

# ACTAS DE CONGRESO

## LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Las nuevas metodologías en la  
enseñanza y el aprendizaje de  
las Matemáticas.

Para profesorado de Infantil, Primaria,  
Secundaria y Universidad.

# 2014



CASTILLA Y LEÓN

[ 500<sup>º</sup> SJ ]

V CENTENARIO  
DEL NACIMIENTO  
DE SANTA TERESA  
DE JESÚS



Junta de  
Castilla y León



CONGRESO: LAS NUEVAS METODOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS  
MATEMÁTICAS

Segovia, 14 y 15 de noviembre de 2014.



Editan: Junta de Castilla y León y Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

©de los textos: los autores.

Los autores son los depositarios de los derechos de autor y responsables de la originalidad del contenido de sus aportaciones a este documento.

Cítese como:

Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (2015). Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Academia de Artillería de Segovia.

Las comunicaciones aquí publicadas, han sido sometidas a evaluación y selección por parte de profesorado en activo de todos los niveles educativos.

Diseño de la portada y contraportada:

Elena Martín Fernández.

ISBN: 978-84-606-6831-2

<b>PRESENTACIÓN</b> .....	<b>7</b>
<b>PRÓLOGO</b> .....	<b>11</b>
<b>CONFERENCIA DE CLAUSURA</b> .....	<b>15</b>
TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y DE LA COMUNICACIÓN Y APRENDIZAJE BASADO EN LA INVESTIGACIÓN: ¿QUÉ SINERGIAS?.....	17
<b>PONENCIAS PARALELAS</b> .....	<b>29</b>
METODOLOGÍAS ACTIVAS PARA UN APRENDIZAJE EFICAZ DE LAS MATEMÁTICAS.....	31
APRENDIZAJE COOPERATIVO: ¿CUÁLES SON LAS CLAVES PARA QUE FUNCIONE?.....	49
INTUICIÓN VISUAL Y RAZONAMIENTO EN MATEMÁTICAS .....	57
ENSEÑANZA POR PROYECTOS: UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA .....	71
MATEMÁTICAS PARA HACER MODELOS: EL CASO DE LAS MALAS NOTAS. ....	89
APRENDER MATEMÁTICAS EN UNA COMUNIDAD DE APRENDIZAJE.....	105
<b>LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN PRIMARIA EN EL SIGLO XXI</b> .....	113
CREACIÓN DE MÁS Y MEJORES OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO .....	123
LAS MATEMÁTICAS EN SINGAPUR: ¿PUEDE SU METODOLOGÍA EXPLICAR SUS RESULTADOS? .....	125
<b>TALLERES</b> .....	<b>131</b>
TALLER DE PBL (PROBLEM BASED LEARNING) EN MATEMÁTICAS.....	133
TALLER DE APRENDIZAJE COOPERATIVO .....	151
GEOGEBRA, UN PUNTO DE PARTIDA... ..	153
ASPECTOS MULTIDISCIPLINARES EN LA DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA MEDIANTE HERRAMIENTAS TIC INNOVADORAS.....	187
LA SESIÓN COOPERATIVA. LA INTERACCIÓN AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO .....	195
TALLER: JUGANDO, MANIPULANDO Y HACIENDO PREGUNTAS TAMBIÉN APRENDEMOS MATEMÁTICAS	217
TALLER: SCRATCH PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.....	241
LA CALCULADORA PARA MEJORAR EL CÁLCULO EN PRIMARIA.....	243
PAPIROFLEXIA PARA APRENDER MATEMÁTICAS .....	245
<b>MESA REDONDA</b> .....	<b>267</b>
IMPLEMENTACIONES METODOLÓGICAS ENTRE ETAPAS EDUCATIVAS.....	269
<b>COMUNICACIONES</b> .....	<b>283</b>
DÍMELO CON NÚMEROS.....	285



# UNA PROPUESTA INNOVADORA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA EN EL PRIMER CICLO DE ESO

Sergio Martínez<sup>a</sup>, José María Muñoz<sup>b</sup>, Antonio M. Oller<sup>c</sup>, Cristina Pecharromán<sup>d</sup>

<sup>a</sup>IES Leonardo de Chabacier y Universidad de Zaragoza, <sup>b</sup>Universidad de Zaragoza, <sup>c</sup>Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, <sup>d</sup>IES Recesvinto y Universidad de Valladolid

## Resumen

*La proporcionalidad aritmética es un tópico matemático de gran importancia curricular y práctica. Las, cada vez más de moda, pruebas internacionales así como abundantes estudios al respecto, muestran las dificultades que encuentran los alumnos al trabajar con las ideas implicadas en la proporcionalidad: razón y proporción, magnitudes proporcionales, etc. Pensamos que estas dificultades surgen en gran medida como consecuencia del modo en que tradicionalmente se plantea la enseñanza de este tema. Pese a ello, son escasas las investigaciones que abordan una revisión de este modo de enseñar y que plantean propuestas didácticas innovadoras. En esta comunicación presentamos las ideas básicas de una propuesta didáctica para la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de la E.S.O. y analizamos algunos puntos fuertes y debilidades detectados en un punto intermedio de su experimentación.*

