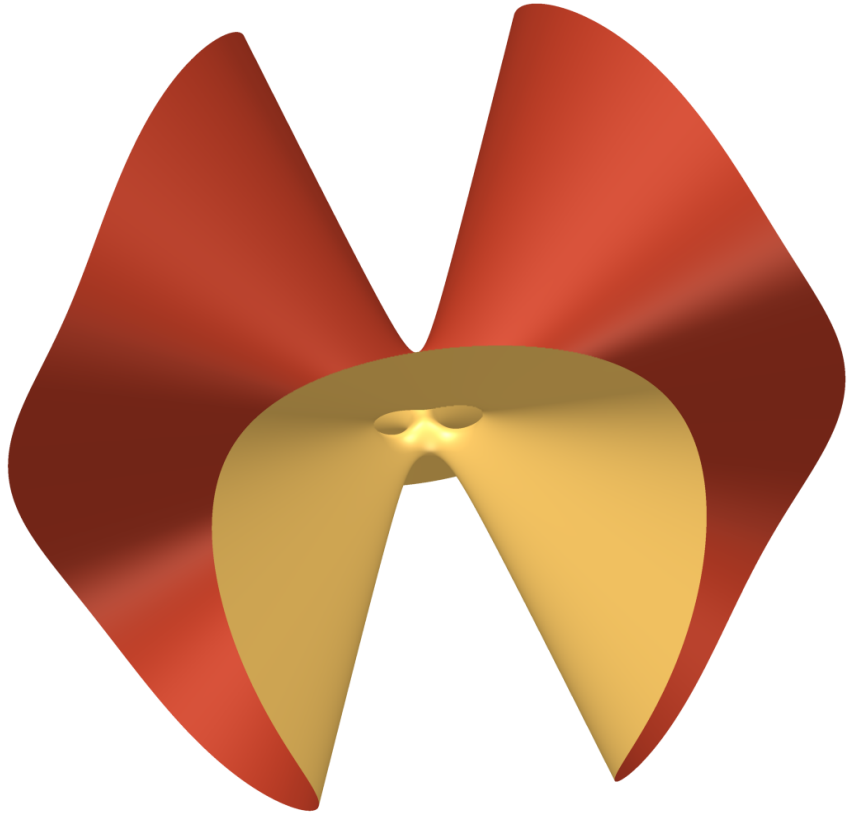
Rectas: de la simplicidad a la geometría y a la topología pasando por Galois

Enrique ARTAL BARTOLO

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Instituto Universitario de Matemáticas y sus Aplicaciones
Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza

Celebración de San Alberto Magno
Zaragoza, 14 de noviembre 2022

María Teresa Lozano, 11/11/11

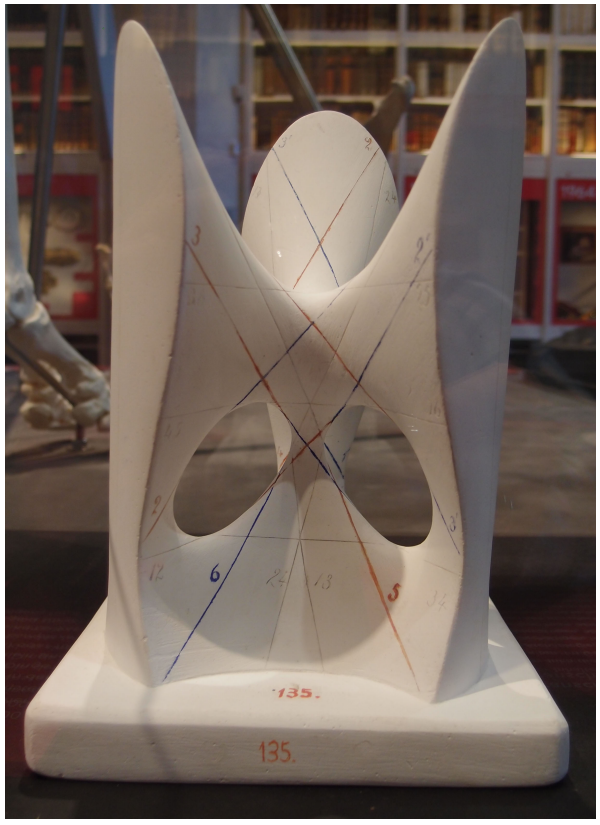


Superficie de Clebsch

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0$$

Departamento de Matemáticas
Universidad Zaragoza

María Teresa Lozano, 11/11/11

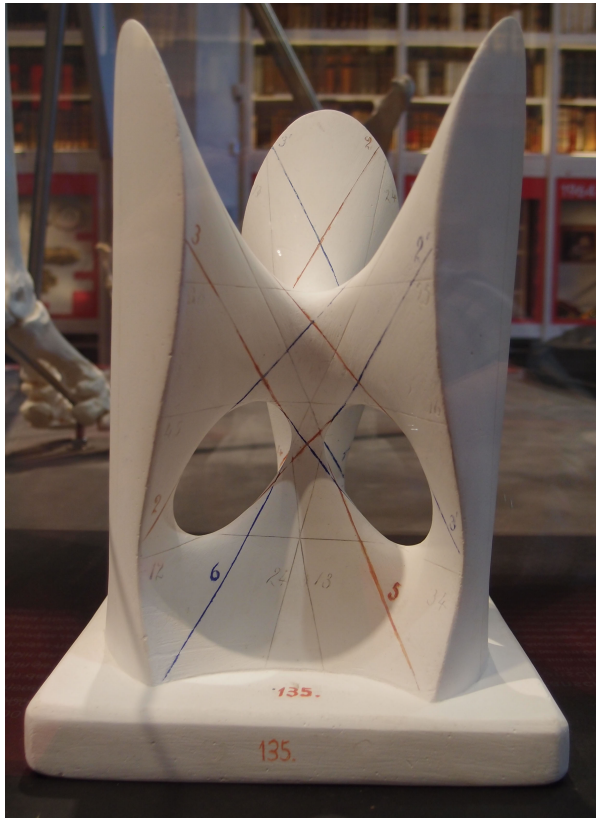


Modelo de la superficie de Clebsch y sus 27 rectas

$$x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0$$

Departamento de Matemáticas
Universidad Zaragoza

María Teresa Lozano, 11/11/11



Teorema

Toda superficie cúbica lisa en el espacio tridimensional (!) tiene 27 rectas (contadas adecuadamente)

María Teresa Lozano, 11/11/11

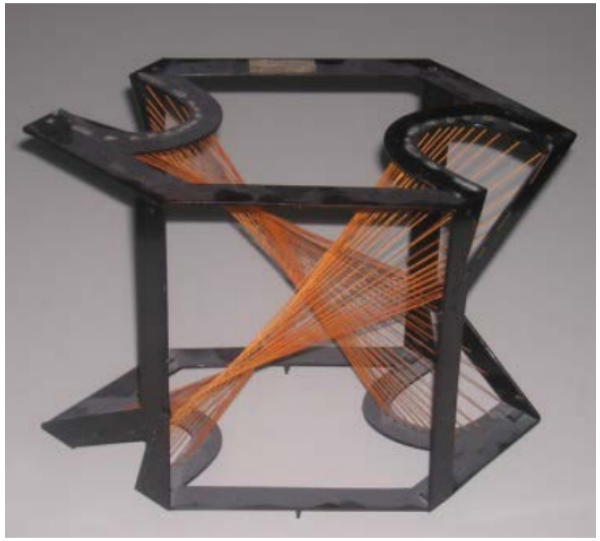


Modelo de cuádrica reglada $z = xy$

Teorema

Toda cuádrica lisa (!) en el espacio tridimensional (!) tiene ∞ *rectas*

María Teresa Lozano, 11/11/11



Y alguna superficie cuártica (singular)

Teorema

Toda cuádrica lisa (!) en el espacio tridimensional (!) tiene ∞ rectas

María Teresa Lozano, 11/11/11



No siempre en buen estado

Rectas en el plano

Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta

Rectas en el plano

Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta
- Dos rectas distintas del plano se cortan en un punto si. . .

Rectas en el plano

Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta
- Dos rectas distintas del plano se cortan en un punto si. . .

Plano proyectivo ($\mathbb{RP}^2$)

Rectas en el plano

Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta
- Dos rectas distintas del plano se cortan en un punto si. . .

