

SOBRE ORIENTACIONES

ENRIQUE ARTAL

1. ORIENTACIÓN EN ESPACIOS VECTORIALES

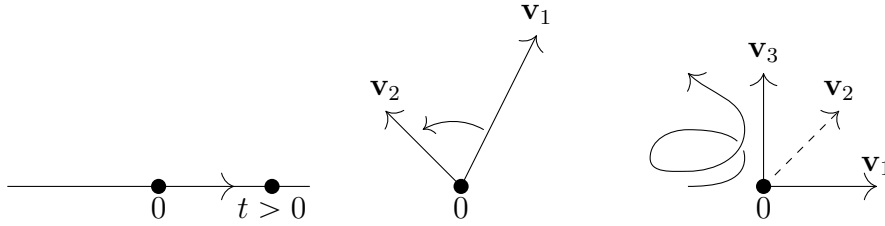
Sea V un espacio vectorial real de dimensión n , y sea \mathcal{B} el conjunto de todas las bases ordenadas de V . Dos bases ordenadas \mathbf{v}, \mathbf{w} (que interpretaremos como matrices fila de vectores) están relacionadas por su matriz de cambio de base

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}P, \quad P \in \text{GL}(n; \mathbb{R}).$$

La siguiente relación en \mathcal{B} es claramente de equivalencia: $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \det P > 0$. Esta relación tiene solo dos clases de equivalencia, a las que llamaremos *orientaciones* de V . Un *espacio vectorial orientado* es un par (V, θ) , donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y θ es una orientación de V . Claramente, un espacio vectorial se puede orientar de dos maneras; fijada una orientación, las bases de la orientación se dicen *positivas*, mientras que las demás, se dicen *negativas*. Normalmente para dar un espacio vectorial orientado fijaremos una base positiva. Por convención, una orientación del espacio vectorial nulo es la asignación de un signo \pm .

Ejemplo 1.1. La orientación canónica de \mathbb{R}^n es la dada por la base canónica. En \mathbb{R} , las bases *positivas* son las dadas por los números reales positivos. En \mathbb{R}^2 se puede determinar fácilmente si una base es positiva. Sea $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ una base; como los vectores no están en la misma recta, podemos considerar la rotación de ángulo $< \pi$ que lleva \mathbf{v}_1 sobre la semirrecta determinada por \mathbf{v}_2 . Si este giro es antihorario, la base es positiva, en caso contrario, es negativa. Es fácil, justificar este razonamiento. Si rotamos conjuntamente $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ para que \mathbf{v}_1 esté en el eje X positivo, no cambiamos la orientación de la base. Por tanto, podemos suponer que $\mathbf{v}_1 = (t, 0)$, $t > 0$, y $\mathbf{v}_2 = (u, v)$. Por la independencia lineal, $v \neq 0$, y la matriz de cambio de base con la base canónica es $\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & v \end{pmatrix}$, por lo que el signo del determinante del cambio de base es el de v ; si $v > 0$, \mathbf{v}_2 está en el semiplano superior, mientras que si $v < 0$, entonces \mathbf{v}_2 está en el semiplano inferior, y vemos que el criterio funciona.

Para \mathbb{R}^3 , $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ es una base positiva si al hacer el *giro* ordenado, este va en el sentido de la *regla del sacacorchos*, y el razonamiento es similar al realizado anteriormente.

FIGURA 1. Orientaciones en \mathbb{R}^n

Sea ahora V un \mathbb{C} -espacio vectorial complejo de dimensión n ; si olvidamos la multiplicación por i , es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $2n$. Si (v_1, \dots, v_n) es una \mathbb{C} -base, entonces $(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$ es una \mathbb{R} -base.

Proposición 1.2. *Dos bases complejas de V inducen bases reales en la misma orientación.*

Por ello, un espacio vectorial complejo, visto como espacio vectorial real, tiene una orientación canónica, aquella determinada por las bases reales que provienen de bases complejas. La demostración de este resultado es consecuencia de los siguientes lemas.