**Palabras clave:** *innovación curricular, proporcionalidad, aritmética, secundaria.*

## INTRODUCCIÓN.

En la literatura sobre Educación, se encuentran abundantes referencias de trabajos y monografías acerca de qué se define como innovación educativa y sus principales objetivos (Canal de León, 2002; Fidalgo y Sein-Echaluze, 2011); así como ejemplos de experiencias y proyectos de innovación exitosos llevados a cabo en prácticamente todas las etapas educativas (Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad) (Marcelo, Mayor y Gallego, 2010) y las principales fortalezas y posibles contratiempos a los que se tiene que hacer frente cuando se intenta implementar una innovación docente en un centro (Sánchez y Murillo, 2010). Al margen de artículos de investigación de índole teórica sobre los procesos de innovación educativa, encontramos experiencias de innovación educativa que abarcan muchos aspectos y facetas distintas: desde las innovaciones de naturaleza institucional que inciden en aspectos organizativos de un centro para la mejora de la convivencia en el aula y en los centros en general, a innovaciones de ámbito tecnológico asociadas al uso y perfeccionamiento de las habilidades en TIC por parte del equipo docente, pasando por otras innovaciones de carácter didáctico-disciplinar específico asociadas a la enseñanza de un determinado tópico (de lengua y literatura, ciencias, matemáticas, lengua extranjera,...). Atendiendo a este último enfoque, seguimos a Carbonell (2002, p.11) cuando señala que la innovación educativa es “[un] conjunto de ideas, procesos y estrategias, más o menos sistematizados, mediante los cuales se trata de introducir y provocar cambios en las prácticas educativas vigentes” y a Sánchez Ramón (2005, p. 646), que amplía algunos aspectos de la definición anterior, cuando señala que “la innovación educativa es el proceso realizado de forma deliberada, por un docente o varios, con el objetivo de mejorar la praxis educativa, a través de un cambio positivo originado como respuesta a un problema, a la revisión de la propia praxis inducida interna o externamente y en un contexto concreto como es el centro educativo y/o el aula”. En (Sánchez Ramón, 2005) se abordan las conexiones existentes entre la investigación educativa y la innovación educativa y se apunta que la Investigación-Acción (Elliot, 1990) es un método de investigación educativa que relaciona estos dos conceptos.

En este artículo presentamos el diseño de una propuesta que supone una innovación educativa de carácter curricular sobre la enseñanza de la proporcionalidad aritmética para primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria sustentado por resultados provenientes de la investigación educativa y los primeros resultados

de la implementación de dicha propuesta que, bajo el método de Investigación-Acción, se está llevando a cabo en el Instituto de Educación Secundaria “Leonardo de Chabacier” de Calatayud (Zaragoza).

### **PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA.**

Puesto que nos proponemos plantear una propuesta de innovación curricular en el ámbito de la Proporcionalidad aritmética, parece interesante abordar, siquiera brevemente, el modo en que se presenta habitualmente dicho tópico en la Enseñanza Secundaria. El llamado “razonamiento proporcional”, así como el manejo y la comprensión de situaciones relacionadas con la proporcionalidad constituyen unos de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Primaria y Secundaria (Cramer y Post, 1993; Fernández, 2009; Freudhental, 1973; Lamon, 1993; Singer y Resnick, 1992). Tradicionalmente ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los estudiantes y su cotidianidad, junto con sus numerosas aplicaciones prácticas, justifica que se le dedique gran atención y que esté presente en los currícula oficiales de Educación Primaria y Secundaria.

Actualmente, en el currículo oficial de Educación Secundaria Obligatoria todavía vigente se recogen los siguientes contenidos asociados a este tema:

Primer curso: Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales. (...) Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.

Segundo curso: Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Aumentos y disminuciones porcentuales. Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa. (...) Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.

Sin embargo, dado que “el libro de texto [...] en muchas ocasiones [...] determina el currículo real” (Monterrubio y Ortega, 2009, p. 38), es de interés el análisis del tratamiento recibido por la proporcionalidad aritmética en los libros de texto. Gairín y Muñoz (2005) abordan, en el marco de un estudio más amplio, la utilización del número racional con sentido de razón en textos de Primaria y Secundaria. En (Oller, 2012, pp. 90-115) se analiza la propuesta completa (cursos 1º, 2º y 4º opción A) de una conocida editorial española en lo referente a la Proporcionalidad aritmética. Por su parte, Martínez, Muñoz y Oller (2014) han abordado el análisis del tratamiento de la Proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En otros países (Guacaneme, 2002; Pino y Blanco, 2008) también se han realizado estudios similares.

A partir de los análisis anteriores, podemos realizar las siguientes consideraciones respecto al estado actual de la enseñanza de la Proporcionalidad aritmética:

- Existe un desequilibrio entre los conocimientos de tipo conceptual y los de tipo procedimental, a favor de estos últimos.
- Se considera prioritariamente la razón entre números concebida como su cociente e identificada con una fracción. No se define la razón entre cantidades de magnitud entendida como la cantidad de una nueva magnitud.
- Se observa una gran despreocupación en el manejo de las magnitudes. A la hora de resolver problemas las manipulaciones se llevan a cabo tan sólo desde un punto de vista numérico.
- La proporcionalidad entre magnitudes es algo que se da casi por supuesto, reduciéndose los problemas a decidir si la proporcionalidad es directa o inversa.



