

Configuraciones de rectas: topología, grupo fundamental y combinatoria [3, 4]

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

XII Encuentro de Topología
Puerto de la Cruz (Tenerife)
9 de Abril de 2005



Trabajo en común con:

- Jorge Carmona UCM
- José I. Cogolludo UZ
- Miguel Á. Marco UZ

- 1 Configuraciones de rectas
- 2 Combinatoria de Rybnikov
- 3 Configuraciones reales
- 4 Referencias

Definición 1.1 (Orlik-Terao [8])

Una **configuración de rectas** \mathcal{A} es un conjunto finito de rectas de $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Definición 1.1 (Orlik-Terao [8])

Una **configuración ordenada de rectas** \mathcal{A} es un conjunto finito ordenado de rectas de $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.



Definición 1.1 (Orlik-Terao [8])

Una **configuración ordenada de rectas** \mathcal{A} es un conjunto finito ordenado de rectas de $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Definición 1.2

La **topología** de \mathcal{A} es el tipo de homeomorfismo de $M(\mathcal{A}) := \mathbb{P}^2 \setminus \bigcup \mathcal{A}$.

Definición 1.1 (Orlik-Terao [8])

Una **configuración ordenada de rectas** \mathcal{A} es un conjunto finito ordenado de rectas de $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Definición 1.2

La **topología relativa** de \mathcal{A} es el tipo de homeomorfismo de $(\mathbb{P}^2, \bigcup \mathcal{A})$.

Definición 1.1 (Orlik-Terao [8])

Una **configuración ordenada de rectas** \mathcal{A} es un conjunto finito ordenado de rectas de $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Definición 1.2

La **topología relativa** de \mathcal{A} es el tipo de homeomorfismo de $(\mathbb{P}^2, \bigcup \mathcal{A})$.

Hay versiones orientadas (**de ambas**) y ordenadas (**de la relativa**).

Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

- $\forall l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l', \exists! p \in \mathcal{P}$ tal que $l, l' \in p$.



Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

- $\forall l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l', \exists! p \in \mathcal{P}$ tal que $l, l' \in p$.
- $\forall p \in \mathcal{P}$ se tiene $\nu_p := \#p \geq 2$.



Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

- $\forall l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l', \exists! p \in \mathcal{P}$ tal que $l, l' \in p$.
- $\forall p \in \mathcal{P}$ se tiene $\nu_p := \#p \geq 2$.

$\text{Aut } \mathcal{L}$ subgrupo de permutaciones de \mathcal{L} que respetan \mathcal{P} .

Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

- $\forall l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l', \exists! p \in \mathcal{P}$ tal que $l, l' \in p$.
- $\forall p \in \mathcal{P}$ se tiene $\nu_p := \#p \geq 2$.

Aut \mathcal{L} subgrupo de permutaciones de \mathcal{L} que respetan \mathcal{P} . Si \mathcal{L} está **ordenado**, hablaremos de **combinatoria ordenada**.

\mathcal{A} configuración $\implies \mathcal{L}(\mathcal{A})$ combinatoria

Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

- $\forall l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l', \exists! p \in \mathcal{P}$ tal que $l, l' \in p$.
- $\forall p \in \mathcal{P}$ se tiene $\nu_p := \#p \geq 2$.

Aut \mathcal{L} subgrupo de permutaciones de \mathcal{L} que respetan \mathcal{P} . Si \mathcal{L} está **ordenado**, hablaremos de **combinatoria ordenada**.

\mathcal{A} configuración $\implies \mathcal{L}(\mathcal{A})$ combinatoria

Problema 1.4

Establecer qué relaciones hay entre **combinatoria**, **topología**, **topología relativa**.

Definición 1.3

Una **combinatoria** es un par $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$, $\#\mathcal{L} < \infty$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})$, tales que:

- $\forall l, l' \in \mathcal{L}, l \neq l', \exists! p \in \mathcal{P}$ tal que $l, l' \in p$.
- $\forall p \in \mathcal{P}$ se tiene $\nu_p := \#p \geq 2$.

Aut \mathcal{L} subgrupo de permutaciones de \mathcal{L} que respetan \mathcal{P} . Si \mathcal{L} está **ordenado**, hablaremos de **combinatoria ordenada**.

\mathcal{A} configuración $\implies \mathcal{L}(\mathcal{A})$ combinatoria

Problema 1.4

Establecer qué relaciones hay entre **combinatoria ordenada**, **topología relativa ordenada**.



- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .

- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .
- Considerar hiperplanos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .
- Considerar hiperplanos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
- Considerar hiperplanos lineales en \mathbb{K}^{n+1} .

- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .
- Considerar hiperplanos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
- Considerar hiperplanos lineales en \mathbb{K}^{n+1} .
- **Considerar hiperplanos afines en \mathbb{K}^n .**

- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .
- Considerar hiperplanos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
- Considerar hiperplanos lineales en \mathbb{K}^{n+1} .
- Considerar hiperplanos afines en \mathbb{K}^n .
- **Considerar subespacios afines o lineales en \mathbb{K}^n .**

- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .
- Considerar hiperplanos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
- Considerar hiperplanos lineales en \mathbb{K}^{n+1} .
- Considerar hiperplanos afines en \mathbb{K}^n .
- Considerar subespacios afines o lineales en \mathbb{K}^n .
- **Considerar rectas pseudoholomorfas de Gromov [6].**

- Cambio de cuerpo base \mathbb{K} .
- Considerar hiperplanos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
- Considerar hiperplanos lineales en \mathbb{K}^{n+1} .
- Considerar hiperplanos afines en \mathbb{K}^n .
- Considerar subespacios afines o lineales en \mathbb{K}^n .
- Considerar rectas pseudoholomorfas de Gromov [6].
- **Considerar curvas algebraicas.**



- $H^*(M(\mathcal{A}))$ es isomorfo al álgebra de Orlik-Solomon (combinatorio): Arnol'd [1], Brieskorn [5], Orlik-Solomon [7].

