ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE DISTINTOS NIVELES EDUCATIVOS ANTE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA[i]

Strategies used by students from different years when they face compound proportion problems

Martínez Juste, S[a], Muñoz Escolano, J. M.[a] y Oller Marcén, A. M.[b]

[a]Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza,

[b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se analizan las actuaciones de alumnos desde 6.º de Educación Primaria hasta 2.º de Educación Secundaria Obligatoria (11-14 años) con distintos grados de instrucción en proporcionalidad al resolver ciertos problemas de proporcionalidad compuesta. En particular, observamos la tasa de éxito y las distintas estrategias empleadas, tanto correctas como incorrectas. Los resultados muestran un aumento progresivo de la tasa de éxito y una evolución en las estrategias utilizadas desde aquellas que hacen referencia a aspectos de razonamiento proporcional, hacia aquellas en las que prima el componente algorítmico.

Palabras clave: *proporcionalidad compuesta, análisis de estrategias, resolución de problemas, razonamiento proporcional.*

Abstract

In this work, we analyze the behavior of students from 6th to 8th grade (age 11-14) with different degrees of instruction regarding proportionality, when they solve certain compound proportionality problems. In particular, we focus on the success rate and on their strategies, both correct and incorrect. Results show a gradual increasing in the success rate and an evolution in the strategies from those involving proportional reasoning to those giving priority to algorithmic procedures.

Keywords: *compound proportion, analysis of strategies, problem solving, proportional reasoning.*

INTRODUCCIÓN

El razonamiento proporcional es un concepto fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares ya que supone la culminación de la aritmética elemental y es la piedra angular para adquirir muchos conocimientos posteriores (Lesh, Post y Berh, 1988). Además, está presente en los currículos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) y es motivo de estudio en la formación de profesorado.

Dentro de la investigación educativa sobre proporcionalidad, una de las líneas de trabajo clásicas es la identificación y análisis de las estrategias de resolución, correctas e incorrectas, utilizadas por estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad (Tournaire y Pulos, 1985). Algunos trabajos se centran en caracterizar la evolución de los razonamientos de los estudiantes (Fernández y Llinares, 2010), incluso de aquellos que no habían recibido instrucción previa en el tema (Silvestre y Ponte, 2012). La mayor parte de estos estudios se centran en la resolución de problemas de proporcionalidad simple (PS en adelante). Sin embargo, la proporcionalidad compuesta (PC en adelante), pese a ser un contenido escolar clásico, no ha recibido la misma atención y no existen apenas trabajos con el anterior enfoque.

Martínez Juste, S., Muñoz Escolano, J. M. y Oller Marcén, A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: SEIEM.

El objetivo principal de este trabajo es analizar las respuestas de estudiantes de distintos niveles educativos y distintos grados de instrucción sobre PS y PC al resolver ciertos problemas de PC. En particular, nos centramos en:

- Estudiar la capacidad de los estudiantes para resolver correctamente estos problemas.
- Analizar las estrategias (correctas e incorrectas) utilizadas por los estudiantes.
- Observar la evolución de los anteriores puntos según el grado de instrucción y nivel educativo.

MARCO TEÓRICO

Muchas investigaciones sobre proporcionalidad estudian las estrategias empleadas por estudiantes en la resolución de diferentes tipos de tareas y la frecuencia de estas. Uno de los trabajos de referencia es el de Cramer y Post (1993) que recoge una categorización de problemas de PS (*valor perdido*, *comparación numérica*, *predicción cualitativa* y *comparación cualitativa*) y clasifica las estrategias correctas de resolución de problemas de PS directa de valor perdido y de comparación numérica realizadas por más de 900 estudiantes de 12-14 años en cuatro categorías (*razón unitaria*, *factor de cambio*, *equivalencia de fracciones* y *algoritmo del productos cruzados*). Los autores sugieren la enseñanza de diferentes estrategias para la resolución de estos problemas fomentando las más intuitivas, como la razón unitaria y el factor de cambio, frente a la de productos cruzados, ya que al aplicarla no se deduce necesariamente que los alumnos utilicen razonamiento proporcional sino que ejecutan de manera automática un procedimiento.