- La caracterización de los distintos tipos de proporcionalidad (directa o inversa) se basa, en general, en criterios que requieren del conocimiento de convenciones o de la exploración de tablas. Ello favorece la implantación de ideas y razonamientos incorrectos (A más, más; a menos, menos, etc.). Se aprecia un escaso interés por la adecuada caracterización de la proporcionalidad compuesta.
- En cuanto a la tipología de problemas (Cramer y Post, 1993), existe un predominio absoluto de los problemas de valor perdido. Apenas aparecen problemas de comparación. Además, se observa una escasa cantidad relativa de problemas de proporcionalidad compuesta.
- A la hora de resolver problemas de valor perdido (tanto en el caso de proporcionalidad simple como de compuesta) hay una gran tendencia a presentar técnicas de resolución orientadas a la aplicación acrítica y automática de algoritmos.
- Se observa una gran tendencia a la algebrización y hacia el uso de lenguaje simbólico.
- La proporcionalidad simple directa e inversa son tratadas simultáneamente en el primer curso de ESO, pese a las orientaciones curriculares y a que ambos fenómenos están muy alejados, tanto desde un punto de vista matemático como cognitivo (Gairín y Oller, 2011).
- Se presentan técnicas específicas para la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta, sin ponerlas en relación con las presentadas en la proporcionalidad simple.

Como consecuencia de estas prácticas, son múltiples las evidencias de que existen problemas de comprensión por parte de los alumnos a la hora de trabajar con la Proporcionalidad.

En el estudio TIMSS 2011, llevado a cabo con alumnos de 4º curso de Educación Primaria<sup>6</sup> también encontramos relacionadas con el razonamiento proporcional (Figura 1).

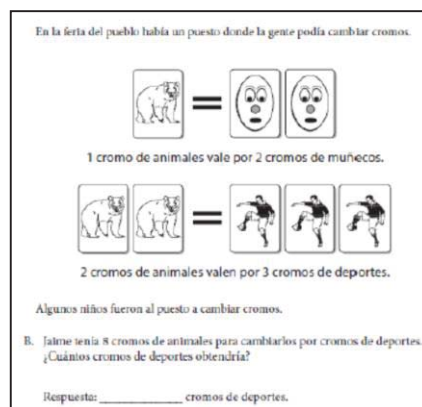


Figura 1. Pregunta sobre proporcionalidad (TIMSS, 2012, pp. 160-161).

Ante esta cuestión, la tasa de acierto de los alumnos españoles fue de un 20%, achacable sin duda a la escasa instrucción relacionada con aspectos de la proporcionalidad que han recibido los alumnos en ese punto de su formación.

<sup>6</sup> Dicho estudio también se lleva a cabo con alumnos del equivalente a 2º curso de E.S.O., pero España no participó en la edición de 2011.

No sucede lo mismo en el estudio PISA, que se realiza con alumnos de 4º curso de E.S.O.

**SALSAS**  
Estás preparando tu propio aliño para la ensalada.  
He aquí una receta para 100 mililitros (ml) de aliño.

Aceite para ensalada:	60 ml
Vinagre:	30 ml
Salsa de soja:	10 ml

**Pregunta 1**  
¿Cuántos mililitros (ml) de aceite para ensalada necesitas para preparar 150 ml de este aliño?  
Respuesta: ..... ml

Figura 2. Pregunta sobre proporcionalidad (PISA, 2012, p. 25)

En la Figura 2 se muestra una de las cuestiones liberadas del último informe PISA, correspondiente al año 2012. La tasa de aciertos a esta pregunta fue en España de tan sólo un 62,1%.

Por último, trabajos como (Nortes, Huedo, López y Martínez, 2003) o (Valverde y Castro, 2011), llevados a cabo con maestros en formación, ponen de manifiesto que las dificultades observadas en la escuela se prolongan en el tiempo. Valga como ejemplo la tasa de éxito del 43,8% obtenida en el estudio de Nortes et al. (2003, p. 72) al plantear el siguiente problema a 240 estudiantes de las distintas diplomaturas de maestro:

*“En una oficina el Sr. Pérez va a trabajar 2 días a la semana, el Sr. Fuentes va a trabajar 4 días a la semana y el Sr. Espinosa va a trabajar 6 días a la semana. El coste total de iluminación de la oficina (los tres despachos), por semana, asciende a 2400 ptas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de los tres señores?”*

### LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

El Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Zaragoza se ha preocupado especialmente en estudiar la didáctica de la aritmética en diferentes etapas educativas. Los trabajos de investigación sobre el número racional, significados y modelos de enseñanza (Gairín, 2001; Escolano y Gairín, 2005) propiciaron la elaboración de una propuesta de enseñanza del número racional en Educación Primaria y la validación de su viabilidad y pertinencia mediante su puesta en práctica (Escolano, 2007).

