



Investigación en Educación Matemática XVIII

M^a Teresa González Astudillo
Myriam Codes Valcarce
David Arnau Vera
Tomás Ortega del Rincón



VNIVERSIDAD
SALAMANCA



IUFFyM



Investigación en Educación Matemática
XVIII



**VNiVERSiDAD
D SALAMANCA**

Investigación en Educación Matemática

XVIII

M^a Teresa González, Myriam Codes, David Arnau, Tomás Ortega (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Salamanca, 4, 5 y 6 de septiembre de 2014

Investigación en Educación Matemática XVIII

Edita

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Campus de Cartuja s/n, 18071 Granada (España)

M^a Teresa González

Myriam Codes

David Arnau

Tomás Ortega

Comité científico

Dr. David Arnau Vera (Coordinador)

Dr. Tomás Ortega del Rincón (Coordinador)

Dra. Marta Molina González

Dra. Ainhoa Berciano Alcaraz

Dra. Teresa Fernández Blanco

Dra. Nuria Planas Raig

© de los textos: los autores

Cítese como:

M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). (2014). *Investigación en Educación Matemática XVIII*. Salamanca: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada: Alberto Díez Almaraz

Depósito legal: S.289-2014

ISSN: 1888-0762

ISBN: 978-84-697-0819-4

ÍNDICE

PRESENTACIÓN.....	13
-------------------	----

SEMINARIO I

INTRODUCCIÓN SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL CONTEXTO DE AULA

M. Mar Moreno.....	17
--------------------	----

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE

Francisco Javier Claros, María Teresa Sánchez, Moisés Coriat.....	19
---	----

RÉPLICA A LA PONENCIA “MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE”

Myriam Codes.....	33
-------------------	----

ADOPTANDO DIFERENTES PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA

Gloria Sánchez-Matamoros.....	41
-------------------------------	----

RÉPLICA A LA PONENCIA “ADOPTANDO DIFERENTES PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA”

Carmen Azcárate.....	55
----------------------	----

SEMINARIO II

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN: LA FORMACIÓN INICIAL DEL MAESTRO COMO FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS. RESULTADOS DEL ESTUDIO TEDS-M DE LA IEA

Luis Rico.....	61
----------------	----

EL ESTUDIO TEDS-M DE LA IEA EN EL MARCO DEL INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA (INEE)

Ismael Sanz, Ruth Martín.....	67
-------------------------------	----

ASPECTOS CURRICULARES DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE MAGISTERIO 1991-2010

María C. Cañadas, Luis Rico.....	83
----------------------------------	----

RÉPLICA A ‘ASPECTOS CURRICULARES DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE MAGISTERIO 1991-2010’

Núria Planas.....	93
-------------------	----

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL FUTURO PROFESOR ESPAÑOL DE PRIMARIA. RESULTADOS DEL ESTUDIO TEDS-M

Pedro Gómez, Araceli Gutiérrez-Gutiérrez.....	99
---	----

EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO (TEDS-M ESPAÑA) DESDE LA PERSPECTIVA DE SU ESPECIALIZACIÓN

José Carrillo..... 115

COMUNICACIONES

RESPUESTAS DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA A TAREAS DE SENTIDO NUMÉRICO

Rut Almeida, Alicia Bruno..... 127

¿CÓMO TRANSCRIBEN LOS ALUMNOS EN SUS CUADERNOS LAS REGLAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN? UN ESTUDIO EN TRES AULAS DE BACHILLERATO

Matías Arce, Laura Conejo, Tomás Ortega..... 137

LA ACTIVIDAD DOCENTE DE UN PROFESOR: GEOMETRÍA, TECNOLOGÍA Y GRUPOS DE RIESGO

Alberto Arnal-Bailera, Núria Planas..... 147

PROMOVIENDO LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL DISEÑO COLABORATIVO DE C-UNIDADES

Berta Barquero, Andrea Richter, Mario Barajas, Vicenç Font 157

ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA EL DESARROLLO INTEGRAL DEL SENTIDO NUMÉRICO EN NIÑOS Y NIÑAS DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Rafael Bracho-López, Natividad Adamuz-Povedano, M^a del Carmen Gallego-Espejo, Noelia Jiménez-Fanjul..... 167

COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL DE UNA ALUMNA CON SÍNDROME DE DOWN

Alicia Bruno, Aurelia Noda 177

APRENDIENDO A RECONOCER EVIDENCIAS DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE LOS ESTUDIANTES A TRAVÉS DE UN DEBATE VIRTUAL

María Luz Callejo, Ceneida Fernández, Gloria Sánchez-Matamoros, Julia Valls..... 187

MEDIACIÓN SEMIÓTICA Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DEL RAYO A TRAVÉS DE SU USO

Leonor Camargo, Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina..... 197

MEDIDAS DE ASOCIACIÓN EN TABLAS 2X2: EVALUACIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Gustavo R. Cañadas, Carmen Batanero, Pedro Arteaga, María M. Gea..... 207

INDICIOS VERBALES EN LOS PAEV ADITIVOS PLANTEADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Angela Castro, Núria Gorgorió, Montserrat Prat..... 217

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL PARA EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: INICIO DE UNA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

Ángela Castro, Elena Mengual, Montserrat Prat, Lluís Albarracín, Núria Gorgorió..... 227