Lema 1.3. *Los grupos $GL^+(n; \mathbb{R})$ (matrices regulares de determinante positivo) y $GL(n; \mathbb{C})$ son conexos.*

Lema 1.4. *Sea $F : GL(n; \mathbb{C}) \rightarrow GL(2n; \mathbb{R})$ la aplicación que consiste en sustituir cada entrada a de una matriz en $GL(n; \mathbb{C})$ por la caja $\begin{pmatrix} \Re a & -\Im a \\ \Im a & \Re a \end{pmatrix}$. La aplicación está bien definida y su imagen está contenida en $GL^+(2n; \mathbb{R})$.*

2. ORIENTACIÓN EN VARIEDADES DIFERENCIABLES

Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión n . Se dice que M es orientable si es posible asignar una orientación $\theta_{\mathbf{p}}$ de $T_{\mathbf{p}}M$, $\forall \mathbf{p} \in M$, de manera que $\forall \mathbf{p} \in M$ existe una carta $\mathbf{x} : U \rightarrow M$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto conexo, tal que $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U)$, y $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{x}(U)$, la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_{\mathbf{q}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_{\mathbf{q}} \right)$ es positiva.

Si en una variedad orientable fijamos una orientación, diremos que es *orientada*. Las cartas con la propiedad anterior se dicen *positivas*. Una variedad conexa orientable admite dos orientaciones.

Ejemplo 2.1. Cualquier variedad diferenciable que se puede cubrir por una carta, como \mathbb{R}^n o cualquier abierto, es orientable. Lo mismo ocurre, sin la variedad se puede cubrir con dos cartas (conexas) de manera que la intersección es conexa. Por ejemplo, las esferas son orientables.

Sean M, N dos variedades (conexas) orientadas de dimensión n , y sea $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo local. Diremos que F *preserva* (resp. *invierte*) la orientación si $\forall \mathbf{p} \in M$, la matriz de $dF_{\mathbf{p}}$ en bases positivas de $T_{\mathbf{p}}M$ y $T_{F(\mathbf{p})}N$ es de determinante positivo. Esta propiedad es especialmente relevante cuando $M = N$ (con la misma orientación); notemos que en este caso, la propiedad de preservar o invertir la orientación se mantiene si cambiamos la orientación de M .

Ejemplo 2.2. Sea $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la aplicación antipodal. Entonces, F preserva la orientación si y solo si n es impar.

Ejemplo 2.3. Supongamos que $F : M \rightarrow N$ es una cubierta regular y que todo automorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ de la cubierta preserva la orientación. Entonces, N es orientable. Por ejemplo, $(\mathbb{S}^1)^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (acción por traslación) o $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2)$ (acción antipodal) son orientables, en este último caso solo si n es impar. En el caso de \mathbb{S}^1 , una orientación se puede determinar como sigue. Elegimos tres puntos distintos $P, Q, R \in \mathbb{S}^1$; un vector tangente es positivo si está en la dirección del camino que va de P a Q pasando por R .

Ejemplo 2.4. Toda variedad analítica compleja M es orientable y tiene una orientación canónica.

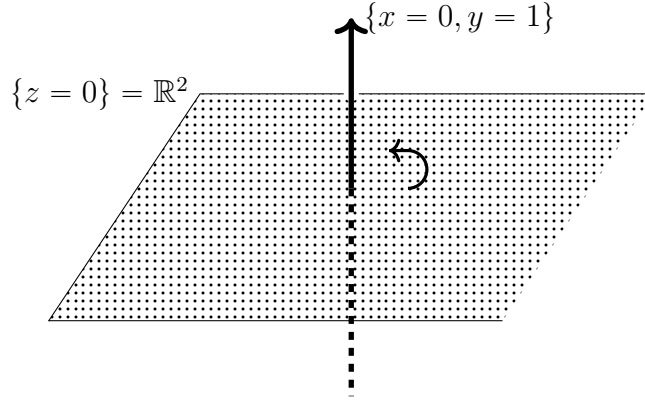
Las orientaciones también se usan para calcular intersecciones con signo. Sean $S_1, S_2 \subset M$, dos subvariedades tales que $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim M$. Recordemos que se dice que dos subvariedades se intersecan transversalmente, en notación $S_1 \pitchfork S_2$, si $\forall \mathbf{p} \in S_1 \cap S_2$, se tiene que $T_{\mathbf{p}}S_1 + T_{\mathbf{p}}S_2 = T_{\mathbf{p}}M$. Con las condiciones de dimensión que hemos impuesto, en nuestro caso si la intersección es transversa, la suma es directa. En general, $S_1 \pitchfork S_2$ implica que $S_1 \cap S_2$ también es subvariedad, por lo que en nuestro caso se trata de puntos.