De los trabajos anteriores surgió la preocupación del estudio del número racional como razón y sus implicaciones para el tratamiento de la proporcionalidad aritmética. Además de diversos artículos de investigación (Escolano y Gairín, 2009; Gairín y Oller, 2011, 2012; Oller y Gairín, 2013; Martínez, Muñoz y Oller, 2014), se está elaborando una propuesta concreta para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de Educación Secundaria. El diseño de la propuesta y su experimentación en el aula se inició con la tesis doctoral de Oller (2012), defendida en la Universidad de Valladolid, y el desarrollo de la propuesta completa y su implementación en el primer ciclo de secundaria forma parte del proyecto de tesis doctoral de Martínez. El paradigma de investigación utilizado para el desarrollo e implementación de la propuesta es el de Investigación-Acción.

Nuestra propuesta de enseñanza es innovadora en dos aspectos: en cómo se aborda la enseñanza de los conceptos involucrados en la proporcionalidad, y en la secuenciación de dichos conceptos.

### Tratamiento de las ideas clave.

Las ideas en torno a las que se articula la propuesta son: el trabajo con magnitudes, la idea de razón, las relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa) y compuesta, la resolución de problemas y las aplicaciones de la proporcionalidad (especialmente los porcentajes).

*Trabajo con magnitudes (identificación y manipulación).* Una de nuestras mayores preocupaciones es que los alumnos doten de significado a las cantidades que aparecen en las situaciones de proporcionalidad y las operaciones que realizan entre dichas cantidades. Para ello, es imprescindible hacer énfasis en el concepto de magnitud y su identificación en diferentes situaciones. Con este fin, presentamos actividades en la que los alumnos tienen que distinguir entre números utilizados para expresar una cantidad de magnitud y números empleados para otros fines (identificadores, ordinales, etc.). Además, en una determinada situación, no solo deben identificarse las magnitudes que aparecen, sino que también se deben discernir aquellas magnitudes relacionadas entre sí, es decir, aquellas en las que un cambio en una produce cambios en las demás. Por último, nos esforzamos en que los alumnos identifiquen posibles operaciones que pueden realizarse entre las magnitudes involucradas en una misma situación y en que identifiquen el resultado de dichas operaciones con una cantidad de magnitud.

*La idea de razón.* El concepto de razón y su tratamiento es uno de los pilares de nuestra propuesta. Frente a otras interpretaciones, priorizamos el significado de razón como “tanto por uno”. De este modo, la razón entre una cantidad  $a$  de una magnitud  $A$  y una cantidad  $b$  de una magnitud  $B$ , que denotamos  $a/b$ , se identifica con la cantidad de la magnitud  $A$  que se relaciona con una unidad de la magnitud  $B$ . Así, al emplear la notación  $a/b$  no vemos ya dos números separados correspondientes a cantidades de magnitudes diferentes, sino que se considera como un único número que representa una cantidad de una magnitud cociente. Por tanto, damos libertad a los alumnos para utilizar el sistema de representación que consideren más adecuado, fraccionario o decimal, si bien se incide en la conveniencia de uno u otro según el caso.

Para introducir el concepto de razón recurrimos a modelos de aprendizaje definidos por situaciones de intercambio y de reparto. Las situaciones de compra-venta son especialmente útiles para este fin por su cercanía al alumno.

Otro aspecto esencial es la condición de regularidad que debe darse en una situación para que tenga sentido hablar de razón (realizar el reparto). La condición de regularidad consiste en explicitar las condiciones necesarias para que tenga sentido realizar un reparto igualitario entre las cantidades de las magnitudes involucradas, a saber: que las unidades de ambas magnitudes sean constantes y que a cada unidad de una de ellas le corresponda siempre la misma cantidad de la otra. Por ejemplo, en la situación siguiente:

*Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?*

El reparto solo tendrá sentido si todos los productos son iguales y cuestan la misma cantidad (condición de regularidad). Esta situación de intercambio nos permite también presentar, previa discusión, las dos razones (inversas entre sí) que pueden calcularse.

*Relación de proporcionalidad simple directa.* El trabajo con el concepto de razón y la condición de regularidad desemboca naturalmente en la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. En un contexto determinado, caracterizamos la proporcionalidad simple directa como aquella relación entre dos magnitudes que hace que tenga sentido definir la razón entre ambas. Incidimos en que se trata de una relación particular de entre las muchas que pueden ligar a dos magnitudes. Creemos necesario trabajar con actividades que ejemplifiquen las diversas alternativas situaciones posibles: casos en los que no haya una pareja de magnitudes, casos en el que las magnitudes no estén relacionadas o casos en los que la relación existente no sea de proporcionalidad directa.

*Relación de proporcionalidad simple inversa.* En este caso, las ideas fundamentales son la idea de razón como “tanto por uno” y la de constante de proporcionalidad, dotando a ambos conceptos de significado concreto en cada situación. En torno a estas ideas gira la caracterización de las magnitudes inversamente proporcionales.