En este sentido, Lamon (1993a, 1993b) estudia la influencia de la estructura semántica del problema, y distingue problemas de *medidas bien compactadas*, *parte-parte-todo*, *conjuntos asociados* y *ampliadores-reductores*, en la sofisticación de las estrategias utilizadas por 24 estudiantes de 11-12 años sin instrucción previa. Lamon (1993b) emplea una clasificación de estrategias correctas, similar a la de Cramer y Post (1993), incluyendo las estrategias *de unidad simple* y *de unidad compuesta*, parecidas a la razón unitaria y el factor de cambio. Además, incluye la estrategia llamada *construcción progresiva* o *building up*, donde el estudiante emplea razonamientos multiplicativos como el cálculo del valor unitario o el factor de cambio y luego usa razonamientos aditivos para construir la solución. Esta estrategia está presente en otros trabajos, como en el de Silvestre y Ponte (2012), en el que aparecen descritas con detalle algunas producciones de cuatro estudiantes de 11 años al resolver dos2 problemas de valor perdido y dos de comparación cuantitativa. Lamon (1993a) también determina estrategias incorrectas o no constructivas de razonamiento proporcional, como las de *evitamiento*, *aditivas y pictóricas* y *construcción de patrones* (juzgada incorrecta sin considerar el resultado obtenido).

Por otro lado, Steinthorsdottir (2006) señala que la estructura numérica de los problemas influye en la tasa de éxito y en la estrategia utilizada de manera más determinante que su estructura semántica. Respecto a la naturaleza de las magnitudes que intervienen, algunos trabajos indican que los problemas de proporcionalidad con magnitudes intensivas en el enunciado son más complicados que los que solo contienen extensivas, debido a la familiaridad que tienen los escolares con estas últimas frente a la ausencia de tratamiento que suelen recibir las primeras (Nunes, Desli y Bell, 2003). Menos consenso existe sobre la importancia de que las magnitudes sean discretas o continuas en la dificultad del problema ya que hay estudios apuntando en ambos sentidos (Spinillo y Bryan, 1999; Tournaire y Pulos, 1985).

Especialmente interesantes son las investigaciones con estudiantes sin instrucción previa donde se observan las estrategias incipientes empleadas con el propósito de potenciarlas en la instrucción. Aunque también encontramos trabajos centrados en otros colectivos de estudiantes, como maestros en formación (Rivas, Godino y Konic, 2009; Valverde y Castro, 2009) con el propósito de detectar sus posibles deficiencias. Fernández y Llinares (2010) analizan la tasa de éxito y las estrategias empleadas por una amplia muestra de estudiantes desde 4.º de E. Primaria a 4.º de E.S.O. cuando resuelven problemas de proporcionalidad y aditivos de tipo afín para caracterizar cuántos estudiantes aplican razonamientos aditivos o multiplicativos y constatar la presencia de la *ilusión de linealidad* (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007) y caracterizar su evolución.

La mayoría de los estudios anteriores tratan situaciones de PS. Sin embargo, no encontramos muchas referencias sobre el tratamiento didáctico o de las dificultades de aprendizaje para situaciones de PC. González y Gómez (2011, p. 395) caracterizan la PC dentro del ámbito de la aritmética como aquellas situaciones en las que "dos o más magnitudes están, cada una de ellas, relacionadas mediante una proporcionalidad con otra magnitud". Otros autores (Bosch, 1994, p. 254) inciden en los aspectos funcionales definiendo un "sistema proporcional y compuesto" usando un cierto tipo de funciones homogéneas.