- $H^*(M(\mathcal{A}))$ es isomorfo al álgebra de Orlik-Solomon (combinatorio): Arnol'd [1], Brieskorn [5], Orlik-Solomon [7].
- Rybnikov [10]: $\exists \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y tienen distinta topología relativa.

- $H^*(M(\mathcal{A}))$ es isomorfo al álgebra de Orlik-Solomon (combinatorio): Arnol'd [1], Brieskorn [5], Orlik-Solomon [7].
- Rybnikov [10]: $\exists \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y tienen **distinta topología relativa**.
- **Problemas de este trabajo:**

- $H^*(M(\mathcal{A}))$ es isomorfo al álgebra de Orlik-Solomon (combinatorio): Arnol'd [1], Brieskorn [5], Orlik-Solomon [7].
- Rybnikov [10]: $\exists \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y tienen **distinta topología relativa**.
- Problemas de este trabajo:
 - Dificultad de verificar los resultados [4]

- $H^*(M(\mathcal{A}))$ es isomorfo al álgebra de Orlik-Solomon (combinatorio): Arnol'd [1], Brieskorn [5], Orlik-Solomon [7].
- Rybnikov [10]: $\exists \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y tienen **distinta topología relativa**.
- Problemas de este trabajo:
 - Dificultad de verificar los resultados [4]
 - Los ejemplos no pueden admitir ecuaciones reales.

Definición 1.5

\mathcal{L} combinatoria de rectas, \mathbb{K} cuerpo.

- **Espacio de realizaciones:**

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\} =: \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\frac{\#\mathcal{L}(\#\mathcal{L}+3)}{2}},$$

Definición 1.5

\mathcal{L} combinatoria de rectas, \mathbb{K} cuerpo.

- **Espacio de realizaciones:**

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\} =: \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\frac{\#\mathcal{L}(\#\mathcal{L}+3)}{2}},$$

- **Espacio de móduli:** $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) := \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) / \mathrm{PGL}(3; \mathbb{K})$.



Definición 1.5

\mathcal{L} combinatoria de rectas, \mathbb{K} cuerpo.

- **Espacio de realizaciones:**

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\} =: \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\frac{\#\mathcal{L}(\#\mathcal{L}+3)}{2}},$$

- **Espacio de móduli:** $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) := \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) / \mathrm{PGL}(3; \mathbb{K})$.
- $\Sigma_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1)^{\#\mathcal{L}}$ y $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L})$.
- Omitiremos subíndices si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.



Definición 1.5

\mathcal{L} combinatoria de rectas, \mathbb{K} cuerpo.

- **Espacio de realizaciones:**

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\} =: \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\frac{\#\mathcal{L}(\#\mathcal{L}+3)}{2}},$$

- **Espacio de móduli:** $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) := \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) / \mathrm{PGL}(3; \mathbb{K})$.

- $\Sigma_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1)^{\#\mathcal{L}}$ y $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L})$.

- Omitiremos subíndices si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\Sigma_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) / \mathrm{Aut} \mathcal{L} \equiv \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}), \quad \mathcal{M}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) / \mathrm{Aut} \mathcal{L} \equiv \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$$

Definición 1.5

\mathcal{L} combinatoria de rectas, \mathbb{K} cuerpo.

- **Espacio de realizaciones:**

$$\{\mathcal{A} \mid \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\} =: \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\frac{\#\mathcal{L}(\#\mathcal{L}+3)}{2}},$$

- **Espacio de móduli:** $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) := \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) / \mathrm{PGL}(3; \mathbb{K})$.

- $\Sigma_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) \subset (\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1)^{\#\mathcal{L}}$ y $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L})$.

- Omitiremos subíndices si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\Sigma_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) / \mathrm{Aut} \mathcal{L} \equiv \Sigma_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}), \quad \mathcal{M}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{ord}}(\mathcal{L}) / \mathrm{Aut} \mathcal{L} \equiv \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$$

Proposición 1.6 (Randell [9])

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \mathcal{L}$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en la misma componente conexa de $\Sigma(\mathcal{L}) \Rightarrow \mathcal{A}_1$ y \mathcal{A}_2 tienen la misma topología relativa orientada.

Teorema 1.7 ([10])

$\exists \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; con la misma *combinatoria* y tales que

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bigcup \mathcal{A}_1) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bigcup \mathcal{A}_2).$$

Teorema 1.7 ([10])

$\exists \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$; con la misma **combinatoria** y tales que

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bigcup \mathcal{A}_1) \not\cong \pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \bigcup \mathcal{A}_2).$$

En particular, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 no tienen la misma **topología**.

Teorema 1.8 ([3])

\exists dos configuraciones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y sus complexificaciones $\mathcal{A}_i^{\mathbb{C}} := \mathcal{A}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, poseen distinta *topología relativa*.

Teorema 1.8 ([3])

\exists una configuración \mathcal{A} en $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ tal que las complexificaciones $\mathcal{A}_1^{\mathbb{C}}, \mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}$ inducidas por las dos inclusiones $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ poseen distinta **topología relativa**.