Definición 2.5. Con las notaciones anteriores y suponiendo M, S_1, S_2 orientadas, el *número de intersección* $(S_1 \cap S_2)_{\mathbf{p}} = \pm 1$ según la orientación de $T_{\mathbf{p}}S_1 \oplus T_{\mathbf{p}}S_2$ coincida o no con la de $T_{\mathbf{p}}M$.

Ejemplo 2.6. Por ejemplo, podemos considerar $M = \mathbb{R}^3$, S_1 un plano y S_2 una recta transversa. Si orientamos como en la Figura 2, tenemos $(S_1 \cdot S_2)_{\mathbf{p}} = 1$.

Si $f : S_1 \rightarrow M$ es una inmersión, diremos que $f \pitchfork S_2$, si $\forall \mathbf{p} \in S_1$ tal que $f(\mathbf{p}) \in S_2$ se tiene que $df_{\mathbf{p}}(T_{\mathbf{p}}S_1) + T_{f(\mathbf{p})}S_2 = T_{f(\mathbf{p})}M$. En este caso también se pueden dar signos a las intersecciones si las dimensiones de S_1, S_2 suman para dar la de M .

Veamos otro caso en el que podemos probar que una variedad es orientable. Sea M una variedad conexa orientable, y sea $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación \mathcal{C}^∞ tal que

FIGURA 2. Intersección en \mathbb{R}^3

$dF_{\mathbf{p}} \neq 0, \forall \mathbf{p} \in M$. Sabemos que en esa situación $S := F^{-1}(0)$ es una subvariedad diferenciable de M .

Proposición 2.7. *La subvariedad S es orientable.*

Demostración. Fijemos una orientación en M . Sea $\mathbf{p} \in S$, y sea una carta positiva $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ tal que $\mathbf{p} \in \mathbf{x}(U)$; sea $\mathbf{u}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{p}$. Sea $F_{\mathbf{x}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ la función $F \circ \mathbf{x}$. Sabemos que es posible encontrar una carta \mathbf{x} tal que $F_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n) = x_n$. En este caso $S \cap \mathbf{x}(U) = \mathbf{x}(\{x_n = 0\})$. La orientación que asignamos a $T_{\mathbf{p}}S$ es la dada por la base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_{\mathbf{q}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}|_{\mathbf{q}} \right)$.

Si tenemos dos cartas de este tipo, el cambio de cartas debe de ser de la forma

$$(2.1) \quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(\underline{x}), \dots, f_{n-1}(\underline{x}), x_n).$$

Denotemos $\underline{x}^{n-1} := (x_1, \dots, x_{n-1})$. La matriz jacobiana del cambio de base en $(\underline{x}^{n-1}, 0)$ es

$$(2.2) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{(\underline{x}^{n-1}, 0)} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}|_{(\underline{x}^{n-1}, 0)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}|_{(\underline{x}^{n-1}, 0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}|_{(\underline{x}^{n-1}, 0)} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}|_{(\underline{x}^{n-1}, 0)} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}|_{(\underline{x}^{n-1}, 0)} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La caja interior es el cambio de cartas de S , y es de determinante positivo. \square

Anteriormente hemos estudiado la asignación de signos en los puntos de intersección trasversal de dos subvariedades de dimensiones complementarias. Veamos el caso general. Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n . Sean S_1, S_2 dos subvariedades orientadas de dimensiones n_1, n_2 y tales que $S_1 \pitchfork S_2$. Supongamos que $S := S_1 \cap S_2$ es no vacía (en particular, $n_1 + n_2 \geq n$). La teoría de

transversalidad garantiza que S es una subvariedad de M (y también de S_1 y S_2) de dimensión $m := n_1 + n_2 - n$.