LA ENSEÑANZA INICIAL DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN: UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN	
Elena Castro, Luis Rico, Pedro Gómez	237
RELACIÓN ENTRE EL CONOCIMIENTO DE GEOMETRIA Y EL “TRUNCAMIENTO” DEL RAZONAMIENTO CONFIGURAL	
Francisco Clemente, Salvador Llinares	247
JUSTIFICACIÓN DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE CUATRO EDITORIALES DESDE LGE HASTA LOE	
Laura Conejo, Matías Arce, Tomás Ortega	257
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO SOBRE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO	
Ana Escudero-Domínguez, José Carrillo	267
LA COMBINATORIA EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA	
Jonathan Espinoza, Rafael Roa	277
RELACIÓN ENTRE REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	
José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico, Enrique Castro	287
MODOS DE ACTUACIÓN E INTERACCIÓN Y GENERACIÓN DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO	
Miquel Ferrer, Josep M. Fortuny, Núria Planas, Kaouthar Boukafri.....	297
AVANCES EN LA CALIDAD DE LAS RESPUESTAS A PREGUNTAS DE PROBABILIDAD DESPUÉS DE UNA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE CON TECNOLOGÍA	
Blanca Flores, Jaime I. García, Ernesto Sánchez.....	307
UNIDADES ELEMENTALES EN PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO EN LOS CUADROS GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO	
Cecilia Gaita, Tomás Ortega.....	317
IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN ABIERTAS EN EL AULA DE SECUNDARIA, ANÁLISIS PREVIO	
César Gallart, Irene Ferrando, Lluís M. García-Raffi.....	327
CONEXIONES EN EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR: PROPUESTA DE UN MODELO DE ANÁLISIS	
Genaro de Gamboa, Lourdes Figueiras	337
RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL: EL CASO DE LA PRUEBA DE SIGNIFICACIÓN CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO	
Víctor N. García, Ernesto A. Sánchez.....	345
INDAGANDO SOBRE EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA	
José-María Gavilán-Izquierdo	355

LA REGRESIÓN EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES	
M. Magdalena Gea, Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas, J. Miguel Contreras.....	365
COMPONENTES CRÍTICAS EN TAREAS DE COMPARACIÓN DE RAZONES DESIGUALES	
Bernardo Gómez, Amparo García.....	375
INFLUENCIA DE LOS CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN LA DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO EN LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO	
Ignacio González-Ruiz, Juan F. Ruiz-Hidalgo, Marta Molina	385
PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LIBROS DE TEXTO DE 3° ESO	
A. Cristina Guerrero, José Carrillo, Luis C. Contreras	395
GÉNESIS INSTRUMENTAL EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3-DIMENSIONAL. EL CASO DE UN ESTUDIANTE DE ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA	
Ángel Gutiérrez, Adela Jaime, Francisco Javier Alba.....	405
PERCEPCIÓN DE LOS FUTUROS MAESTROS Y PROFESORES SOBRE USOS Y ENSEÑANZA DE RECURSOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL	
M. Pedro Huerta, Joaquín Arnau	415
ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE UN LIBRO DE TEXTO DE 3° ESO EN RELACIÓN CON LOS CONTENIDOS DE GEOMETRÍA PLANA	
Elena María López, Luis Carlos Contreras.....	425
TRATAMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD COMPUESTA EN CUATRO LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES	
Sergio Martínez, José María Muñoz, Antonio M. Oller	435
¿LA CERTEZA IMPLICA COMPRENSIÓN?	
Benjamín Martínez, Mirela Rigo.....	445
CONCEPCIONES DEL SENO Y COSENO PUESTAS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO	
Enrique Martín-Fernández, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico.....	455
EXPLORANDO INDICIOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR MATEMÁTICA COM O MODELO MTSK	
Jeferson G. Moriel-Junior, José Carrillo	465
LA VIDA ES SUEÑO: PROYECTOS DE ESTADÍSTICA EN INGENIERÍAS	
Maria M. Nascimento, J. Alexandre Martins, Assumpta Estrada.....	475
ANSIEDAD HACIA LAS MATEMÁTICAS, AGRADO Y UTILIDAD EN FUTUROS MAESTROS	
Rosa Nortes, Andrés Nortes.....	485