Caracterizamos la proporcionalidad simple inversa como aquella relación entre magnitudes en un contexto determinado en la que existe una tercera magnitud que se mantiene constante tal que tiene sentido definir la razón entre esta tercera magnitud y las dos magnitudes iniciales. Además las razones entre esta nueva magnitud y cada una de las presentadas en justamente la otra magnitud presentada. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación:

*Hemos comprado un televisor y tenemos que pagar 12 plazos de 85 euros para pagarlo.*

En esta situación podemos considerar las magnitudes “número de plazos” e “importe de cada plazo”. Evidentemente estas magnitudes están relacionadas pero no tiene sentido tratar de definir las razones entre ellas porque el importe de cada plazo no puede repartirse entre el número total de plazos. Sin embargo, si consideramos la magnitud constante (constante de proporcionalidad) “precio del televisor”, sí que tiene sentido calcular la razón entre el precio del televisor y el número de plazos (obteniendo la magnitud importe de cada plazo) y entre el precio del televisor y el importe de cada plazo (obteniendo la magnitud número de plazos). Por tanto las magnitudes son inversamente proporcionales siempre que se cumplan las condiciones de regularidad. En este caso es necesario que se pague siempre lo mismo en cada plazo y que la duración de los plazos sea constante.

*Relación de proporcionalidad compuesta.* Proponemos dar un tratamiento mucho más próximo al que recibe la proporcionalidad simple frente a los procedimientos más artificiosos de la práctica habitual. La clave para abordar estas situaciones es considerar la relación existente entre una magnitud y cada una de las otras magnitudes involucradas, de tal modo que sólo seremos capaces de enfrentarnos a situaciones en las que cada magnitud es, bien directa, bien inversamente proporcional a cada una de las demás.

En este tipo de situaciones siempre es posible “amalgamar” todas las magnitudes menos una para fabricar una nueva magnitud. De esta forma traducimos la situación original a una nueva situación en la que solo intervienen dos magnitudes, la nueva magnitud y la magnitud que no ha formado parte de la amalgamación. Además, en esta situación traducida, la pareja de magnitudes tendrá una relación directa o inversa. Por tanto cualquier situación problemática se reducirá a una de las estudiadas con anterioridad. Por ejemplo, la siguiente situación:

*Para alimentar a 3 gatos durante 4 días, son necesarios 480 gramos de pienso.*

Se puede traducir como *480 gramos de pienso son 12 raciones de comida de gato, como 3 gatos consumen 120 gramos de pienso al día y como para alimentar a un gato durante 4 días son necesarios 160 gramos de pienso* para reducir la situación anterior a una de proporcionalidad simple.

*Resolución de problemas.* Otra de las peculiaridades de nuestra propuesta es aumentar la tipología de problemas de proporcionalidad presentados a los alumnos, trabajando problemas de valor perdido, problemas de comparación cuantitativa y problemas de comparación cualitativa.

Los problemas de valor perdido son los que mayoritariamente se presentan a los alumnos en la enseñanza tradicional. Se trata de aquellos problemas en los que se presenta una situación de proporcionalidad indicando un conjunto de valores para todas las magnitudes relacionadas. A continuación, se da otro conjunto de valores para todas las magnitudes menos para una (“magnitud incógnita”) y se pregunta por el valor que le correspondería a esta magnitud. Para la resolución de este tipo de problemas debemos atender exclusivamente a las situaciones simples, ya que como hemos comentado las situaciones compuestas se reducen, previa amalgamación, a una situación simple.

Para las situaciones simples proponemos la resolución mediante dos etapas multiplicativas. En el caso de relación directa, en la primera etapa se calculan las razones entre las cantidades dadas y se elige la que permite resolver el problema mediante un producto en una segunda etapa. Para el caso de la relación inversa, se calcula en la primera etapa el valor de la constante de proporcionalidad, que se utiliza en la segunda etapa para obtener el valor desconocido mediante el cálculo de una razón.

Los problemas de comparación son aquellos en los que se utiliza el valor de la razón o de la constante de proporcionalidad para comparar dos situaciones diferentes que involucran las mismas magnitudes y con la misma relación de proporcionalidad entre ellas. La diferencia entre la comparación cuantitativa y cualitativa es que, en la primera, la información proporcionada es el conjunto de valores para todas las magnitudes de las dos situaciones y, en la segunda, se conoce únicamente la relación de orden entre las cantidades de las magnitudes correspondientes en ambas situaciones y no su valor exacto.

*Aplicaciones de la proporcionalidad.* Existen múltiples aplicaciones del estudio de las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes. Además de la resolución de problemas antes citados, en nuestra propuesta trabajamos específicamente los porcentajes y los repartos proporcionales. Aunque otros tópicos como la Regla de Interés o las mezclas y aleaciones no reciben atención específica, entendemos que con el trabajo del resto de temas el alumno dispone de las herramientas suficientes para enfrentarse a estas situaciones.

Nuestra propuesta a la hora de presentar los porcentajes se basa en la introducción de la idea de “tanto por ciento” cuya analogía con la razón como “tanto por uno” es evidente. Así, si dos magnitudes  $A$  y  $B$  tienen una relación de proporcionalidad directa, presentamos el porcentaje que  $A$  representa respecto de  $B$  como la cantidad de  $A$  que se corresponde con 100 unidades de  $B$ . Luego si  $a/b$  es la razón entre  $A$  y  $B$ , es claro que el porcentaje que representa  $A$  respecto de  $B$  es  $a/b \cdot 100$ . Este proceso se puede presentar como un problema de valor perdido para proporcionalidad simple directa a los alumnos. Dado  $p$ , un porcentaje determinado, podemos definir al menos las razones:  $p/100$ ,  $(100+p)/100$ ,  $(100-p)/100$  y sus correspondientes inversas  $100/p$ ,  $100/(100+p)$ ,  $100/(100-p)$ . Estas razones permiten traducir los problemas directos e inversos de cálculo de porcentajes y aumentos y disminuciones porcentuales a problemas de valor perdido entre dos magnitudes directamente proporcionales.