Plano proyectivo ($\mathbb{RP}^2$)

- Empezamos con el plano ($\mathbb{R}^2$)

Rectas en el plano

Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta
- Dos rectas distintas del plano se cortan en un punto si. . .

Plano proyectivo ($\mathbb{RP}^2$)

- Empezamos con el plano ($\mathbb{R}^2$)
- A cada recta le añadimos un punto extra; dos rectas comparten el punto extra si y solo si son paralelas

Rectas en el plano

Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta
- Dos rectas distintas del plano se cortan en un punto si...

Plano proyectivo ($\mathbb{RP}^2$)

- Empezamos con el plano ($\mathbb{R}^2$)
- A cada recta le añadimos un punto extra; dos rectas comparten el punto extra si y solo si son paralelas
- Decretamos que los puntos extra están en una recta, la recta del infinito

Rectas en el plano

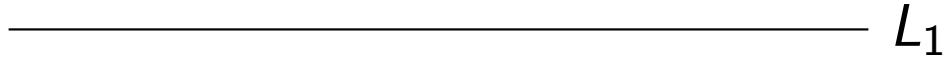
Propiedades

- Por dos puntos distintos del plano pasa una única recta
- Dos rectas distintas del plano proyectivo se cortan en un punto

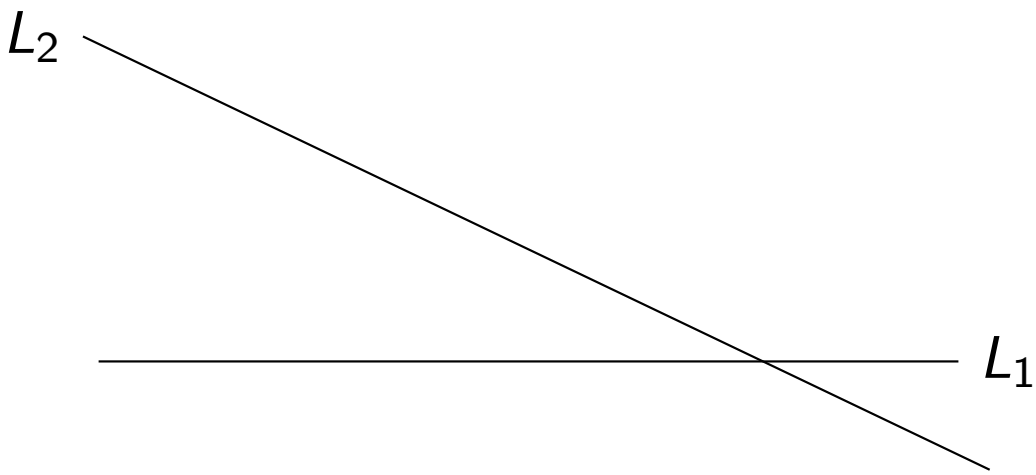
Plano proyectivo ($\mathbb{RP}^2$)

- Empezamos con el plano ($\mathbb{R}^2$)
- A cada recta le añadimos un punto extra; dos rectas comparten el punto extra si y solo si son paralelas
- Decretamos que los puntos extra están en una recta, la recta del infinito