Proposición 2.8. *La variedad S es orientable.*

El siguiente lema es la clave de la demostración.

Lema 2.9. *Sea V un espacio vectorial orientado de dimensión n y sean H_1, H_2 dos subespacios orientados tales $V = H_1 + H_2$, de dimensiones n_1, n_2 . Sea $H := H_1 \cap H_2$, de dimensión $m := n_1 + n_2 - m$. Hay una única manera de orientar H de manera que las bases (ordenadas) positivas \mathbf{v} de H cumplen la siguiente propiedad.*

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son dos familias de vectores libres tales que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}$ es base positiva de H_1 y $\mathbf{v} + \mathbf{v}_2$ es base positiva de H_2 , entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v} + \mathbf{v}_2$ es base positiva de H .

Demostración. Fijemos una orientación de H y una base arbitraria \mathbf{v} en la orientación. Consideremos familias $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ como en el enunciado. Veamos qué posibles cambios se pueden dar:

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot P, \quad \mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{v}_i \cdot P_i + \mathbf{v} \cdot Q_i,$$

donde $P \in \text{GL}^+(m; \mathbb{R})$, $P_i \in \text{GL}^+(n_i - m; \mathbb{R})$ y $Q_i \in \text{Mat}(m \times (n_i - m); \mathbb{R})$. La nueva base es

$$\left(\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{v}_2 \right) \left(\begin{array}{c|c|c} P_1 & 0 & 0 \\ \hline Q_1 & P & Q_2 \\ \hline 0 & 0 & P_2 \end{array} \right)$$

que es de determinante positivo. Por tanto, la orientación de \mathbf{v} determina la orientación de la base de H .

Si $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v} + \mathbf{v}_2$ es positiva, ya está. Si no, cambiamos el signo de \mathbf{v} , lo que nos obliga a cambiar los signos de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ para cumplir la propiedad de la orientación de H_1, H_2 . Como hay tres cambios de signo, esta base es positiva. \square

Demostración de la Proposición 2.8. La condición de transversalidad nos permite elegir cartas positivas donde la anulación de las n_2 últimas coordenadas nos da S_1 y las de las n_1 primeras nos da S_2 . Reordenando las variables para cumplir con el lema anterior, nos da el resultado. \square

Corolario 2.10. $S_2 \cdot S_1 = (-1)^{(m-n_1)(m-n_2)} S_1 \cdot S_2$

3. ORIENTABILIDAD Y VARIEDADES CON BORDE

Sea M una variedad con borde ∂M . Recordemos que en dichas variedades, además de las cartas habituales, tenemos otras cartas definidas en abiertos de

$\mathbb{R}_-^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$. La imagen por esas cartas del hiperplano $x_n = 0$ es ∂M . En esta situación, a la hora de definir $T_{\mathbf{p}}M$, tenemos como subespacio $T_{\mathbf{p}}\partial M$ y solo los vectores en uno de los dos semiespacios son *verdaderos* vectores tangentes a M . Un vector $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M \setminus T_{\mathbf{p}}\partial M$ se dice *normal exterior* (resp. *normal interior*) si está en el semiespacio exterior (resp. interior). En cualquier caso, es posible definir la orientabilidad como en el caso de las variedades sin borde.