Las situaciones de PC aparecen incidentalmente en algún trabajo sobre proporcionalidad (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; López y Figueras, 1999). Encontramos un análisis específico sobre la PC en el trabajo de Bosch (1994, cap. 10-11) que, en el marco de la TAD y con el propósito de estudiar la proporcionalidad desde un enfoque funcional, estudia el tratamiento de la PC en textos antiguos, identifica técnicas de resolución de problemas de PC (*método de las proporciones*; *reducción a la unidad*; *reducción de la regla de tres compuesta a la simple* y *método de causas y efectos*) y analiza las estrategias utilizadas por profesores universitarios en la resolución de problemas de valor perdido de PC. Además, apunta la influencia de la capacidad del resolutor para dotar (o no) de significado al producto o el cociente de las magnitudes en el éxito y la estrategia utilizada.

Martínez, Muñoz y Oller (2014, 2015) plantean una tipología de métodos de resolución de problemas de valor perdido de PC basada en las realizadas por Bosch (1994) y Cramer y Post (1993) y estudian su presencia en cuatro libros de texto de E.S.O. Esta investigación constata que, pese a la uniformidad de los problemas presentados (todos de valor perdido y la mayoría de tres magnitudes), existe una cierta variedad en cuanto a los métodos de resolución empleados.

MÉTODO Y MUESTRA

Para abordar los objetivos planteados, elaboramos el siguiente cuestionario:

<u>Problema 1</u>: La máquina que pinta las líneas de la carretera necesita 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km. ¿Cuántos kilómetros de carretera puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?
<u>Problema 2</u>: Para alimentar a 4 gatos durante 5 días necesitamos 40 vasos de leche. ¿Cuántos vasos de leche necesitaremos para alimentar a 3 gatos durante 7 días?
<u>Problema 3</u>: Si abrimos 7 grifos durante 4 minutos conseguimos echar 56 litros de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo 5 grifos durante 6 minutos?

Su extensión viene motivada por la necesidad de que se pudiese completar en una sesión de clase. Los criterios para su diseño fueron:

- Los problemas involucran tres magnitudes y son de valor perdido de tipo directa-directa (Martínez et al., 2014).
- Las cantidades numéricas del enunciado son naturales menores que 100 para facilitar los cálculos. Además, han sido escogidas de forma que, si bien las razones internas no son enteras, las externas que tienen una sencilla interpretación como tasa sí lo son (Steinthorsdottir, 2006).
- El contexto y las magnitudes son familiares para el alumno. La estructura semántica es de medidas bien compactadas y de conjuntos asociados (Lamon, 1993a). La magnitud tiempo está presente en los tres enunciados. La cardinalidad es la única magnitud discreta, mientras que el resto son continuas (Spinillo y Bryan, 1999). Salvo una, todas las magnitudes son extensivas (Nunes et al., 2003).

- Los problemas se gradúan de mayor a menor facilidad para asignar significado al producto de las dos primeras magnitudes (Bosch, 1994). En el problema 1 el producto significa “tiempo total trabajado”, en el problema 2, puede interpretarse como “número total de raciones” y en el problema 3, es complicado dar significado a “grifos·minuto”.

El cuestionario fue completado por 181 estudiantes de centros públicos de la provincia de Zaragoza. La muestra es de tipo incidental o casual y estratificada en cuatro estratos (tabla 1) atendiendo al nivel educativo y a si los alumnos habían recibido o no enseñanza sobre PS y PC con anterioridad.

Tabla 1. Los grupos de estudio y el número de participantes del estudio

Grupo 1. Alumnos de 6.º de Primaria sin instrucción previa en PS.	45
Grupo 2. Alumnos de 1.º de E.S.O. sin instrucción previa en PS durante ese curso.	76
Grupo 3. Alumnos de 2.º de E.S.O. con instrucción en PS y sin instrucción en PC ese curso.	44
Grupo 4. Alumnos de 2.º de E.S.O. con instrucción en PS y PC durante ese curso	16
TOTAL	181

Utilizamos un método mixto de investigación, entendido como “un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación que implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 546). Desde un punto de vista cuantitativo, analizamos la tasa de éxito en los problemas para cada estrato. El análisis cualitativo se centra en identificar las estrategias, correctas e incorrectas, de los alumnos.