Teorema 1.8 ([3])

\exists dos configuraciones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y sus complexificaciones $\mathcal{A}_i^{\mathbb{C}} := \mathcal{A}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, poseen distinta *topología relativa*.

Preguntas 1.9

- ¿Son $M(\mathcal{A}_1^{\mathbb{C}})$ y $M(\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}})$ homeomorfos?



Teorema 1.8 ([3])

\exists dos configuraciones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y sus complexificaciones $\mathcal{A}_i^{\mathbb{C}} := \mathcal{A}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, poseen distinta *topología relativa*.

Preguntas 1.9

- ¿Son $M(\mathcal{A}_1^{\mathbb{C}})$ y $M(\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}})$ homeomorfos?
- ¿Son $\pi_1(M(\mathcal{A}_1^{\mathbb{C}}))$ y $\pi_1(M(\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}))$ grupos isomorfos?

Teorema 1.8 ([3])

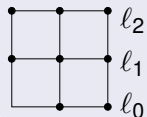
\exists dos configuraciones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ y sus complexificaciones $\mathcal{A}_i^{\mathbb{C}} := \mathcal{A}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, poseen distinta *topología relativa*.

Preguntas 1.9

- ¿Son $M(\mathcal{A}_1^{\mathbb{C}})$ y $M(\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}})$ homeomorfos?
- ¿Son $\pi_1(M(\mathcal{A}_1^{\mathbb{C}}))$ y $\pi_1(M(\mathcal{A}_2^{\mathbb{C}}))$ grupos isomorfos? Tienen la misma completión profinita.

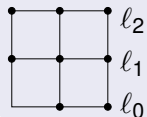


Combinatoria de MacLane



$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xRightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{ML}$$

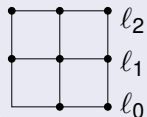
Combinatoria de MacLane



$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xRightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{ML}$$

$$\text{Aut } \mathcal{L}_{ML} = \text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$$

Combinatoria de MacLane

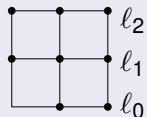


$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xRightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{\text{ML}}$$

$$\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{ML}} = \text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$$

$$\mathcal{M}^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = \{A_\zeta, A_{\bar{\zeta}}\}, \zeta = \exp \frac{2i\pi}{3}$$

Combinatoria de MacLane



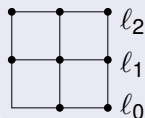
$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xRightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{ML}$$

$$\text{Aut } \mathcal{L}_{ML} = \text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$$

$$\mathcal{M}^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{ML}) = \{A_\zeta, A_{\bar{\zeta}}\}, \zeta = \exp \frac{2i\pi}{3}$$

$$\#\mathcal{M}(\mathcal{L}_{ML}) = 1$$

Combinatoria de MacLane



$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{\text{ML}}$$

$$\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{ML}} = \text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$$

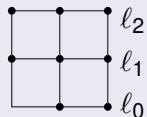
$$\mathcal{M}^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = \{\mathcal{A}_\zeta, \mathcal{A}_{\bar{\zeta}}\}, \zeta = \exp \frac{2i\pi}{3}$$

$$\#\mathcal{M}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = 1$$

Combinatoria de Rybnikov

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}})$ con l_0, l_1, l_2 comunes, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

Combinatoria de MacLane



$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{\text{ML}}$$

$$\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{ML}} = \text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$$

$$\mathcal{M}^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = \{A_\zeta, A_{\bar{\zeta}}\}, \zeta = \exp \frac{2i\pi}{3}$$

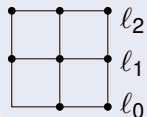
$$\#\mathcal{M}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = 1$$

Combinatoria de Rybnikov

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}})$ con l_0, l_1, l_2 comunes, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

- $\mathcal{L}_{\text{Ryb}}, \text{Aut } \mathcal{L}_{\text{Ryb}} = \Sigma_3 \times \{\pm 1\}$.

Combinatoria de MacLane



$$\mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{dualidad}} \mathcal{L}_{\text{ML}}$$

$$\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{ML}} = \text{GL}(2; \mathbb{F}_3)$$

$$\mathcal{M}^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = \{\mathcal{A}_\zeta, \mathcal{A}_{\bar{\zeta}}\}, \zeta = \exp \frac{2i\pi}{3}$$

$$\#\mathcal{M}(\mathcal{L}_{\text{ML}}) = 1$$

Combinatoria de Rybnikov

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma^{\text{ord}}(\mathcal{L}_{\text{ML}})$ con l_0, l_1, l_2 comunes, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

- $\mathcal{L}_{\text{Ryb}}, \text{Aut } \mathcal{L}_{\text{Ryb}} = \Sigma_3 \times \{\pm 1\}$.
- $\Sigma(\mathcal{L}_{\text{Ryb}})$ dos componentes conexas.

- G grupo tal que $G/G' = \mathbb{Z}^n$.
- $M^G := G'/G''$ como $\Lambda := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ -módulo.

- G grupo tal que $G/G' = \mathbb{Z}^n$.
- $M^G := G'/G''$ como $\Lambda := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ -módulo.
- $\mathfrak{m} \subset \Lambda$ ideal de aumentación, $\Lambda_m := \Lambda/\mathfrak{m}^m$, $M_m^G := M^G \otimes_{\Lambda} \Lambda_m$.