Proposición 3.1. *Sea M una variedad con borde orientable. Entonces, ∂M es una variedad orientable.*

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que en la Proposición 2.7. El cambio de dos cartas positivas con borde es como en (2.1), sustituyendo x_n por $x_n h(\underline{x})$; la función está definida solo para $x_n \geq 0$, y si $x_n < 0$, entonces $h(\underline{x}) > 0$. La matriz jacobiana es como en (2.2), sustituyendo el último 1 por $h(\underline{x}^{n-1}, 0)$. Como la matriz debe de ser no degenerada, este valor es no nulo, luego es positivo, por continuidad. \square

Definición 3.2. Sea M una variedad orientada. La *orientación canónica* de ∂M consiste en la asignación a cada $\mathbf{p} \in M$ de una orientación $\theta_{\mathbf{p}}^{\partial}$ de $T_{\mathbf{p}}\partial M$, de manera que una base positiva de $T_{\mathbf{p}}M$ se obtiene añadiendo al *vector normal exterior* una base positiva de $T_{\mathbf{p}}\partial M$.

4. NÚMEROS DE ENLACE

En la teoría de nudos, el número de enlace juega un papel fundamental. Existen definiciones combinatorias, pero las razones por las que funcionan tienen que ver con teoría de intersección. En esta sección, consideraremos la variedad \mathbb{S}^3 con la orientación que proviene de ser la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^3 (tomando la proyección estereográfica por la que esta es la misma orientación que la de ser borde de la bola cuatridimensional \mathbb{B}^4).

Sean K, L dos nudos orientados disjuntos, es decir, dos subvariedades difeomorfas a \mathbb{S}^1 . El número de enlace se puede construir como sigue. Consideremos una superficie $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ tal que $\partial\Sigma = K$ (Σ está orientada y el borde se toma orientado) y que tenga intersección transversa con L ; con estas condiciones $\#\Sigma \cap L < \infty$. Entonces, el *número de enlace* de K y L es $\mathcal{L}(K, L) = \Sigma \cdot L$.

Observación 4.1. Es posible reemplazar K, L por enlaces, y Σ puede ser también la imagen de una inmersión $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^3$ tal que $f(\partial\tilde{\Sigma}) = K$.

Proposición 4.2. *El número de enlace es simétrico.*

Demostración. Para probar este resultado, vamos a ver que si tomamos Σ_K, Σ_L superficies orientadas con borde K, L , entonces $\Sigma_K \cdot L = \Sigma_L \cdot K$.

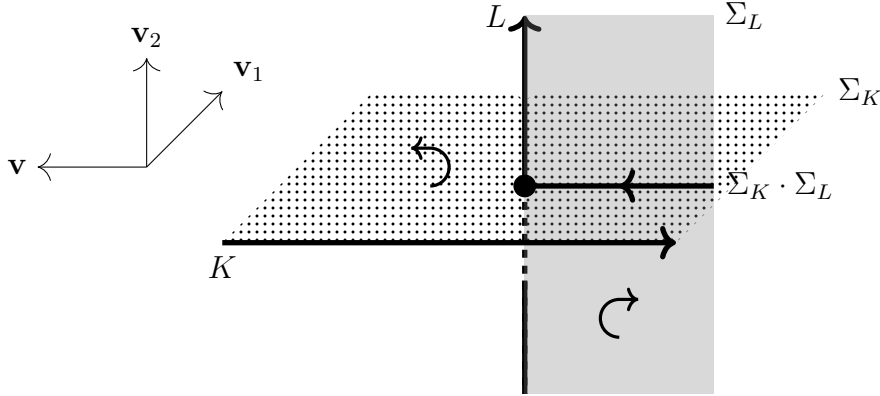


FIGURA 3. Intersección de Σ_K y Σ_L .

Por transversalidad, $\Sigma_K \cap \Sigma_L$ está formado por circunferencias e intervalos. Las circunferencias no aportan nada. Los intervalos son de dos tipos, según los extremos estén en el mismo nudo o no. Si están en el mismo nudo, digamos L , estos tienen signos distintos en la intersección, luego no aportan nada a $\Sigma_K \cdot L$. Si pertenecen a nudos distintos, los argumentos los encontramos en la Figura 3, donde mostramos un punto de $\Sigma_K \cap L$, que aporta un $+1$ a $\Sigma_K \cdot L$. Observamos que dicho punto es extremidad final de $\Sigma_K \cap \Sigma_L$ con la orientación de $\Sigma_K \cdot \Sigma_L$. El otro punto es de K , es decir en $\Sigma_L \cap K$; con respecto a la orientación $\Sigma_L \cdot \Sigma_K$ (la contraria) también es la extremidad final por lo que también aporta $+1$ a $\Sigma_L \cdot K$. \square

5. ESPACIOS PROYECTIVOS

Sea V un espacio proyectivo sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) de dimensión $n + 1$. Recordemos que $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \mathbb{K}^*$. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{P}(V)$, es decir, un subespacio vectorial de dimensión 1 de V .