Para los repartos proporcionales, nuestra propuesta se basa en la idea de que al efectuar un reparto se produce la comparación entre dos situaciones. En la primera situación cada persona posee una cantidad de una cierta magnitud, en función de la cual se efectuará el reparto. En la segunda situación cada persona deberá poseer una cierta parte de la cantidad a repartir. El reparto deberá reflejar o equilibrar (según se trate de un reparto directa o inversamente proporcional) la situación inicial. Si se debe reflejar o equilibrar, es decir, si el reparto debe ser directa o inversamente proporcional, es algo que el alumno debe decidir en función del contexto en que se presente el problema. Entendemos que el reparto refleja la situación inicial si las razones entre las cantidades recibidas coinciden con las razones entre las cantidades iniciales. Entendemos que el reparto equilibra la situación si las razones entre las cantidades recibidas por cada persona son las inversas de las razones entre las cantidades que tenían asignadas.

### **Secuenciación de contenidos.**

La mayoría de libros de texto consultados presentan la proporcionalidad simple (directa e inversa) en primero y la proporcionalidad compuesta en segundo. Como apuntamos en un apartado anterior, pensamos que es preferible posponer las relaciones de proporcionalidad inversa a un segundo curso para profundizar en el concepto y manejo de la razón y las relaciones directas en un primer curso. Esta profundización permite a los alumnos abordar situaciones de proporcionalidad compuesta con estructuras sencillas con muy poca instrucción por parte del profesor.

El trabajo realizado con magnitudes, que suele quedar al margen en las propuestas tradicionales, permite introducir mayor variedad de situaciones problemáticas de las que comúnmente se presentan. En particular, introducimos los repartos directa e inversamente proporcionales en el segundo curso.

Las propuestas para ambos cursos tienen una duración aproximada de 12 sesiones en las que se incluye una sesión para realizar una prueba objetiva final. El orden de presentación de los contenidos es el que sigue:

Primer curso E.S.O.

- Razón entre dos magnitudes: Razón como tanto por uno. Razón como resultado de un reparto igualitario. Razón inversa.
- Condición de regularidad: Magnitudes relacionadas. Uniformidad en las unidades de las magnitudes implicadas. Tiene sentido hacer reparto igualitario.
- Distinción de parejas de Magnitudes Directamente Proporcionales (MDP): tiene sentido calcular las razones entre las magnitudes involucradas.
- Problemas de comparación con MDP: comparación (posiblemente previo cálculo) de las razones.
- Problemas de valor perdido con MDP: doble problema multiplicativo en una etapa.
- Proporcionalidad compuesta: Amalgamación de variables para reducción a pareja de MDP.
- Porcentajes: Tanto por ciento como relación entre dos magnitudes, una con cantidad 100. Razón y razón inversa asociadas a un porcentaje dado. Cálculo del porcentaje representado por una cantidad, problemas de cálculo directo e inverso con porcentajes (problemas de valor perdido entre MDP).

Segundo curso E.S.O.

- Operaciones con magnitudes (amalgamación): producto de magnitudes, significado; división de magnitudes, significado, razón como cantidad de magnitud.
- MDP: condición de regularidad, razón y razón inversa.
- Distinción de parejas de Magnitudes Inversamente Proporcionales (MIP): tiene sentido el producto entre las magnitudes y éste es constante en el contexto. Tratamiento como magnitud intensiva de una de las magnitudes involucradas. Constante de proporcionalidad inversa como cantidad de magnitud.
- Problemas de comparación con MDP y MIP: comparación (posiblemente previo cálculo) de las razones o constantes de proporcionalidad inversa.
- Problemas de valor perdido con MDP y MIP: doble problema multiplicativo en una etapa.
- Proporcionalidad compuesta: Amalgamación de variables para reducción a pareja de MDP o MIP.
- Repartos directa e inversamente proporcionales: obtención de razones o constantes de proporcionalidad.
- Porcentajes: Razón asociada a un porcentaje, a un aumento porcentual y a una disminución porcentual. Explicitación de magnitudes y cantidades involucradas. Cálculo directo e inverso con porcentajes y aumentos y disminuciones porcentuales (problemas de valor perdido entre MDP).

#### **DESARROLLO Y VALORACIÓN DE LA PROPUESTA.**

El desarrollo e implementación en el aula de nuestra propuesta se encuentra actualmente en curso. En el curso 2009-10, con motivo de la tesis de Oller (2012), se implementó parte de la propuesta en dos grupos de 1º de la ESO del IES Avempace de Zaragoza. Como es característico en la metodología Investigación-Acción, de las observaciones surgidas durante la experimentación y la reflexión posterior a la implementación de una innovación, se modificaron ciertos aspectos de la misma y en el pasado curso 2013-14, se llevó a la práctica



con 3 grupos de 1º de la ESO en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud que han permitido obtener interesantes resultados que presentamos más adelante. La recepción por parte del equipo docente de este instituto ha sido muy buena y para este curso académico 2014-15, está previsto continuar con la propuesta en 1º de la E.S.O. en, al menos, otros 3 grupos más y comenzar con la implementación de la propuesta en 2º de E.S.O. en 2 grupos. Además, en el curso 2015-16, está programado que se volverá a impartir en, al menos, 3 grupos de 2º de la E.S.O.