LAS HIPÓTESIS EN ÁLGEBRA, CUESTIONES DIDÁCTICAS A CONSIDERAR EN UN ENTORNO DE ENSEÑANZA CON MATHEMATICA	
Carmen Ordóñez, Lourdes Ordóñez, Ángel Contreras	493
ESTUDIO DE LAS SITUACIONES PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO	
Juan J. Ortiz	503
EXPLORANDO ASPECTOS RELEVANTES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL	
Luis R. Pino-Fan, Juan D. Godino, Vicenç Font	513
APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTIMACIÓN DE MEDIDA DE LOS MAESTROS DE PRIMARIA	
Noemí Pizarro, Núria Gorgorió, Lluís Albarracín.....	523
COMPRENSIÓN DE LAS DECENAS Y APLICABILIDAD DE LAS OPERACIONES EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES	
Mónica Ramírez, Carlos de Castro	533
DESARROLLO CONCEPTUAL DE LAS RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO EN LIBROS DE TEXTO DE NIVEL BÁSICO	
Luz Esmeralda Reyes, Flor Monserrat Rodríguez.....	543
MEJORAR NUESTRO PROPIO CONOCIMIENTO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE LA PRÁCTICA – DISTINTOS FOCOS DE ANÁLISIS	
C. Miguel Ribeiro, M ^a Teresa González, Ceneida Fernández, Leticia Sosa, Dinazar Escudero, Miguel A. Montes, Luis C. Contreras, Eric Flores, José Carrillo, Nuria Climent, Lorenzo Blanco, Janeth Cárdenas, Edelmira Badillo, Pablo Flores, José María Gavilán-Izquierdo, Gloria Sánchez-Matamoros, María de la Cinta Muñoz-Catalán, Rocío Toscano	553
LA VARIABLE SINTÁCTICA EN EL PASO DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO	
Carlos Soneira, María José Souto, Ana Dorotea Tarrío.....	563
SIGNIFICADOS CONFLICTIVOS DE ECUACIÓN Y FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE SECUNDARIA	
Miguel R. Wilhelmi, Juan D. Godino, Aitzol Lasa.....	573
PÓSTERES	
LAS REFORMAS CURRICULARES DE LA DISCIPLINA DE MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA PORTUGUESA A LO LARGO DEL SIGLO XIX	
Ana Paula Aires, Ana Santiago.....	585
EL USO DE LOS RECURSOS COMPUTACIONALES EN LA CLASE Y EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO	
Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri, Isabel Kristiner.....	587

EL HELICÓPTERO DE BOX, INICIACIÓN AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS	
Irene García-Camacha, Raúl Martín, M ^a Mercedes Fernández	589
DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA AL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO – MATEMÁTICO	
Juan D. Godino, Luis R. Pino-Fan	591
CARACTERIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE RELACIÓN DE EQUIVALENCIA EN MANUALES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS EN ESPAÑA	
Ignacio González-Ruiz, Marta Molina, Carmen López	593
EL DORADO CONTADOR: ANÁLISIS DE UNA ARITMÉTICA DEL SIGLO XVI	
María José Madrid, Carmen López.....	595
ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DEL GRADO DE PRIMARIA	
Alexander Maz-Machado, Carmen León-Mantero, José Carlos Casas.....	597
LAS RAMAS DE LAS FIGURAS NO PERMITEN VER EL BOSQUE DE LOS RAZONAMIENTOS	
Cristina Pecharromán, Tomás Ortega	599
ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN DE PAREJAS DE ALUMNOS ASIÁTICOS CHINA-PAQUISTÁN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS	
Núria Rosich, Anna C. Rodríguez, Manuel García.....	601
AUTONOMÍA EN LA INTERACCIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO RUTINARIOS EN AULAS DE PRIMARIA	
Beatriz Sánchez, Marta Ramos, José María Chamoso, Javier Rosales, Santiago Vicente	603
UN ANÁLISIS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA. HISTORIA Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE CONTENIDO	
Jeannette Vargas, José Novoa, Maureen Castañeda	605
HOMENAJE AL DR. SIERRA	
Tomás Ortega	609
ÍNDICE DE AUTORES	615

TRATAMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD COMPUESTA EN CUATRO LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES¹

The treatment of compound proportionality in four Spanish textbooks

Sergio Martínez^a, José María Muñoz^a, Antonio M. Oller^b

^aUniversidad de Zaragoza, ^bCentro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

En este trabajo abordamos el estudio del tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles de 2º curso de E.S.O. En particular pretendemos observar el modo en que se caracteriza la proporcionalidad compuesta entre magnitudes, así como la tipología de problemas propuestos y los métodos presentados y utilizados por los autores para resolverlos. Entre otros resultados señalaremos una relativa despreocupación en cuanto a la caracterización de la proporcionalidad compuesta, la ausencia de problemas de comparación y el escaso número de problemas de tipo Inversa-Inversa. Además, se observa una cierta heterogeneidad en los métodos de resolución presentados.

Palabras clave: proporcionalidad compuesta, libros de texto, secundaria.

Abstract

In this work we approach the study of the treatment of compound proportionality in four grade 8 Spanish textbooks. In particular we want to observe how compound proportionality between magnitudes is characterized as well as the typology of the proposed problems and the methods used by the author to solve them. Among other results we point out a relative disregard with respect to the characterization of compound proportionality, the lack of comparison problems and the small number of Inverse-Inverse type problems. Moreover, we observe certain heterogeneity regarding the solving methods.

Keywords: compound proportionality, textbooks, secondary.

INTRODUCCIÓN

El manejo y la comprensión de situaciones relacionadas con la proporcionalidad constituye seguramente uno de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Secundaria. De hecho, este tema está presente en los currículos oficiales de Educación Primaria y Secundaria de muchos países y tradicionalmente ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los estudiantes.

Por ejemplo, el número racional como razón y la proporcionalidad aritmética es uno de los 13 estándares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM) en 1989 para los cursos correspondientes a 6º de Educación Primaria y 1º y 2º de Secundaria Obligatoria (de 11 a 14 años).

No obstante, estudios recientes, como por ejemplo TIMSS 2011, así como diversos trabajos de investigación (Valverde y Castro, 2009; Fernández y Llinares, 2012; Sánchez, 2013) ilustran las serias dificultades que encuentran estudiantes de distintos niveles educativos (desde la Educación Primaria hasta la Diplomatura de Maestro) al afrontar situaciones de proporcionalidad.