El análisis cualitativo se aborda mediante el análisis de contenido. Esta técnica de investigación presenta “gran cantidad de ventajas y posibilidades en estudios educativos y sociales” (López, 2002, p. 177). En particular, las unidades de análisis son las producciones de los alumnos y las categorías se construyen a partir de una aproximación inductiva (el análisis da lugar a las categorías) combinada con una componente deductiva sustentada en el marco teórico anterior (Berg, 2007, p. 249). La validez y fiabilidad internas mejoran con la presencia de tres investigadores actuando sobre los mismos registros (Hernández et al, 2010, p. 476).

RESULTADOS

Análisis cuantitativo de las respuestas

En esta primera fase del análisis estudiamos el porcentaje de alumnos que respondieron correcta o incorrectamente a los problemas. No tendremos en cuenta posibles errores aritméticos. En la tabla 2 se muestran los datos desglosados por estratos.

Tabla 2. Porcentaje de aciertos, errores y respuestas en blanco

	Problema 1			**Problema 2**			**Problema 3**			**Todos bien**
	Bien	*Mal*	*Blanco*	*Bien*	*Mal*	*Blanco*	*Bien*	*Mal*	*Blanco*	
G. 1	26,7 %	31,1 %	42,2 %	28,9 %	37,8 %	33,3 %	22,2 %	42,2 %	35,6 %	15,6 %
G. 2	39,5 %	43,4 %	17,1 %	46 %	38,2 %	25,8 %	43,4 %	35,5 %	21,1 %	30,2 %
G. 3	75 %	22,7 %	2,3 %	63,6 %	34,1 %	2,3 %	65,9 %	31,8 %	2,3 %	63,6 %
G. 4	75 %	25 %	0 %	75 %	25 %	0 %	68,7 %	31,2 %	0 %	68,7 %

En primer lugar, señalar que, conforme se avanza en instrucción sobre proporcionalidad la tasa de éxito, tanto global como de cada problema, aumenta y casi desaparecen las respuestas en blanco. Por otro lado, para cada estrato, se observa que la tasa de éxito en los tres problemas es similar. Entre los alumnos que no han recibido instrucción respecto a técnicas de proporcionalidad, el problema 2 tiene mayor porcentaje de acierto, mientras que para los que sí han recibido instrucción es el problema 1 el que obtiene mejores resultados.

Análisis cualitativo de las respuestas

En esta fase del análisis estudiamos las estrategias utilizadas por los alumnos. Entendemos que una estrategia es correcta en el sentido de Cramer y Post (1993). Se ha encontrado una gran variedad de estrategias en las respuestas correctas de los alumnos:

- Construcción de patrones: Consiste en buscar una relación multiplicativa que relacione los datos del problema y reproducirla con las cantidades conocidas para hallar el valor buscado.
- Amalgamación de magnitudes: Consiste en transformar el problema original manipulando adecuadamente las magnitudes implicadas en un nuevo problema de PS.

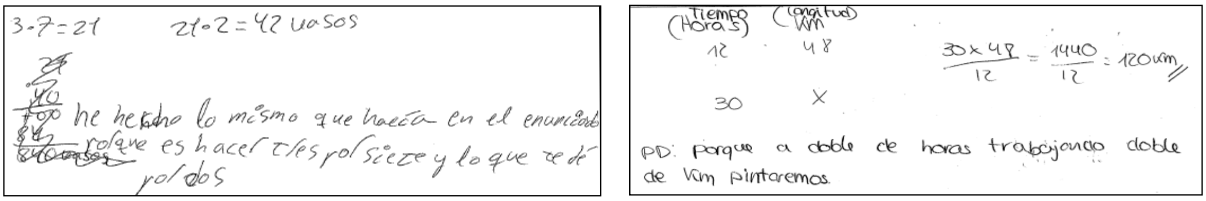

Figura 1. Construcción de patrones (izda.) y Amalgamación (dcha.)

- Paso a paso pasando por la unidad: Consiste en obtener la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de todas las demás y, a partir de ella, hallar el valor buscado con argumentos aritméticos.
- Paso a paso sin pasar por la unidad: Consiste en reducir el problema a una sucesión de problemas de valor perdido de PS en los que se fijan todas las cantidades menos dos.

