - t^3 - 4\,t^2 + 4\,t + 1$$

Ecuaciones y simetrías, $N = 2n + 1$

- Las ecuaciones se pueden escribir en $\mathbb{Q}[a_N]$.
- $q_N(t)$ polinomio mínimo de a_N se obtiene a partir de los polinomos ciclotómicos:
- El grupo diédrico $\mathbb{D}_{2N}$ actúa.

Ecuaciones y simetrías, $N = 2n + 1$

- Las ecuaciones se pueden escribir en $\mathbb{Q}[a_N]$.
- $q_N(t)$ polinomio mínimo de a_N se obtiene a partir de los polinomos ciclotómicos:
- El grupo diédrico $\mathbb{D}_{2N}$ actúa.
- También actúan las colineaciones sesquilineales

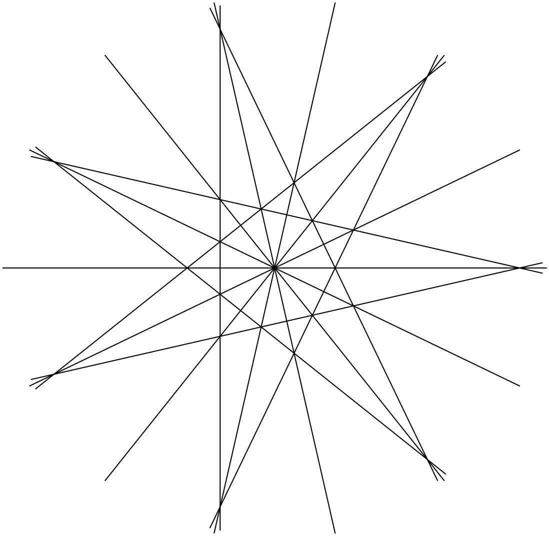
$$(x, y) \longmapsto b_{k,N}(h_k(x), h_k(y))$$

donde $h_k \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[a_N])$, $\gcd(k, N) = 1$,

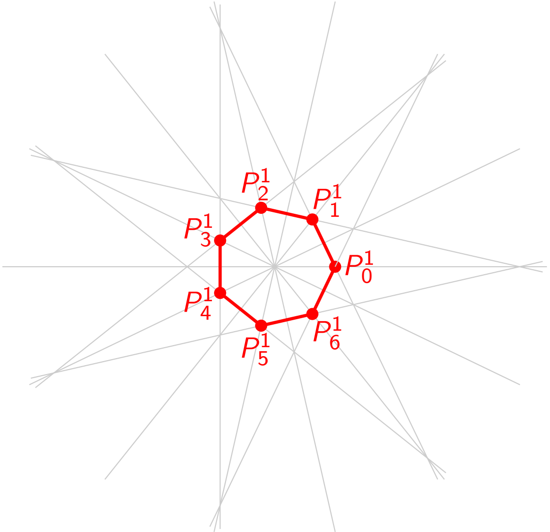
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[a_N] & \xrightarrow{h_k} & \mathbb{Q}[a_N] \\ \cos \frac{2\pi}{N} & \longmapsto & \cos \frac{2\pi k}{N} \end{array}$$

¡No es continua!