- G grupo tal que $G/G' = \mathbb{Z}^n$.
- $M^G := G'/G''$ como $\Lambda := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ -módulo.
- $\mathfrak{m} \subset \Lambda$ ideal de aumentación, $\Lambda_{\mathfrak{m}} := \Lambda/\mathfrak{m}^m$, $M_{\mathfrak{m}}^G := M^G \otimes_{\Lambda} \Lambda_{\mathfrak{m}}$.
- G_1, G_2 como antes, $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismo que induce la identidad en los abelianizados $\Rightarrow \varphi : M^1 \rightarrow M^2$ isomorfismo de Λ -módulos **especial**.



- G grupo tal que $G/G' = \mathbb{Z}^n$.
- $M^G := G'/G''$ como $\Lambda := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ -módulo.
- $\mathfrak{m} \subset \Lambda$ ideal de aumentación, $\Lambda_m := \Lambda/\mathfrak{m}^m$, $M_m^G := M^G \otimes_{\Lambda} \Lambda_m$.
- G_1, G_2 como antes, $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismo que induce la identidad en los abelianizados $\Rightarrow \varphi_m : M_m^1 \rightarrow M_m^2$ isomorfismo de Λ_m -módulos **especial**.



- G grupo tal que $G/G' = \mathbb{Z}^n$.
- $M^G := G'/G''$ como $\Lambda := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ -módulo.
- $\mathfrak{m} \subset \Lambda$ ideal de aumentación, $\Lambda_{\mathfrak{m}} := \Lambda/\mathfrak{m}^m$, $M_m^G := M^G \otimes_{\Lambda} \Lambda_{\mathfrak{m}}$.
- G_1, G_2 como antes, $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ isomorfismo que induce la identidad en los abelianizados $\Rightarrow \varphi : M^1 \rightarrow M^2$ isomorfismo de Λ -módulos **especial**.
- Existencia de φ_m : **Sistema de ecuaciones lineales sobre \mathbb{Z}** .



Proposición 2.1

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma(\mathcal{L}_{Ryb})$ en diferentes componentes conexas. Si fijamos órdenes compatibles, $\# \pi_1(M(\mathcal{A}_1)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M(\mathcal{A}_2))$ homológicamente triviales.



Proposición 2.1

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma(\mathcal{L}_{Ryb})$ en diferentes componentes conexas. Si fijamos órdenes compatibles, $\# \pi_1(M(\mathcal{A}_1)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M(\mathcal{A}_2))$ homológicamente triviales.

La resolución del sistema lineal lleva más de seis horas de tiempo efectivo de cálculo (existen soluciones racionales pero no enteras).



Proposición 2.1

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma(\mathcal{L}_{Ryb})$ en diferentes componentes conexas. Si fijamos órdenes compatibles, $\# \pi_1(M(\mathcal{A}_1)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M(\mathcal{A}_2))$ homológicamente triviales.

La resolución del sistema lineal lleva más de seis horas de tiempo efectivo de cálculo (existen soluciones racionales pero no enteras).

Proposición 2.2

$\mathcal{A}_\zeta, \mathcal{A}_{\bar{\zeta}}$ de MacLane, $\# \pi_1(M(\mathcal{A}_\zeta)) \rightarrow \pi_1(M(\mathcal{A}_{\bar{\zeta}}))$ homológicamente triviales.

La resolución lleva menos de un minuto y medio.



Proposición 2.1

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma(\mathcal{L}_{Ryb})$ en diferentes componentes conexas. Si fijamos órdenes compatibles, $\# \pi_1(M(\mathcal{A}_1)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M(\mathcal{A}_2))$ homológicamente triviales.

La resolución del sistema lineal lleva más de seis horas de tiempo efectivo de cálculo (existen soluciones racionales pero no enteras).

Proposición 2.2

$\mathcal{A}_\zeta, \mathcal{A}_{\bar{\zeta}}$ de MacLane, $\# \pi_1(M(\mathcal{A}_\zeta)) \rightarrow \pi_1(M(\mathcal{A}_{\bar{\zeta}}))$ homológicamente triviales.

La resolución lleva menos de un minuto y medio.

Proposición 2.2 + argumentos combinatorios \Rightarrow Proposición 2.1.

- \mathcal{A} configuración ordenada, $n := \#\mathcal{A}$, $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- $H_1(M(\mathcal{A}); \mathbb{Z}) = \frac{\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}x_i}{\sum_{i=0}^n x_i = 0} =: H_{\mathcal{L}}$.



- \mathcal{A} configuración ordenada, $n := \#\mathcal{A}$, $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- $H_1(M(\mathcal{A}); \mathbb{Z}) = \frac{\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}x_i}{\sum_{i=0}^n x_i = 0} =: H_{\mathcal{L}}$.
- $M_2(\mathcal{A}) = \frac{H_{\mathcal{L}} \wedge H_{\mathcal{L}}}{R} =: M_2(\mathcal{L})$.
- $\text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}} := \{\varphi \in \text{Aut } H_{\mathcal{L}} \mid \varphi \wedge \varphi(R) \subset R\}$.