Dentro de las posibles aplicaciones prácticas de la proporcionalidad es común encontrar situaciones en los que intervienen tres o más magnitudes proporcionales dos a dos. Se trata de la llamada proporcionalidad compuesta.

Martínez, S., Muñoz, J. M., Oller, A. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca: SEIEM.

■ Un ganadero necesita 600 kg de pienso para alimentar a 40 vacas durante 8 días. ¿Cuántos días podrá alimentar a 20 vacas con 1 500 kg de pienso?

Figura 1. Un problema típico de proporcionalidad compuesta (Arias y Maza, 2012, p. 90).

Aunque el currículo oficial español no menciona expresamente la proporcionalidad compuesta, sí aparecen recogidas en él las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes y la aplicación de la proporcionalidad en la resolución de problemas. Además de por su importancia en la resolución de problemas, su inclusión en los temarios también se justifica por su aplicación al cálculo del interés simple. Además, una revisión de textos (Oller, 2012, pp. 79-82) muestra que la proporcionalidad compuesta sigue recibiendo tratamiento específico en un buen número de libros de texto. Estos hechos justifican que el principal foco de interés se sitúe sobre el tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en libros de texto de Secundaria españoles utilizados en la actualidad.

MARCO TEÓRICO

Proporcionalidad compuesta entre magnitudes

González y Gómez (2011, p. 395) caracterizan la proporcionalidad compuesta entre magnitudes dentro del ámbito de la aritmética del siguiente modo: “se establece una proporcionalidad compuesta entre magnitudes cuando dos o más magnitudes están, cada una de ellas, relacionadas mediante una proporcionalidad con otra magnitud”.

En el trabajo de Bosch (1994, p. 254) se estudia la proporcionalidad desde un punto de vista funcional y se define un “sistema proporcional y compuesto” como aquel que puede definirse mediante $n+1$ variables X_1, X_2, \dots, X_n, X de forma que las n primeras (que llamaremos variables independientes) determinan completamente el estado del sistema y la última (que llamaremos variable dependiente) puede expresarse a partir de las anteriores mediante la relación

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = X$$

siendo f una función homogénea del tipo:

$$X = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = k (X_1 \cdot X_2 \cdots X_m) / (X_{m+1} \cdot X_{m+2} \cdots X_n).$$

Donde k es la llamada constante de proporcionalidad.

Clasificación de problemas de proporcionalidad compuesta

En Fernández (2009) se recogen diversas tipologías de problemas de proporcionalidad simple directa. En algunos casos (Singer y Resnick, 1992) se atiende a contextos (velocidad, escala, mezcla y densidad) o a estructuras “parte-todo”, “parte-parte”. En otros, como en Lamon (1993), se atiende a características semánticas. Sin embargo, Cramer y Post (1993) se centran más bien en la tarea que debe afrontar el alumno, proponiendo una clasificación que se puede exportar fácilmente al caso de la proporcionalidad compuesta. En concreto, estos autores diferencian los siguientes tipos de problemas de proporcionalidad simple directa:

- Problemas de valor perdido: Se conocen tres datos de una proporción y se desea calcular el cuarto valor desconocido. Por ejemplo: Abriendo un grifo 4 horas conseguimos echar 560 l de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo ese mismo grifo durante 6 horas?
- Problemas de comparación numérica: Se conocen (o pueden calcularse) dos razones que se pretenden comparar. Por ejemplo: Trabajando 4 horas, Juan pinta 25 metros cuadrados. Por su parte Luis 5 horas, pinta 30 metros cuadrados en 5 horas. ¿Quién trabaja más rápido?
- Problemas de comparación y predicción cualitativas: Requieren comparaciones que no dependen de forma específica de valores numéricos. Por ejemplo: En la clase de 1º B hay

más alumnos que en la de 1º D. Por otro lado, la clase de 1ºD es más pequeña que la de 1ºB. ¿En cuál de las dos clases los alumnos están más apretados?

Usando el enfoque de Bosch (1994) presentamos una forma de definir y clasificar los problemas de valor perdido y de comparación en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Los problemas de valor perdido se enunciarían del siguiente modo: Dada una tupla de valores conocidos para todas las variables (a_1, \dots, a_n, a) y otra tupla (b_1, \dots, b_n, x) donde x , valor de la variable dependiente, es desconocido y (b_1, \dots, b_n) , valores de las variables independientes, son conocidos; se trata de calcular el valor numérico x . De esta forma, una vez fijado el número de magnitudes, esta caracterización nos permite clasificar los problemas de valor perdido atendiendo a la relación entre cada una de las variables independientes y la variable dependiente. Si nos restringimos a los casos en los que intervienen únicamente tres magnitudes las situaciones posibles que aparecen son de tipo directa-directa ($X=k \cdot X_1 \cdot X_2$), de tipo directa-inversa ($X=k \cdot X_1 / X_2$) y de tipo inversa-inversa ($X=k / X_1 \cdot X_2$).