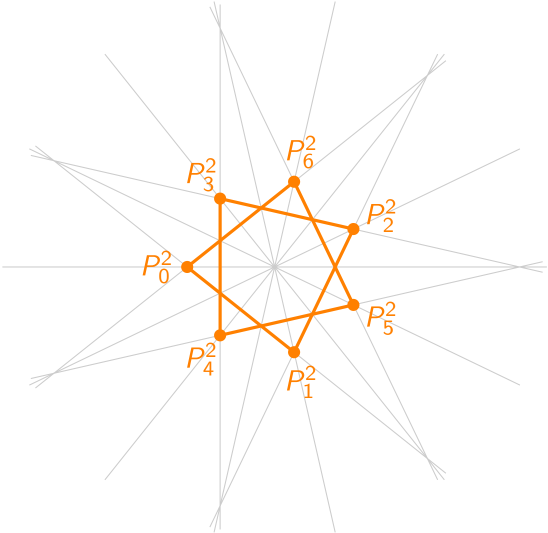
Heptágonos



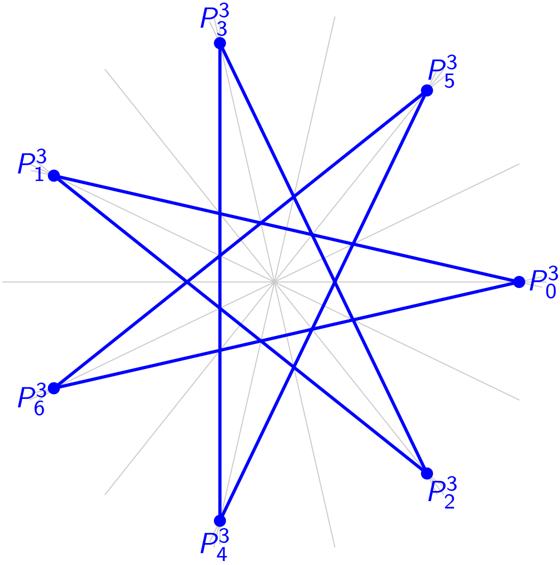
Heptágonos



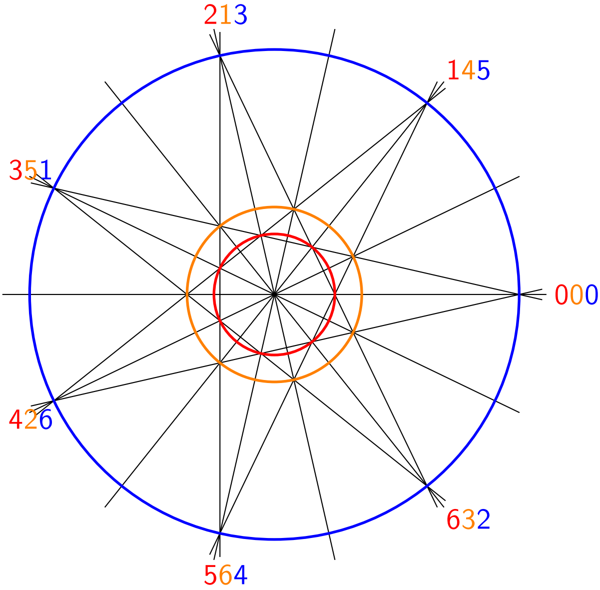
Heptágonos



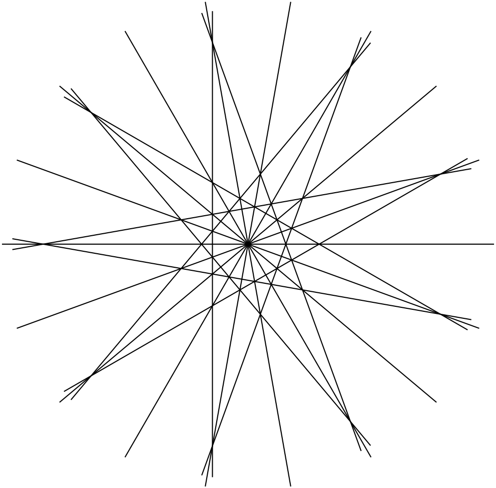
Heptágonos



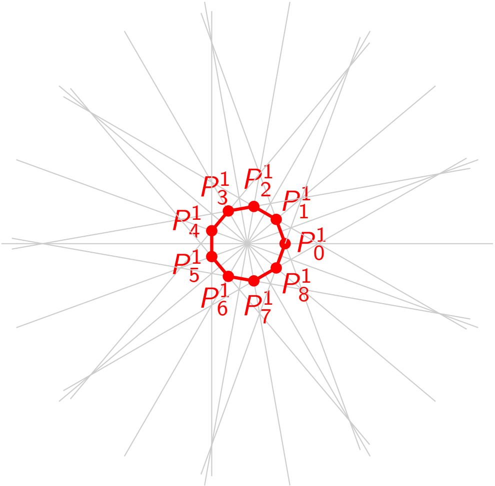
Heptágonos



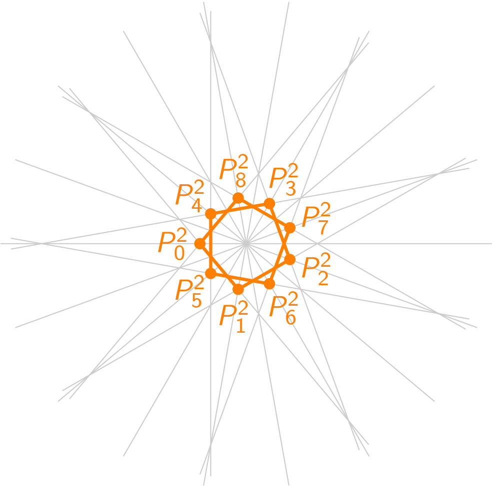
Eneágonos