- \mathcal{A} configuración ordenada, $n := \#\mathcal{A}$, $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- $H_1(M(\mathcal{A}); \mathbb{Z}) = \frac{\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}x_i}{\sum_{i=0}^n x_i = 0} =: H_{\mathcal{L}}$.
- $M_2(\mathcal{A}) = \frac{H_{\mathcal{L}} \wedge H_{\mathcal{L}}}{R} =: M_2(\mathcal{L})$.
- $\text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}} := \{\varphi \in \text{Aut } H_{\mathcal{L}} \mid \varphi \wedge \varphi(R) \subset R\}$.
- $\text{Aut } \mathcal{L} \times \{\pm 1_{H_{\mathcal{L}}}\} \subset \text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}}$.
- Si hay igualdad, \mathcal{L} es **homológicamente rígida**.



Definición 2.3

Una combinatoria $\mathcal{L} = \{l_j\}$ es **3-admisible** si existen $l_j \mapsto v_j \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ tales que:

- 1 $\exists P \in \mathcal{P}$ múltiple, tal que $\text{rk}\langle v_j \mid l_j \in P \rangle = 2$.
- 2 $\forall P \in \mathcal{P}, \forall l_j \in P, \text{rk}\langle v_i, \sum_{l_j \in P} v_j \rangle = 1$.
- 3 $\sum_{l_j \in \mathcal{L}} v_j = (0, 0)$.

Ejemplo 2.4

Puntos triples, configuración de Ceva

Pasos a seguir

- Cualquier $\varphi \in \text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}}$ define una permutación de las subcombinatorias 3-admisibles.



Pasos a seguir

- Cualquier $\varphi \in \text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}}$ define una permutación de las subcombinatorias 3-admisibles.
- Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$, solo los puntos triples son 3-admisibles.

Pasos a seguir

- Cualquier $\varphi \in \text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}}$ define una permutación de las subcombinatorias 3-admisibles.
- Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$, solo los puntos triples son 3-admisibles.
- La permutación definida por φ proviene de un elemento de $\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$.

Pasos a seguir

- Cualquier $\varphi \in \text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}}$ define una permutación de las subcombinatorias 3-admisibles.
- Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$, solo los puntos triples son 3-admisibles.
- La permutación definida por φ proviene de un elemento de $\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$.
- $\varphi \in \text{Aut } \mathcal{L} \times \{\pm 1_{H_{\mathcal{L}}}\}$.



Pasos a seguir

- Cualquier $\varphi \in \text{Aut}^{\mathcal{L}} H_{\mathcal{L}}$ define una permutación de las subcombinatorias 3-admisibles.
- Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$, solo los puntos triples son 3-admisibles.
- La permutación definida por φ proviene de un elemento de $\text{Aut } \mathcal{L}_{\text{Ryb}}$.
- $\varphi \in \text{Aut } \mathcal{L} \times \{\pm 1_{H_{\mathcal{L}}}\}$.

Por tanto los grupos fundamentales de las dos configuraciones de Rybnikov no son homeomorfos.



Nueva combinatoria

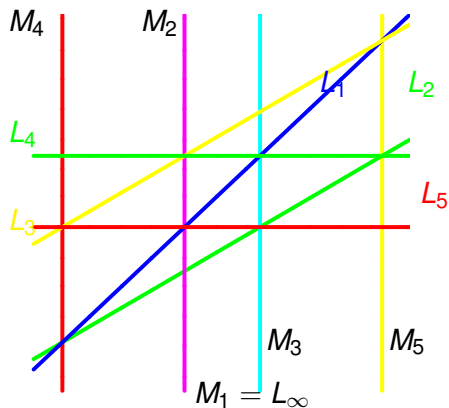
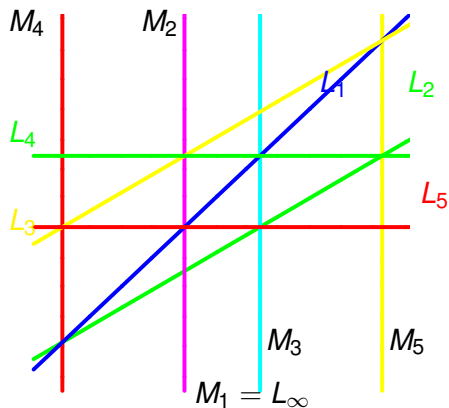


Figura: \mathcal{A} tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}$

Nueva combinatoria



- $\Sigma_{\mathbb{F}_4}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.
- $\# \text{Aut } \mathcal{L} = 20$.

Figura: \mathcal{A} tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}$

Nueva combinatoria

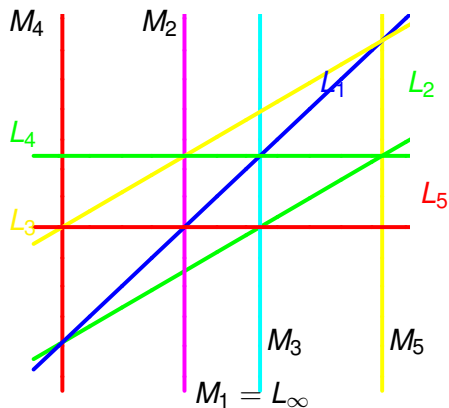


Figura: \mathcal{A} tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}$

- $\Sigma_{\mathbb{F}_4}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.
- $\#\text{Aut } \mathcal{L} = 20$.
- $\mathcal{M}^{\text{ord}}(\mathcal{L}) = \{\mathcal{A}_{\pm}\}$.
- $\#\mathcal{M}(\mathcal{L}) = 1$.
- $\Sigma_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.