Por su parte, a diferencia de los problemas de valor perdido, en los problemas de comparación el cociente

$$C(X_1, X_2, \dots, X_n, X) = X \cdot (X_{m+1} \cdot X_{m+2} \cdots X_n) / (X_1 \cdot X_2 \cdots X_m)$$

no es constante. Se trata entonces de comparar su valor para dos tuplas diferentes de valores de todas las variables (de forma cuantitativa en los problemas de comparación numérica o de forma cualitativa si no se explicitan los valores de las magnitudes en los problemas de comparación y predicción cualitativa). En otras palabras, dadas dos tuplas completas de valores (a_1, \dots, a_n, a) y (b_1, \dots, b_n, b) para las magnitudes, hay que comparar el valor que toma C en cada caso. Al no tener X una posición privilegiada y ser equivalentes las situaciones para los cocientes C y C^{-1} , la tipología de problemas se reduce. Así, la clasificación de los problemas de comparación en proporcionalidad para tres magnitudes sería tipo directa-directa y directa-inversa cuando $C(X_1, X_2, X_3) = X_1 / (X_2 \cdot X_3)$ y de tipo inversa-inversa cuando $C(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$

Resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta

Uno de nuestros propósitos es el estudio de las técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta presentes en los libros de texto. Existen numerosos estudios que analizan y clasifican diferentes estrategias y técnicas de resolución empleadas por alumnos para resolver problemas de proporcionalidad simple directa. Así, Cramer y Post (1993) señalan cuatro estrategias empleadas por estudiantes que resuelven correctamente problemas de valor perdido y de comparación numérica: la estrategia del *algoritmo de productos cruzados*, la de la *razón unitaria*, la del *factor de cambio*, la de la *fracción*.

Por otro lado, en algunos de estos trabajos también se describen y analizan posibles estrategias y métodos de resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple que, posteriormente se extienden o adaptan al caso de la proporcionalidad compuesta.

Bosch (1994, p. 252b), en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico presenta distintos tratamientos de la proporcionalidad simple directa desde el punto de las técnicas. En concreto describe el *método de reducción a la unidad*, la *modelización proporcional clásica*, la *modelización algebroide*, la *modelización funcional* (analítica y sintética) y la *modelización geométrica*. De entre estos tratamientos (Bosch, 1994, pp. 254-340) muestra con ejemplos concretos cómo el de reducción a la unidad y la técnica de la proporcional clásica se extienden al caso de la proporcionalidad compuesta (aunque argumentando su fragilidad tecnológica). Además describe la posibilidad de reducir una situación compuesta a una simple que posteriormente denomina *amalgamación de variables*. Finalmente, mediante un estudio de campo, se ilustran las potencialidades de la modelización funcional aplicada al caso de la proporcionalidad compuesta.

Oller (2012, pp. 76-89), fruto de un análisis de textos, describe técnicas de resolución para problemas de valor perdido en proporcionalidad simple encontradas en los textos estudiados y realiza un estudio similar para la proporcionalidad compuesta. En concreto se encuentran en los textos tres posibles técnicas de resolución de problemas de valor perdido para proporcionalidad compuesta: *regla de tres compuesta tradicional, por proporciones y paso a paso*.

El análisis de libros de texto

El impacto de los libros de texto sobre la práctica docente efectiva ha sido puesto de manifiesto desde hace tiempo por numerosos investigadores. Así, Schubring (1987, p. 41) considera que “la práctica docente no está tan determinada por los decretos ministeriales como lo está por los libros utilizados para la enseñanza” mientras que, según González y Sierra (2004, p. 389) “la utilización del libro de texto en el aula [...] ha determinado una práctica escolar determinada por su uso”. En la misma línea Monterrubio y Ortega (2009, p. 38) afirman que “el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real”. Finalmente, Rodríguez (2006), considera que el texto es la principal herramienta de instrucción y llega a utilizarse como currículo.

Esta necesidad de analizar los textos y manuales escolares se refleja en la existencia de múltiples estudios analizando el tratamiento de diversos tópicos matemáticos en libros de texto de distintas épocas y proponiendo herramientas metodológicas que permitan llevar a cabo dichos análisis (Maz, 2000; González y Sierra, 2004; Picado y Rico, 2009; Ruiz de Gauna et al., 2013).

Para Van Dormolen (1986) el análisis de texto puede hacerse a priori o a posteriori, en función de si el estudio pretende evaluar el texto como herramienta didáctica sin tener en cuenta la instrucción llevada a cabo con él (a priori) o comparar su propuesta curricular con los resultados de aprendizaje obtenidos (a posteriori). Zapico (2006) analiza la disyuntiva entre el análisis de contenido y el análisis del discurso, planteando la conveniencia de uno u otro método según el tipo de estudio que quiera llevarse a cabo. Las principales características del análisis de contenido son, su corte deductivo, la sistematización y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos, frente al corte inductivo y la metodología cualitativa del análisis del discurso. Sus propiedades hacen que el análisis de contenido sea uno de los métodos de investigación en textos escolares más empleados.

El análisis de contenido es un conjunto de instrumentos metodológicos aplicados a discursos (Bardin, 1986). Para Krippendorff (1990, p.28) el análisis de contenido como técnica de investigación debe “formular inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto”. Rico y Fernández-Cano (2013, p. 14) estructuran el análisis de contenido en las siguientes etapas:

- Delimitar el corpus de contenido a analizar.
- Concretar la unidad de análisis.
- Localizar en el texto las unidades de análisis.
- Denominar, definir e interpretar las categorías.
- Codificar y cuantificar las unidades de análisis adscritas al sistema de categorías (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis (procedimiento inductivo).
- Relacionar e interpretar las categorías.
- Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes.