A continuación, realizamos una valoración de los puntos fuertes y débiles de nuestra propuesta detectados durante estos cursos. Advertimos que necesariamente éstos son parciales puesto que nos encontramos a mitad de la experimentación. Por tanto, estas conclusiones corresponden a la experiencia ya realizada con cinco grupos de primer curso de secundaria (aproximadamente un total de 115 alumnos) que ya han cursado estos contenidos. Las valoraciones están determinadas a partir de la observación directa de la actuación de los estudiantes y registrada en el diario de clase del profesor, el análisis de todas las producciones escritas de los alumnos, el análisis de las actuaciones del profesor mediante la grabación con cámara digital de todas las sesiones, la realización de entrevistas semiestructuradas con los estudiantes y la comparación de aquellos grupos en los que se presenta la propuesta con un grupo de control que sigue una enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética.

#### **Puntos fuertes de la propuesta.**

- El número de sesiones asignadas al tópico de proporcionalidad aritmética (12 en primer curso y 12 en segundo curso) no varía sustancialmente el previsto por la programación que seguía el centro y resulta asumible por parte de todo el profesorado del Departamento de Matemáticas.
- Se comprueba que la implementación de esta propuesta novedosa en el aula es viable.
- Se contribuye a que los alumnos profundicen y hagan mejor uso de sus conocimientos sobre el significado de las operaciones aritméticas con naturales y racionales a la hora de resolver problemas relacionados con la proporcionalidad.
- Se evita el recurso a técnicas algorítmicas que, además de requerir una memorización, hacen que el alumno identifique la resolución de problemas con la aplicación acrítica de algoritmos. La necesidad de reflexionar sobre las condiciones en que es necesario aplicar la técnica de resolución de problemas de valor perdido consigue evitar, en parte, fenómenos como la llamada “ilusión de linealidad” (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008; Fernández y Llinares, 2012).
- Se ha aumentado la tipología de situaciones problemáticas planteados a los alumnos y que les permite resolver nuevas situaciones que apenas se presentaban en la enseñanza tradicional (por ejemplo, los problemas de comparación cuantitativa y cualitativa).
- Los cambios propuestos en cuanto a la secuenciación tradicional (por ejemplo, con la inclusión de la proporcionalidad compuesta) que planteamos en primero de Educación Secundaria no plantean mayores problemas respecto a los que aparecen en la enseñanza tradicional en segundo.
- Surgen de manera espontánea procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta que no habían sido presentados previamente.
- Se detecta una mejora en los procesos de argumentación que realizan los alumnos para justificar sus respuestas en cuanto a cantidad y calidad.
- A pesar de trabajar con la razón como unidad, muchos alumnos son capaces de emplear estrategias de factor de cambio y dotar de significado a esas tareas de manera espontánea.

- Los resultados de la resolución de problemas de valor perdido mediante regla de tres que se llevó a cabo con el grupo de control no son mejores que los resultados obtenidos por los alumnos sobre los que se ha implementado nuestra propuesta.
- Con posterioridad a la implementación de la propuesta, los estudiantes han sido capaces de aplicar de manera espontánea el concepto de razón y de ideas de proporcionalidad directa en otros ámbitos como la obtención de fórmulas geométricas como las del cálculo de la longitud de un arco y el área de sector circular.
- Se mantiene la distribución relativa de las calificaciones de los estudiantes con respecto a las obtenidas en otros temas.
- Se ha conseguido implicar a todos profesores del Departamento de Matemáticas del IES, fomentando la discusión y el debate entre ellos sobre estos contenidos y sobre la manera de abordarlos. Existen, por tanto, perspectivas favorables para la continuación de dicha propuesta más allá del periodo de investigación programado.