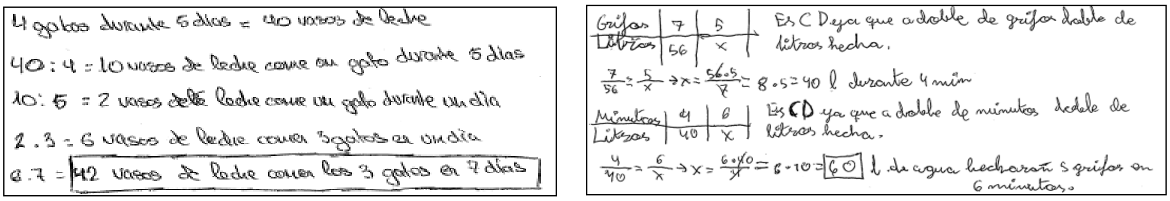

Figura 2. Paso a paso pasando por la unidad (izda.) y sin pasar por la unidad (dcha.)

- Proporciones: Consiste en plantear una proporción con los datos del problema para obtener el valor desconocido usando propiedades de las proporciones.
- Uso de una fórmula: Consiste en aplicar directamente una fórmula con los datos del problema.

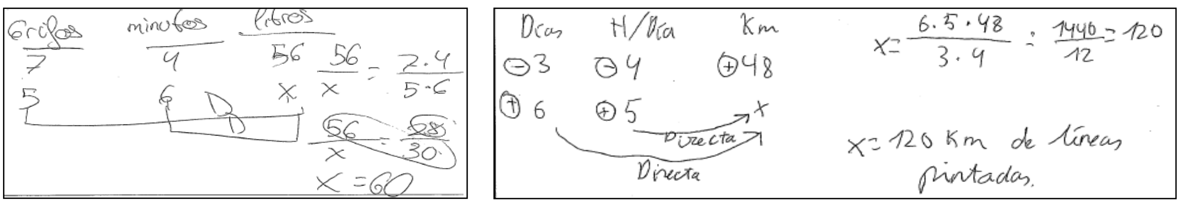

Figura 3. Uso de una fórmula (izda.) y proporciones (dcha.)

En la tabla 3 se muestra la aparición de estas estrategias según los estratos de la muestra.

Tabla 3. Estrategias correctas en los distintos estratos de la muestra

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Construcción de patrones	X	X		
Amalgamación de magnitudes		X	X	X
Paso a paso pasando por la unidad	X	X	X	X
Paso a paso sin pasar por la unidad			X	
Proporciones				X
Uso de una fórmula				X

En lo que respecta a las estrategias incorrectas detectadas, encontramos una gran variedad:

- Operaciones sin sentido: Consiste en realizar una serie de operaciones, más o menos arbitrarias, con todos o algunos de los datos del problema.
- Razonamiento aditivo: Consiste en aplicar razonamientos que implican la búsqueda de relaciones aditivas entre las magnitudes independientes y la dependiente.

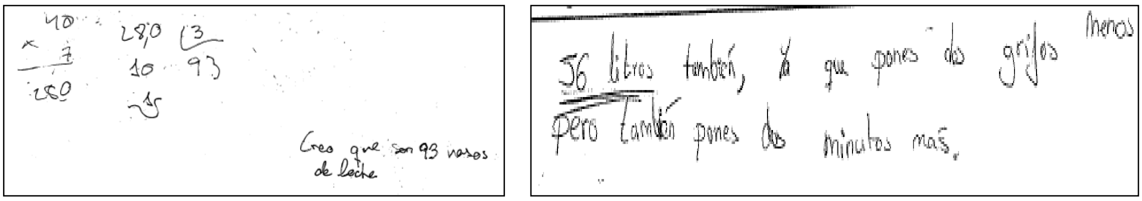

Figura 4. Operaciones sin sentido (izda.) y razonamiento aditivo (dcha.)