OBJETIVOS Y MÉTODO

El objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar el tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles de 2º curso de E.S.O. En concreto, los libros seleccionados han sido los siguientes:

- Esfera 2 (Vizmanos, Anzola, Bujanda y Mansilla, 2009) de la editorial S.M.
- Matemáticas 2º de la ESO (García, 2007) de la editorial Editex.
- Matemáticas ESO 2, vol. 1 (Arias y Maza, 2012) de la editorial Bruño.
- Matemáticas 2, vol. 2 (Cólera y Gaztelu, 2012) de la editorial Anaya.

Se trata en todos los casos de textos recientes y pertenecientes a editoriales de prestigio y ampliamente implantadas en el territorio español.

El objetivo principal se puede descomponer en varios objetivos específicos más concretos:

- Objetivo 1: Estudiar el modo en que se caracteriza la proporcionalidad compuesta entre magnitudes en los textos analizados.
- Objetivo 2: Describir los métodos y técnicas presentados por los autores de los textos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta.
- Objetivo 3: Analizar la tipología de problemas de proporcionalidad compuesta que aparecen en los textos objeto de estudio.

Para la consecución de dichos objetivos realizamos un análisis a priori (Van Dormolen, 1986) del contenido relativo a la proporcionalidad compuesta de los cuatro libros de texto seleccionados. El método utilizado para el análisis del contenido sigue las etapas de Rico y Fernández-Cano (2013) que hemos esquematizado en la sección anterior. Esta secuenciación favorece la reproducibilidad del estudio, mientras que la validez y fiabilidad internas se mejoran con la presencia de tres investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales (Goetz y Lecompte, 1988).

Para localizar las unidades de análisis en el texto nos basamos en el trabajo de Gairín y Muñoz (2005). En su estudio sobre la práctica educativa propuesta en unos libros de texto, Gairín y Muñoz establecen dos categorías para clasificar las distintas actuaciones propuestas por los textos: *práctica docente* y *práctica discente*. Como práctica docente se clasifican aquellas actuaciones que, según el texto, se corresponderían al trabajo realizado por el profesor y que a su vez se distinguen en *Discursos* (son párrafos y/o dibujos que ofrecen explicaciones del contenido matemático y cuyo propósito es introducir, definir y explicar los conceptos que se pretende que el alumno aprenda) y en *Ejemplos y ejercicios resueltos* (aquellas actividades que aparecen resueltas por los autores del texto en cada tema). Como práctica discente se clasificarán aquellas actuaciones que, según el texto, se corresponderían con el trabajo que debe desempeñar el alumno y en la que se clasificarían todas las actividades, ejercicios y problemas sin resolver que están propuestos en el texto.

Respecto al objetivo 1 anterior, por su concreción y dado el tamaño de la muestra, podremos describir completa y exactamente la caracterización de la proporcionalidad compuesta que aparece en cada uno de los textos.

En cuanto al objetivo 2, hemos diseñado una tipología de los métodos de resolución de problemas de valor perdido presentados por los autores basada en una combinación de los estudios de Bosch (1994), Cramer y Post (1993) y Oller (2012). En particular distinguiremos 4 posibles métodos:

- M1: Aplicación directa de una fórmula. Consiste en la utilización directa, mecánica y descontextualizada de una fórmula.

- M2: Proporciones. Se plantea una proporción (igualdad de razones) a partir de los datos del problema y se obtiene el valor desconocido a partir de propiedades de las proporciones.
- M3: Amalgamación de magnitudes. Consiste en la reformulación, mediante la manipulación adecuada de las magnitudes implicadas, de un problema de proporcionalidad compuesta en uno de proporcionalidad simple.
- M4: Paso a paso. Se reduce el problema a una sucesión de problemas de valor perdido de proporcionalidad simple en los que se fijan todas las cantidades menos dos. Distinguimos dos posibilidades:

M4.1: Reducción a la unidad. Tras los primeros pasos se obtiene la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de todas las demás y, a partir de allí, se continúa hasta obtener el valor buscado.

M4.2: Paso a paso sin pasar por la unidad. Se procede como en el caso anterior pero sin obtener el valor de una magnitud correspondiente con una unidad de las demás.

Tanto el método M3 como el método M4 implican la resolución de uno (en el caso de M3) o varios (en el caso M4) problemas de valor perdido en proporcionalidad simple. Por tanto tiene sentido observar el método utilizado para resolver dichos “subproblemas”. A este respecto distinguimos cuatro posibilidades: razón unitaria, factor de cambio, proporciones y regla de tres.

Por último, en lo referente al objetivo 3, introducimos dos categorías para nuestro análisis. En concreto:

- Tipo de problema según la clasificación de Cramer y Post (1993).
VP: Problema de valor perdido.
CN: Problema de comparación numérica.
CC: Problema de comparación y predicción cualitativa.
- Tipo de problema según su estructura funcional conforme a la tipología presentada en el apartado anterior. Como veremos en los resultados, no han aparecido en el estudio problemas CC ni CN y dentro de los problemas VP aquellos en los que aparecen más de tres magnitudes son anecdóticos. Por lo que prestamos especial atención a los problemas VP con tres magnitudes. La clasificación según su estructura funcional es:
Problema tipo Directa-Directa con estructura $X=k \cdot X_1 \cdot X_2$.
Problema tipo Directa-Inversa con estructura $X=k \cdot X_1 / X_2$.
Problema tipo Inversa-Inversa con estructura $X=k / X_1 \cdot X_2$.

ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

En esta sección presentamos los resultados del análisis que se ha llevado a cabo para cada uno de los textos seleccionados.

Esfera 2 (Vizmanos et al., 2009)

El tema dedicado a las magnitudes proporcionales (el séptimo de un total de catorce) aparece en el bloque titulado “Álgebra, funciones y estadística”. Este tema se presenta después de haber trabajado el lenguaje algebraico y antes de introducir el concepto de función.

Práctica docente

En la práctica docente de este texto no aparece mención alguna a la proporcionalidad compuesta.

Práctica discente

Encontramos que 6 de los 87 ejercicios y problemas propuestos a los alumnos resultan ser problemas VP involucrando proporcionalidad compuesta. En concreto, aparecen 4 problemas de tres magnitudes (3 de tipo Directa-Directa, 1 de tipo Inversa-Inversa) y 2 de 4 magnitudes (ambos de tipo Directa-Directa-Directa).

Matemáticas 2º de la ESO (García, 2007)

En este texto el tema dedicado a la proporcionalidad y problemas aritméticos ocupa el cuarto lugar de un total de doce. Se presenta antes de la introducción del lenguaje algebraico. De los doce epígrafes en los que se estructura el tema, la proporcionalidad compuesta aparece en quinto lugar, ocupando una de las catorce páginas que los autores dedican al discurso.

Práctica docente

La proporcionalidad compuesta entre magnitudes se define en el discurso del siguiente modo: “Decimos que existe proporcionalidad compuesta cuando intervienen más de dos magnitudes” (p. 68).

Tras esta caracterización se desarrolla un ejemplo de tipo Directa-Directa que se resuelve mediante el método M4.1 razonando en cada paso mediante factor de cambio. Sin embargo, en el discurso, se reformula la solución en términos de M1. De hecho, en el margen izquierdo se presenta una fórmula abstracta utilizando lenguaje simbólico.

Finalmente, en un epígrafe titulado “Actividades resueltas”, aparece nuevamente un problema VP con tres magnitudes de tipo Directa-Directa. En este caso los autores se inclinan directamente por una aplicación de M1 sin ningún tipo de razonamiento asociado.

Práctica discente

En el tema se proponen al alumno un total de 111 actividades. De ellas únicamente 10 involucran situaciones de proporcionalidad compuesta. Todas ellas son problemas VP de tres magnitudes. Nueve son de tipo Directa-Directa y uno es de tipo Directa-Inversa. Sólo tres de estos 10 problemas se presentan sin ningún tipo de indicación sobre su tipología. El resto siempre aparecen bajo un título que indica que se trata de problemas de proporcionalidad compuesta.

Matemáticas ESO 2 (Arias y Maza, 2012)

El tema que se dedica a la proporcionalidad es el quinto de un total de catorce. Se presenta dentro del bloque “Números y medidas” previo al dedicado al álgebra. De los cuatro epígrafes del tema, la proporcionalidad compuesta ocupa el último lugar. Aunque se dedican dos páginas al discurso en este epígrafe, de las ocho del tema, solo una de ellas se preocupa de la proporcionalidad compuesta en general ya que la segunda desarrolla situaciones de interés compuesto.

Práctica docente

El texto define la proporcionalidad compuesta del siguiente modo: “Una proporcionalidad es compuesta si intervienen más de dos magnitudes proporcionales” (p. 90).

Se introduce el discurso mediante un problema VP de tres magnitudes de tipo Directa-Inversa, en el que se pide al alumno que identifique la relación entre las magnitudes que aparecen (no que lo resuelva). Tras ello, se resuelve mediante el método M2. Antes de plantear la proporción se indica al alumno que debe identificar las magnitudes, disponerlas en horizontal y colocar los datos correspondientes bajo ellas reservando el último lugar para el dato incógnita. Después, debe reconocer la relación de proporcionalidad que liga cada magnitud con la magnitud incógnita.

En el tema aparecen otros dos problemas resueltos VP con tres magnitudes, también de tipo Directa-Inversa. El primero en un apartado titulado “Ejercicios y problemas resueltos”. El segundo aparece como ejemplo de resolución con el apoyo de una calculadora simbólica en el ordenador.

Práctica discente

De las 112 actividades que se planean al alumno en el tema, 15 corresponden a situaciones de proporcionalidad compuesta. Todas son problemas VP de tres magnitudes. En concreto, aparecen 4 problemas de tipo Directa-Directa, 6 de tipo Directa-Inversa y 5 de tipo Inversa-Inversa. Salvo un problema que aparece en la sección dedicada a resolver problemas con ayuda del ordenador, los demás aparecen bien dentro del epígrafe correspondiente a la proporcionalidad compuesta, bien tras una frase que indica que se trata de problemas de este tipo.

Matemáticas 2 (Cólera y Gaztelu, 2012)

El tratamiento de la proporcionalidad ocupa el cuarto tema del texto de un total de 12. Aparece antes del tema dedicado al álgebra y después de los dedicados a los diferentes tipos de números. El tema se estructura en siete epígrafes de los que la proporcionalidad compuesta ocupa el cuarto lugar. El discurso se desarrolla en dos páginas de las 15 dedicadas al desarrollo teórico del tema.