$$M_1 : z = 0, \quad M_2 : x = 0, \quad M_3 : x = z, \quad L_1 : y = x, \quad L_5 : y = 0,$$



$$M_1 : z = 0, \quad M_2 : x = 0, \quad M_3 : x = z, \quad L_1 : y = x, \quad L_5 : y = 0,$$

$$M_4 : x = -(\gamma + 1)z, \quad M_5 : x = (\gamma + 2)z,$$

$$L_2 : y = \gamma(x - z), \quad L_3 : y = \gamma x + z, \quad L_4 : y = z,$$



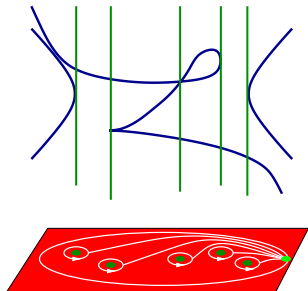
$$M_1 : z = 0, \quad M_2 : x = 0, \quad M_3 : x = z, \quad L_1 : y = x, \quad L_5 : y = 0,$$

$$M_4 : x = -(\gamma + 1)z, \quad M_5 : x = (\gamma + 2)z,$$

$$L_2 : y = \gamma(x - z), \quad L_3 : y = \gamma x + z, \quad L_4 : y = z,$$

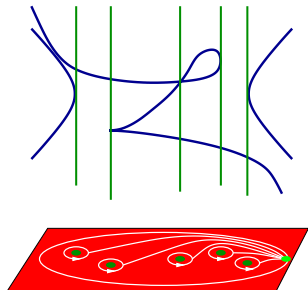
$$\gamma^2 + \gamma - 1 = 0, \quad \gamma^\pm := \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$





$$\bullet \sigma : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta; *) \rightarrow \mathbb{B}_d.$$

Figura: Proyección



- $\sigma : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta; *) \rightarrow \mathbb{P}_d$.
- σ bien definido salvo conjugación en \mathbb{P}_d .

Figura: Proyección

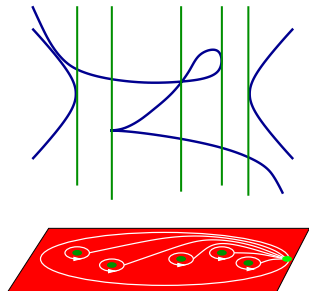


Figura: Proyección

- $\sigma : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta; *) \rightarrow \mathbb{P}_d$.
- σ bien definido salvo conjugación en \mathbb{P}_d .
- Si μ_1, \dots, μ_r base (seudo)geométrica, σ está determinado por un elemento en $(\mathbb{P}_d)^r$.

Movimientos de Hurwitz

- $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \mapsto (\tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}, \tau_1, \dots, \tau_r)$.



Movimientos de Hurwitz

- $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \mapsto (\tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}, \tau_1, \dots, \tau_r)$.
- Es una acción de \mathbb{B}_r .



Movimientos de Hurwitz

- $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \mapsto (\tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}, \tau_1, \dots, \tau_r)$.
- Es una acción de \mathbb{B}_r .
- Un movimiento es **puro** si corresponde a un elemento de \mathbb{P}_r .

Movimientos de Hurwitz

- $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \mapsto (\tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}, \tau_1, \dots, \tau_r)$.
- Es una acción de \mathbb{B}_r .
- Un movimiento es **puro** si corresponde a un elemento de \mathbb{P}_r .

Conjugación + Movimientos de Hurwitz puros \Rightarrow acción de $\mathbb{P}_d \times \mathbb{P}_r$.

Movimientos de Hurwitz

- $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) \mapsto (\tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}, \tau_1, \dots, \tau_r)$.
- Es una acción de \mathbb{B}_r .
- Un movimiento es **puro** si corresponde a un elemento de \mathbb{P}_r .

Conjugación + Movimientos de Hurwitz puros \Rightarrow acción de $\mathbb{P}_d \times \mathbb{P}_r$.

Definición 3.1

Dos monodromías de trenzas (en $(\mathbb{P}_d)^r$) son **equivalentes** si están en la misma órbita por la acción de $\mathbb{P}_d \times \mathbb{P}_r$.



Definición 3.2

- **Configuración horizontal:** par (\mathcal{A}, P) tal que \mathcal{A} configuración ordenada (de rectas y puntos) y $P \in M(\mathcal{A})$.



Definición 3.2

- **Configuración horizontal:** par (\mathcal{A}, P) tal que \mathcal{A} configuración ordenada (de rectas y puntos) y $P \in M(\mathcal{A})$.
- **Configuración fibrada** \mathcal{A}^φ : añadir ordenadamente las rectas que unen P y los puntos múltiples de \mathcal{A} .

Definición 3.2

- **Configuración horizontal:** par (\mathcal{A}, P) tal que \mathcal{A} configuración ordenada (de rectas y puntos) y $P \in M(\mathcal{A})$.
- **Configuración fibrada** \mathcal{A}^φ : añadir ordenadamente las rectas que unen P y los puntos múltiples de \mathcal{A} .
- **Monodromía de trenzas:** enviar la primera recta vertical al infinito.

Definición 3.2

- **Configuración horizontal:** par (\mathcal{A}, P) tal que \mathcal{A} configuración ordenada (de rectas y puntos) y $P \in M(\mathcal{A})$.
- **Configuración fibrada** \mathcal{A}^φ : añadir ordenadamente las rectas que unen P y los puntos múltiples de \mathcal{A} .
- **Monodromía de trenzas:** enviar la primera recta vertical al infinito.