- Trabajo con las dos magnitudes independientes por separado: Consiste en resolver por separado dos problemas de valor perdido de PS considerando, en cada uno, sólo una de las magnitudes independientes.
- Omisión de una de las magnitudes independientes: Consiste en resolver un único problema de valor perdido de PS obviando una de las magnitudes independientes.

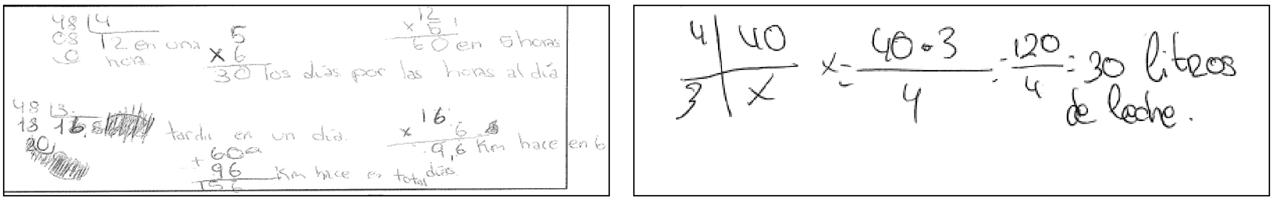

Figura 5. Trabajo con las dos magnitudes por separado (izda.) y omisión de una de las magnitudes (dcha.)

- Mal uso de una fórmula: Consiste en no aplicar correctamente la fórmula para la resolución de un problema de valor perdido de PC.

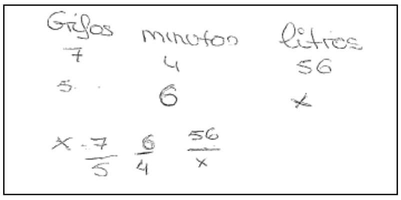

Figura 6. Ejemplo de mal uso de una fórmula

En la tabla 4 se muestra la aparición de estas estrategias según los estratos de la muestra.

Tabla 4. Estrategias incorrectas en los distintos estratos de la muestra

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Operaciones sin sentido	X	X	X	
Razonamiento aditivo	X	X		
Separación de magnitudes		X	X	
Omisión de una magnitud			X	
Mal uso de una fórmula				X

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Respecto a la tasa de éxito, una prueba Z señala que las diferencias entre los porcentajes de acierto de cada grupo para cada uno de los problemas son estadísticamente significativas al menos al 90%, excepto entre los grupos 3 y 4 para los que no se puede afirmar que haya diferencias significativas.

Se observa que los resultados mejoran con el nivel educativo y de instrucción, quizás a causa del aumento en la experiencia de los alumnos en resolución de problemas. Esto también explicaría la desaparición de las respuestas en blanco. En cualquier caso, como indican Gairín y Oller (2011), parece factible la introducción simultanea de la PC y PS en la E.S.O.

La aparición de magnitudes cuyo producto no es sencillo de interpretar no parece causar dificultades a los alumnos ya que la tasa de éxito, dentro cada estrato, es similar en cada problema. Además, observamos que, mientras en los grupos 1 y 2 la mayor tasa de éxito se da en el problema 2, en los grupos 3 y 4 es el problema 1 el de mejores resultados. Este fenómeno podría deberse a la magnitud intensiva del problema 1, que causa más dificultades a alumnos de niveles inferiores y escasa instrucción (Nunes et al., 2003). Por tanto, parece necesario trabajar con mayor énfasis las magnitudes intensivas al final de Educación Primaria.

En cuanto a la evolución de las estrategias, se observan fenómenos interesantes. Por ejemplo, en los grupos 3 y 4 desaparece la estrategia de construcción de patrones, que implica una escasa comprensión. Por su parte, debido a la instrucción en PC, aparecen en el grupo 4 las estrategias de proporciones y de uso de una fórmula que, de hecho, son mayoritarias. Su uso pone el énfasis en la parte algorítmica de la resolución, dejando de lado el significado de las manipulaciones y operaciones que se realizan como ocurre con la estrategia de productos cruzados para PS (Cramer y Post, 1993). En este sentido, aunque aporta buenos resultados, el carácter mecánico provoca errores como el de la figura 6 por no memorizar correctamente el procedimiento.