Práctica docente

Se define la proporcionalidad compuesta del siguiente modo: “Llamamos proporcionalidad compuesta a aquellas situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes ligadas por la relación de proporcionalidad” (p. 96).

No hay ninguna actividad inicial para introducir el tema. Después de la definición se desarrollan dos ejercicios resueltos. El primero es de tipo Directa-Directa y el segundo de tipo Directa-Inversa. En ambos ejercicios resueltos se sigue el mismo esquema: Identificar las magnitudes, disponer en forma de columna los datos bajo cada magnitud reservando el último lugar para la incógnita, e identificar la relación de proporcionalidad que une cada una de las magnitudes con la magnitud incógnita. Tras ello, se realiza el método M4.1 manteniendo la estructura tabular en los diferentes pasos y obteniendo las cantidades en cada paso mediante factor de cambio. Al terminar M4.1 y bajo el título “Automatiza el proceso” se vuelve a realizar el problema mediante el método M2.

Práctica discente

De las 133 actividades planteadas en el tema, solo 9 corresponden a situaciones de proporcionalidad compuesta. Todas las actividades relacionadas con la proporcionalidad compuesta son problemas de tipo VP de 3 magnitudes. En dos de las actividades hay varios apartados en donde, a partir de una misma situación, se piden cantidades de diferentes magnitudes, por lo que el total de problemas VP es de 13. En concreto, aparecen 5 problemas de tipo Directa-Directa, 6 de tipo Directa-Inversa y 2 de tipo Inversa-Inversa. Todos aparecen dentro del epígrafe correspondiente a la proporcionalidad compuesta, o tras una frase en la que se indica que los problemas pertenecen a ese ámbito concreto.

CONCLUSIONES

En los textos estudiados se observa un escaso interés por la adecuada caracterización de la proporcionalidad compuesta, reflejado en el escaso espacio dedicado a ello en el discurso. Incluso en un caso (García, 2007) encontramos una caracterización, cuando menos, ambigua (utilizando terminología de Fernández, Caballero y Fernández (2013)).

En cuanto a los métodos de resolución observados en la práctica docente, encontramos gran heterogeneidad. Se aprecia que la práctica docente está claramente orientada a la automatización. Esto se observa especialmente en casos en los que una explicación basada en el método M4, uno de los que supone una mayor comprensión de la situación, termina por desembocar en la presentación esquemática de los métodos M1 o M2, que son más mecánicos. A este respecto es interesante

señalar la inexistente justificación de la validez del método M2 (en especial, de los motivos por los que hay que realizar un producto de razones). El método M3 no aparece en ninguno de los textos.

Respecto a la tipología de problemas, no aparece en los textos analizados ningún problema de comparación. Además, se observa una escasa cantidad relativa de problemas de proporcionalidad compuesta y sólo en un texto se han encontrado problemas con cuatro magnitudes.

Tabla 1: Número de problemas VP con 3 magnitudes según su estructura propuestos en la práctica discente.

	Directa-Directa	Directa-Inversa	Inversa-Inversa
(Vizmanos et al., 2009)	3	0	1
(García, 2007)	9	1	0
(Arias y Maza, 2012)	4	6	5
(Cólera y Gaztelu, 2012)	5	6	2
TOTAL	21	13	8

En la tabla 1 se observa el claro predominio de los problemas de tipo Directa-Directa (la mitad del total; mientras que, globalmente, se proponen pocos problemas de tipo Inversa-Inversa (menos de un 20% del total). Además, no se presenta ningún problema de este último tipo en la práctica docente de ninguno de los textos analizados.

Se aprecia una cierta inconsistencia entre la práctica docente y la discente en cuanto a la tipología de problemas. Esta inconsistencia es especialmente clara en dos casos. En el primero, García (2007, p. 68), se indica a los alumnos explícitamente que “este año sólo estudiamos el caso en el que las magnitudes se encuentran ligadas de manera directa” pero posteriormente se les propone un problema de tipo Directa-Inversa. En el segundo, Vizmanos et al. (2009), la proporcionalidad compuesta está totalmente ausente en la práctica docente pero se proponen a los alumnos 6 problemas VP de proporcionalidad compuesta.

Referencias

- Arias, J.M y Maza, I. (2012). *Matemáticas ESO 2*. Madrid: Bruño.
- Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad*. Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Cólera, J y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas 2 Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.
- Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404-407.
- Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.
- Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129-142.
- Fernández Palop, P., Caballero García, P. y Fernández Bravo, J.A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de matemáticas? *Números*, 83, 131-148.
- Gairín, J.M. y Muñoz, J.M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. *Investigación en Educación Matemática IX*. Córdoba: SEIEM.

- García, F.J. (2007). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Editex.
- Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- González, M.J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid: Pirámide.
- González, M^a.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Lamon, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41-61.
- Maz, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Granada
- Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.
- Oller, A.M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid. Recuperable en <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1118>
- Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), pp. 11-27.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.
- Rodríguez, J. (2006). *La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago: Mineduc.
- Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *RELIME*, 16(2), 245-276.
- Sánchez, E.A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *RELIME*, 16(1), 65-97.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *Learn. Math.*, 7(3), 41-51.
- Singer, J.A. y Resnick, L.B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, 9, 55-73.
- Valverde, A.G., Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.
- Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bujanda, M.P. y Mansilla, S. (2009). *Esfera 2*. Madrid: S.M.
- Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Zapico, M.H. (2006). *Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago: Mineduc.

¹ Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.