Recordemos que si $\mathbf{v} \in V$, entonces $V \cong T_{\mathbf{v}}V$, mediante la identificación $\mathbf{w} \mapsto (t \mapsto \mathbf{v} + t\mathbf{w})'(0)$. Sea ahora $\mathbf{p} \in \mathbb{P}(V)$; fijemos $\mathbf{v} \in \mathbf{p} \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Los siguientes

diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{v} & V \setminus \{0\} & \\
 \downarrow & \downarrow & \searrow \pi \\
 \lambda \mathbf{v} & V \setminus \{0\} & \mathbb{P}(V) \\
 & \nearrow \pi & \\
 & &
 \end{array}
 \quad \Longrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 V & & \\
 \downarrow \lambda & \searrow d\pi_{\mathbf{v}} & T_{\mathbf{p}}\mathbb{P}(V) \\
 V & & \nearrow d\pi_{\lambda \mathbf{v}}
 \end{array}$$

Es fácil ver que $d\pi_{\mathbf{v}}$ y $d\pi_{\lambda \mathbf{v}}$ son sobreyectivas y que $\ker d\pi_{\mathbf{v}} = \ker d\pi_{\lambda \mathbf{v}} = \mathbf{p}$, ya que las curvas de la identificación de V con el espacio tangente son constantes. Por tanto en el segundo diagrama podemos sustituir V por V/\mathbf{p}

Proposición 5.1. *Hay un isomorfismo canónico de $T_{\mathbf{p}}\mathbb{P}(V)$ y $\text{Hom}(\mathbf{p}, V/\mathbf{p})$.*

Demostración. El isomorfismo canónico es el siguiente. Tomamos $\alpha : \mathbf{p} \rightarrow V/\mathbf{p}$; sea $\mathbf{v} \in \mathbf{p} \setminus \{0\}$ y sea $\mathbf{w} \in V$ tal que $\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{w} + \mathbf{p}$. Entonces α se corresponde con el vector tangente en $t = 0$ de la curva $t \mapsto \mathbb{K}\langle \mathbf{v} + t\mathbf{w} \rangle$.

Por construcción, la curva no cambia si cambiamos de vector v . Si elegimos otro representante \mathbf{w} , la curva cambia, pero vamos a ver que el vector tangente no. Para ello tomamos la curva anterior en $V: t \mapsto \mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Así, el vector tangente es $d\pi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$, cuyo valor no depende del representante elegido. \square

Ejemplo 5.2. Consideremos V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión 2; en ese caso $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$. Hemos visto que una orientación viene determinada por tres puntos distintos. En nuestro caso, podemos determinarla así. Tomar $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ una base de V ; los tres puntos que vamos a usar son $\mathbb{R}\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \mathbb{R}\langle \mathbf{v}_2 \rangle, \mathbb{R}\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle$. De esta manera, podemos ver que una orientación en V determina una orientación en $\mathbb{P}(V)$.

Ejemplo 5.3. Aunque $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ no es orientable, si le quitamos una recta proyectiva, pasa a ser un disco abierto, que sí es orientable. Si orientamos este disco, inducimos una orientación en la recta eliminada como *borde* (no lo es globalmente, pero localmente sí se puede considerar). Como la recta viene orientada así dos veces, podemos considerar que el *borde* del disco es el *doble* de la recta. Ilustramos estas ideas en la Figura 4; a la izquierda tenemos el modelo del plano proyectivo como un disco con identificaciones en el borde, que es la recta L ; a la derecha, como una compactificación de \mathbb{R}^2 , en el que omitimos el dibujo de la recta del infinito y la recta L es el eje X , y mostramos el cambio de orientación al atravesar el infinito.