Teorema 3.3 (Carmona, Cogolludo [2])

$(\mathcal{A}_1, P_1), (\mathcal{A}_2, P_2), F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo positivo y:

- Ⓐ $F(P_1) = P_2,$
- Ⓑ $F(\mathcal{A}_1^\varphi) = \mathcal{A}_2^\varphi$ preservando orden y orientaciones.

Definición 3.2

- **Configuración horizontal:** par (\mathcal{A}, P) tal que \mathcal{A} configuración ordenada (de rectas y puntos) y $P \in M(\mathcal{A})$.
- **Configuración fibrada** \mathcal{A}^φ : añadir ordenadamente las rectas que unen P y los puntos múltiples de \mathcal{A} .
- **Monodromía de trenzas:** enviar la primera recta vertical al infinito.

Teorema 3.3 (Carmona, Cogolludo [2])

$(\mathcal{A}_1, P_1), (\mathcal{A}_2, P_2), F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ homeomorfismo positivo y:

- Ⓐ $F(P_1) = P_2$,
- Ⓑ $F(\mathcal{A}_1^\varphi) = \mathcal{A}_2^\varphi$ preservando orden y orientaciones.

Entonces, $(\mathcal{A}_1, P_1), (\mathcal{A}_2, P_2)$ poseen monodromías de trenzas equivalentes.

Cálculo de la monodromía

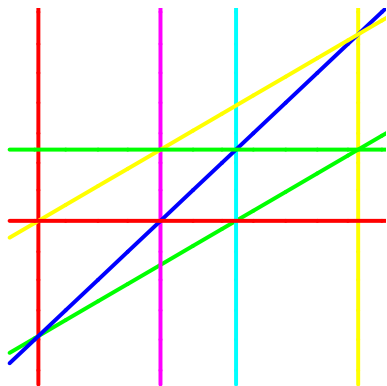


Figura: \mathcal{A}_+

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 \sigma_3^2 \\ & (\sigma_1 \sigma_3) * (\sigma_2^2 \sigma_4^2) \\ & (\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4) * (\sigma_1^2 \sigma_3^2) \\ & (\sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_3) * (\sigma_2^2 \sigma_4^2) \end{aligned}$$

Configuraciones conjugadas ordenadas

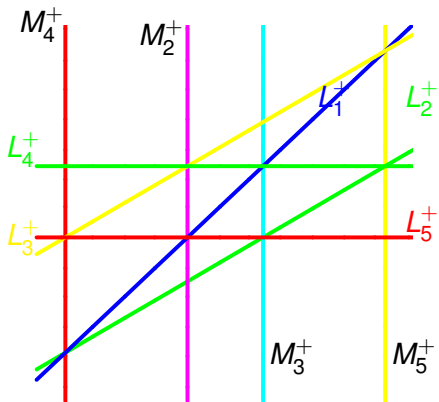


Figura: \mathcal{A}_+

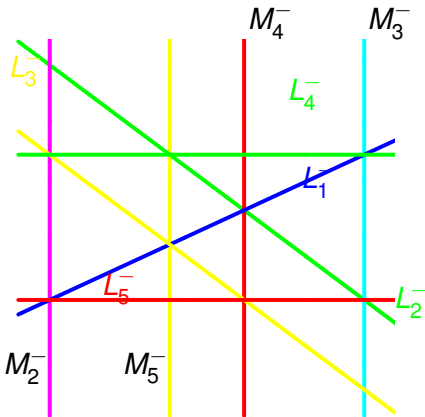


Figura: \mathcal{A}_-

Teorema 3.4

\mathcal{A}^+ y \mathcal{A}^- poseen topologías relativas ordenadas distintas.

Pasos de la demostración.



Teorema 3.4

\mathcal{A}^+ y \mathcal{A}^- poseen topologías relativas ordenadas distintas.

Pasos de la demostración.

- 1 $\#$ homeomorfismos + plano y rectas: Monodromías de trenzas no equivalentes (representaciones de trenzas en grupos finitos).



Teorema 3.4

\mathcal{A}^+ y \mathcal{A}^- poseen topologías relativas ordenadas distintas.

Pasos de la demostración.

- 1 \ncong homeomorfismos + plano y rectas: Monodromías de trenzas no equivalentes (representaciones de trenzas en grupos finitos).
- 2 \ncong homeomorfismos + plano y $-$ en rectas: Conjugación compleja.



Teorema 3.4

\mathcal{A}^+ y \mathcal{A}^- poseen topologías relativas ordenadas distintas.

Pasos de la demostración.

- 1 \ncong homeomorfismos + plano y rectas: Monodromías de trenzas no equivalentes (representaciones de trenzas en grupos finitos).
- 2 \ncong homeomorfismos + plano y $-$ en rectas: Conjugación compleja.
- 3 Resto de los casos: Número de intersección.