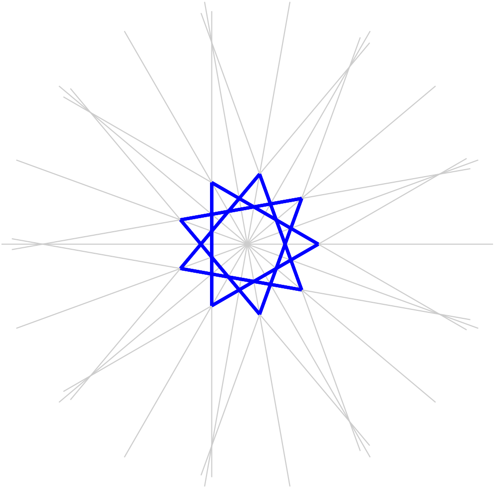
Eneágonos



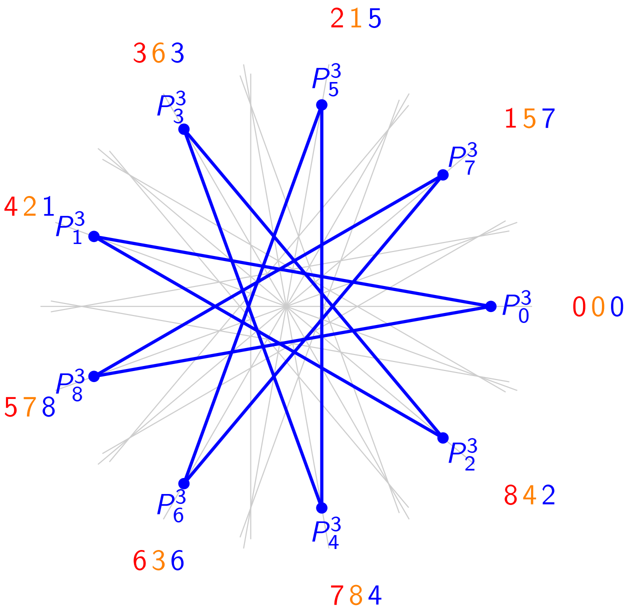
Eneágonos



Eneágonos

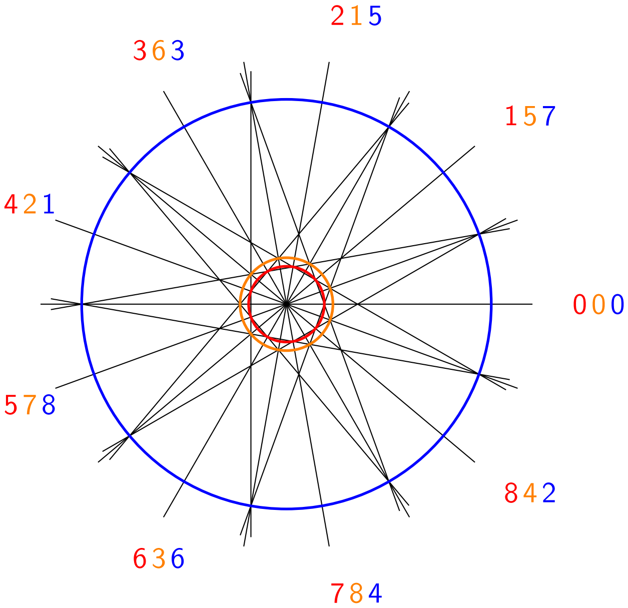


Eneágonos



2 1 5
3 6 3
1 5 7
4 2 1
0 0 0
5 7 8
8 4 2
6 3 6
7 8 4
P^3_0
P^3_1
P^3_2
P^3_3
P^3_4
P^3_5
P^3_6
P^3_7
P^3_8

Eneágonos



¡Muchas gracias por su atención!