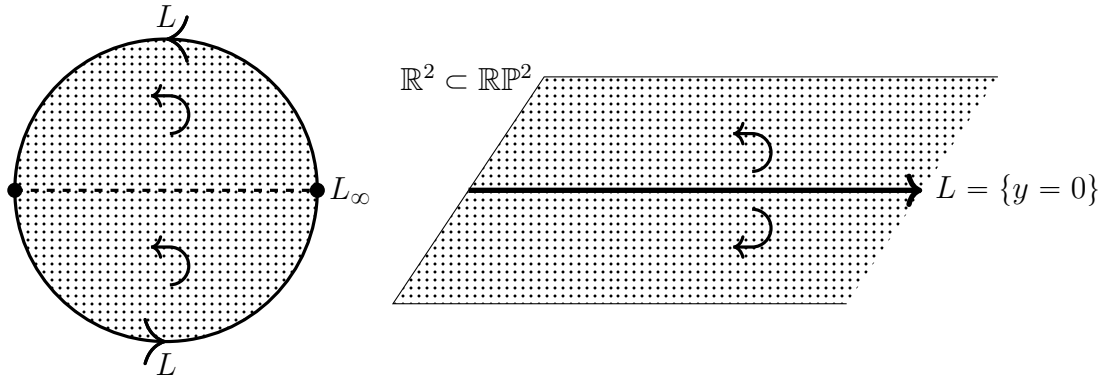


FIGURA 4. Plano proyectivo y orientaciones

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$; sabemos que $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{RP}^n$ es orientable si y solo si n es impar. En ese caso, podemos identificar las orientaciones de $\mathbb{P}(V)$ con las de V como sigue. Fijemos una orientación de V y sea $\mathfrak{v} := (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base positiva. Sea $H_{\mathfrak{v}}$ el espacio afín tal que $\mathbf{v}_0 \in H_{\mathfrak{v}}$ y su espacio director está generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Orientamos este hiperplano afín como borde del semiespacio que contiene el origen. Este hiperplano se inyecta como un abierto de $\mathbb{P}(V)$ y la orientación dada es compatible. Dicho de otro modo, para el siguiente atlas todos los cambios de carta son positivos:

$$\mathbf{x}_{\mathfrak{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}(V), \quad \mathbf{x}_{\mathfrak{v}}(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{R} \left\langle \mathbf{v}_0 + \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j \right\rangle.$$

Observación 5.4. Para probar la afirmación anterior, basta demostrar que si hacemos un cambio de base por una matriz elemental, entonces el determinante de la matriz jacobiana es del mismo signo que el de la matriz si n es impar.

Observación 5.5. Este criterio de orientación coincide con el del Ejemplo 5.2.

6. EL ESPACIO PROYECTIVO REAL \mathbb{RP}^3

Normalmente identificaremos \mathbb{RP}^3 con la unión disjunta de \mathbb{R}^3 y el plano del infinito \mathbb{RP}^2_{∞} (el conjunto de direcciones en \mathbb{R}^3). Si tomamos la orientación positiva en \mathbb{R}^3 , al ver $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ con coordenadas (t, x, y, z) , identificamos \mathbb{R}^3 con la imagen del hiperplano $t = 1$ con coordenadas (x, y, z) . Cuando trabajemos con todo \mathbb{RP}^3 usaremos coordenadas homogéneas $[t : x : y : z]$ que representan el subespacio engendrado por (t, x, y, z) . Es decir, las coordenadas están definidas si $(t, x, y, z) \neq \mathbf{0}$ y

$$[t : x : y : z] = [\lambda t : \lambda x : \lambda y : \lambda z], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Los elementos de \mathbb{R}^3 son $[1 : x : y : z]$ y los de \mathbb{RP}_∞^2 son $[0 : x : y : z]$.