#### **Puntos débiles de la propuesta.**

- Hemos detectado que el número racional se entiende principalmente como decimal. Los alumnos muestran dificultades al aplicar los algoritmos para operar con fracciones y evitan en lo posible su uso. Como consecuencia surgen multitud de situaciones en las que los alumnos tenían que aplicar técnicas de aproximación, obteniendo resultados inexactos a pesar de que el procedimiento seguido era adecuado. Para solucionar este problema sería necesario incidir especialmente sobre el número racional como reparto y medida, fomentando la representación fraccionaria del número racional y trabajando cuidadosamente las operaciones con fracciones y la relación de los algoritmos con los repartos o medidas.
- El trabajo con los porcentajes ha resultado especialmente complejo. Un gran número de alumnos había sido instruido, en el último curso de Primaria, en el uso de algún algoritmo para calcular el porcentaje de una cantidad. Esta instrucción previa supuso un gran obstáculo para los alumnos a la hora de enfrentarse a las tareas propuestas, puesto que les resultó muy difícil dejar de lado aquello que ya habían interiorizado. La solución de este problema pasaría, necesariamente, por un trabajo previo con maestros de Primaria en ejercicio y en formación en la misma línea de la propuesta presentada.
- Algunos alumnos reciben algún tipo de ayuda a la hora de resolver las tareas de casa o de preparar la asignatura. Estas ayudas externas (familias, profesores de apoyo, etc.) suponen un problema por cuanto provienen de personas cuyos conocimientos se basan necesariamente en la manera tradicional de presentar la Proporcionalidad aritmética. En consecuencia, presentan al estudiante ideas que chocan frontalmente con lo que se le ha presentado en clase. Para tratar de paliar esta influencia, detectada principalmente en la implementación realizada en el curso 2009-10, hemos hecho partícipes a las familias para conseguir su colaboración mediante entrevistas y circulares. Del mismo modo hemos diseñado un cuadernillo que recoge las ideas clave de la propuesta y que se entrega a los alumnos permite minimizar la búsqueda de ayudas externas. Si bien hemos seguido detectando ese fenómeno en la implementación realizada en el curso 2013-14, lo ha sido en una frecuencia mucho menor.
- Se ha observado que el cambio en la metodología de trabajo en el aula (trabajo en parejas, ausencia de libro de texto, institucionalización posterior a la resolución de situaciones problemáticas) provoca un cierto desconcierto inicial en los alumnos ya que se aparta del esquema de clase magistral tradicional a la que están acostumbrados. En cualquier caso, con el transcurso de las sesiones, los alumnos se adaptan a ese método de trabajo y se aprecian sus ventajas.



- Otra fuente de disrupción en el aula es la propia naturaleza investigadora del proceso. Así, la recogida diaria de fichas de trabajo y, especialmente, el uso de una cámara para la grabación de las sesiones de clase suponen novedades que distraen inicialmente la atención de los alumnos. Como en el caso anterior, el transcurso de las sesiones supuso la normalización de dicha situación.

## Referencias.

- CAÑAL DE LEÓN, P. (coord.) (2002). *La innovación educativa*. Madrid: Akal.
- CARBONELL, J. (2002). El profesorado y la innovación educativa. En P. Cañal de León (coord.), *La innovación educativa*, pp. 11-26. Madrid: Akal.
- CRAMER, K. y POST, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404-407.
- ELLIOT, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.
- ESCOLANO, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.
- ESCOLANO, R. y GAIRÍN, J.M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1, 17-35.
- ESCOLANO, R. y GAIRÍN, J.M. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma*, 62, 35-48.
- FERNÁNDEZ, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Publicacions de la Universitat de València.
- FERNÁNDEZ, C. y LLINARES, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129-142.
- FIDALGO, A. y SEÍN-ECHALUCE, M.L. (coord.) (2011). Aprendizaje innovación y competitividad. *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura*, 187, extra 3.
- FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- GAIRÍN, J.M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos: un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos*, 4, 137-159.
- GAIRÍN, J.M. y MUÑOZ, J.M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. *Investigación en Educación Matemática IX*. Córdoba: SEIEM.
- GAIRÍN, J.M. y OLLER, A.M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J.L. Lupiáñez, M.C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011*, pp. 179-189. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- GAIRÍN, J.M. y OLLER, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI*, pp. 249-259. Jaén: SEIEM.
- GUACANEME, E.A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42.

- I.E.A. (2013). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias*. Volumen I: Informe Español. Madrid: MECD.
- LAMON, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41-61.
- MARCELO, C., MAYOR, C. y GALLEGO, B. (2010). Innovación educativa en España desde el punto de vista de sus protagonistas. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 14 (1), 112-134.
- MARTÍNEZ, S., MUÑOZ, J.M. y OLLER, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVIII*, pp. 435-444. Salamanca: SEIEM.
- MONTERRUBIO, M.C. y ORTEGA, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 37-53. Santander: SEIEM.
- NORTES, A., HUEDO, T., LÓPEZ, J.A. y MARTÍNEZ, R. (2003): Conocimientos matemáticos de maestros en formación. *Suma*, 44, 71-82.
- O.C.D.E. (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe Español*. Volumen I: Resultados y contexto. Madrid: MECD.
- OLLER, A.M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid. Recuperable en <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1118>
- OLLER, A.M. y GAIRÍN, J.M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-338.
- PINO, J. y BLANCO, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.
- SÁNCHEZ, M. y MURILLO, P. (2010). Innovación educativa en España desde la perspectiva de grupos de discusión. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 14 (1), 171-189.
- SÁNCHEZ RAMÓN, J.M. (2005). La innovación educativa institucional y su repercusión en los centros docentes de Castilla-La Mancha. *REICE - Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 3 (1), pp. 637-664.
- SINGER, J.A. y RESNICK, L.B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, 9, 55-73.
- VALVERDE, A.G. y CASTRO, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 523-531. Santander, España: SEIEM.
- VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., JANSSENS, D., y VERSCHAFFEL, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.

Para hacer referencia al artículo

Martínez, S., Muñoz, J.M., Oller, A.M. y Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. (pp. 459-470). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.