Configuraciones conjugadas no homeomorfas

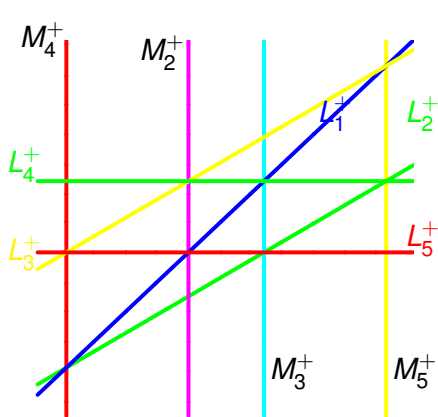


Figura: \mathcal{A}^+

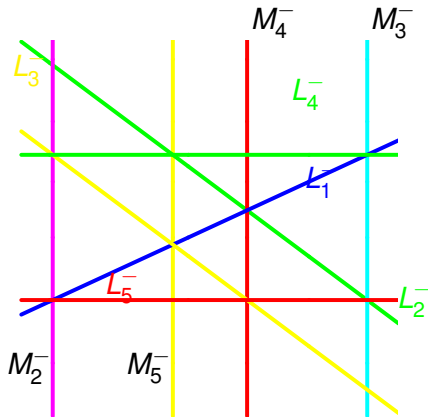


Figura: \mathcal{A}^-

Configuraciones conjugadas no homeomorfas

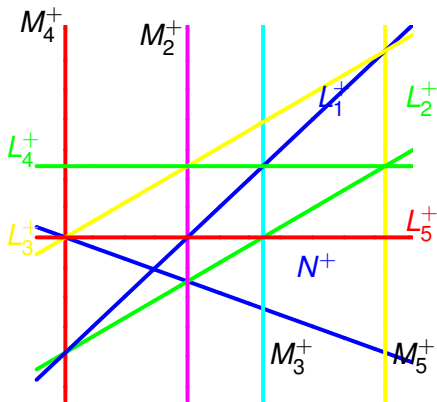


Figura: \mathcal{B}^+

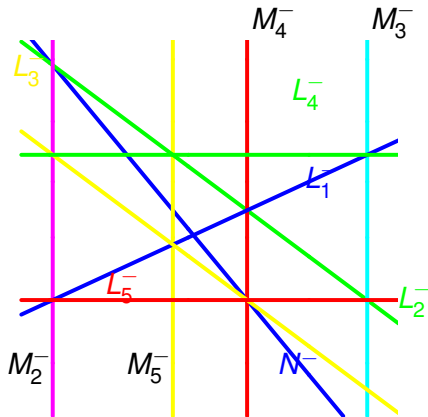


Figura: \mathcal{B}^-

Proposición 3.5

$\mathcal{H} := \mathcal{L}(\mathcal{B}^\pm)$, $\text{Aut } \mathcal{H} = \{1\}$ y $\#\mathcal{M}(\mathcal{H}) = 2$.

Demostración del Teorema 1.8.



Proposición 3.5

$\mathcal{H} := \mathcal{L}(\mathcal{B}^\pm)$, $\text{Aut } \mathcal{H} = \{1\}$ y $\#\mathcal{M}(\mathcal{H}) = 2$.

Demostración del Teorema 1.8.

- Suponer que $\exists h : (\mathbb{P}^2, \cup \mathcal{B}^+)$ y $(\mathbb{P}^2, \cup \mathcal{B}^-)$ homeomorfismo.



Proposición 3.5

$\mathcal{H} := \mathcal{L}(\mathcal{B}^\pm)$, $\text{Aut } \mathcal{H} = \{1\}$ y $\#\mathcal{M}(\mathcal{H}) = 2$.

Demostración del Teorema 1.8.

- Suponer que $\exists h : (\mathbb{P}^2, \cup \mathcal{B}^+)$ y $(\mathbb{P}^2, \cup \mathcal{B}^-)$ homeomorfismo.
- Induce $\varphi_h \in \text{Aut } \mathcal{H}$, i.e., $h(N^+) = N^-$ y respeta el orden en \mathcal{A}^\pm .

Proposición 3.5

$\mathcal{H} := \mathcal{L}(\mathcal{B}^\pm)$, $\text{Aut } \mathcal{H} = \{1\}$ y $\#\mathcal{M}(\mathcal{H}) = 2$.

Demostración del Teorema 1.8.

- Suponer que $\exists h : (\mathbb{P}^2, \cup \mathcal{B}^+)$ y $(\mathbb{P}^2, \cup \mathcal{B}^-)$ homeomorfismo.
- Induce $\varphi_h \in \text{Aut } \mathcal{H}$, i.e., $h(N^+) = N^-$ y respeta el orden en \mathcal{A}^\pm .
- Contradicción con el Teorema 3.4. □

V. I. Arnol'd, *The cohomology ring of the group of dyed braids*, *Mat. Zametki* **5** (1969), 227–231.

E. Artal, J. Carmona and J. I. Cogolludo, *Braid monodromy and topology of plane curves*, Duke Math. J. **118** (2003), no. 2, 261–278.

E. Artal, J. Carmona, J. I. Cogolludo, and M. Marco, *Topology and combinatorics of real line arrangements*, Preprint available at [arXiv:math.AG/0307296](https://arxiv.org/abs/math/0307296), 2003.

_____, *Invariants of Combinatorial Line Arrangements and Rybnikov's Example*, Aceptado en Proceedings of 12th MSJ-IRI symposium "Singularity theory and its applications y disponible en [arXiv:math.AG/0403543](https://arxiv.org/abs/math/0403543), 2004.

- E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses [d'après V. I. Arnol' d]*, Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 401, Springer, Berlin, 1973, pp. 21–44. Lecture Notes in Math., Vol. 317.
- M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), no. 2, 307–347.

Referencias IV

P. Orlik y L. Solomon, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Invent. Math. **56** (1980), no. 2, 167–189.

P. Orlik y H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

R. Randell, *Lattice-isotopic arrangements are topologically isomorphic*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), no. 2, 555–559.

G. Rybnikov, *On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement*, Preprint available at [arXiv:math.AG/9805056](https://arxiv.org/abs/math/9805056).