Muy pocos alumnos se preocupan por caracterizar el tipo de proporcionalidad. Incluso aquellos que tratan de justificar la relación de proporcionalidad lo hacen con argumentos incompletos del tipo “a más, más”. Este hecho es una clara influencia de la enseñanza basada en los libros de texto en donde se observa un escaso interés por la caracterización de la proporcionalidad y se favorece la aparición de ese tipo de razonamientos (Martínez et al., 2014).

La instrucción recibida también influye en la estrategia de amalgamación. Mientras los grupos 1 y 2 aplican un procedimiento de razón unitaria tras amalgamar, los grupos 3 y 4 recurren principalmente al algoritmo de productos cruzados o la aplicación de una fórmula. La estrategia de paso a paso pasando por la unidad es la única que aparece en todos los estratos. Solo un alumno (del grupo 3) utilizó la estrategia de paso a paso sin pasar por la unidad. Estos resultados apuntan a que las estrategias de tanto por uno y amalgamación pueden ser introducidas con éxito al iniciar el trabajo con la proporcionalidad (Gairín y Oller, 2011).

La mayoría de los alumnos que amalgaman magnitudes utilizan el producto entre las dos primeras. En el problema 1 el significado del producto (de días por horas al día) se interpreta fácilmente como horas totales de trabajo, aunque pocos alumnos lo explicitan. En el problema 2 el producto (de número de gatos por días) podría interpretarse como “raciones” con algo más de dificultad. La mayoría de los alumnos que utilizan amalgamación omiten el significado de la nueva magnitud, a la que siguen refiriéndose como “gatos”. Son pocos los que explicitan un significado adecuado. Por ejemplo, un alumno del grupo 4 lo interpreta como “veces come”. Esta situación se agrava en el problema 3. Este hecho constata que sería necesario un mayor trabajo con el manejo de magnitudes (Bosch, 1994).

Finalmente, se observa una influencia del nivel educativo y grado de instrucción en los errores cometidos por los alumnos. Por ejemplo, desaparecen las estrategias aditivas a partir del grupo 3. Este hecho coincide con el observado por Fernández y Llinares (2010) que señalan la influencia del currículo en esta evolución. Con la instrucción en técnicas relacionadas con la PS, como la regla de tres, aparecen errores debidos a la omisión de una magnitud para aplicar estas técnicas en el grupo 3. Además, en el grupo 4 surgen errores relacionados con la mala aplicación de algoritmos mecánicos propios de la PC.

REFERENCIAS

Berg, B. L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences*. Boston: Allyn and Bacon.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 7-40.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. Nueva York: Springer.

Fernández, C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M. Moreno, J. Carrillo y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gairín, J. M. y Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid, España: Pirámide.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M.P. (2010) *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill Educación.

Lamon, S. J. (1993a). Ratio and proportion: Children‘s cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Rational numbers*. *An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrens Erlbaun Associates.

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and proportion: Connecting content and children‘s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI*. *Revista de Educación*, *4*, 167-179.

López, G. y Figueras, O. (1999). Qualitative reasoning in problem solving related to ratio, proportion, and proportional variation concepts. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the twenty first meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of mathematics Education* (Vol. 2, pp. 599-605). México: Cinvestav. Columbus, Ohio: ERIC.

Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca, España: SEIEM.

Martínez, S., Muñoz, J.M. y Oller, A. (2015, febrero). Compound proportion problems in Secondary Spanish textbooks. Póster presentado en CERME9, Praga, República Checa.

Nunes, T., Desli, D. y Bell, D. (2003). The development of children’s understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*, 651–675.

Rivas, M., Godino, J. D. y Konic P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 453-462). Santander, España: SEIEM.

Silvestre, A. I. y da Ponte J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. *PNA*, *6*(3), 73-83.

Spinillo, A. G. y Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*, 181–197.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one‘s use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátkáy y N. Stehlíková. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 169-176). Praga, República Checa: PME.

Tournaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Valverde, A.G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

---

[i] Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.