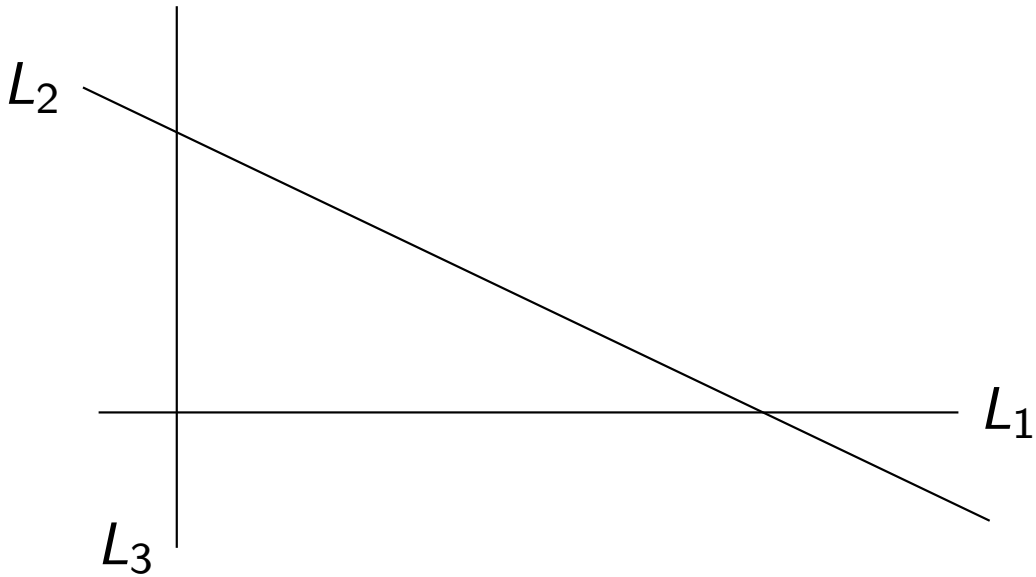
Familias de rectas



Familias de rectas



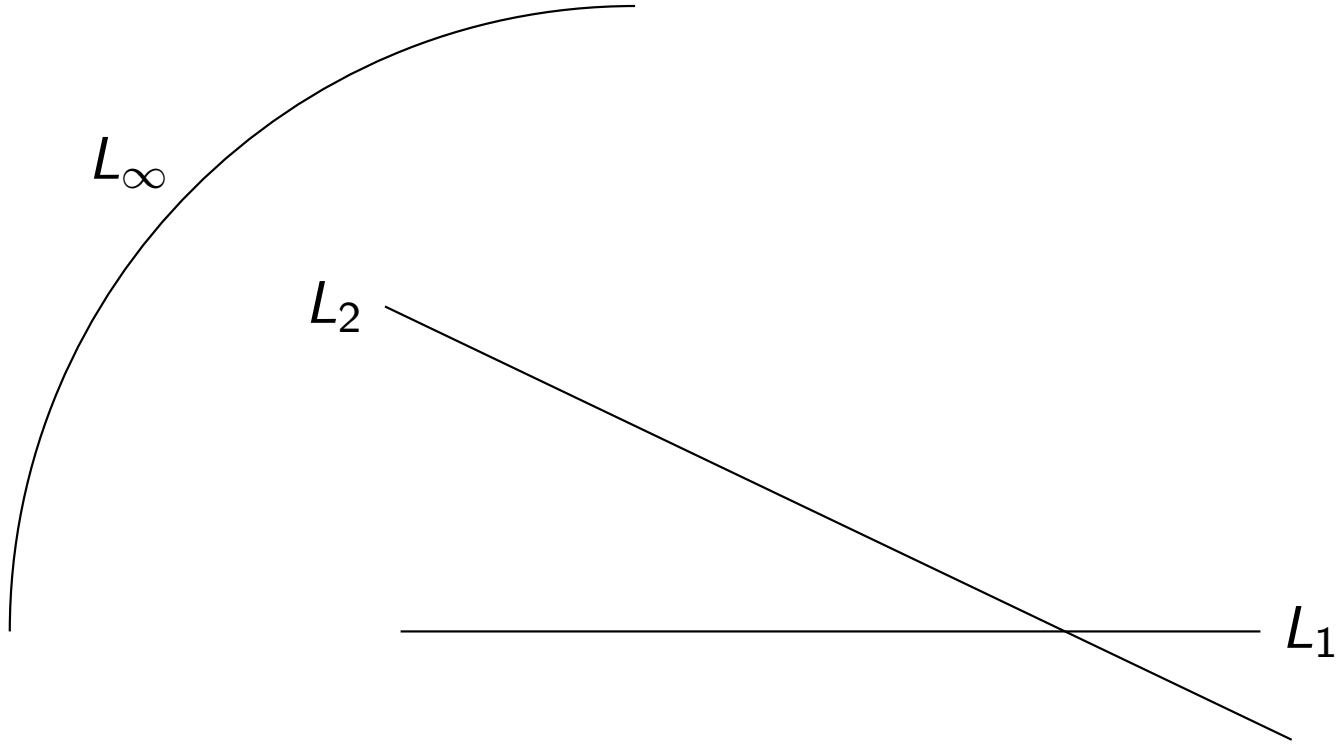
Familias de rectas



Patrón de corte

3 rectas que se cortan en tres puntos distintos

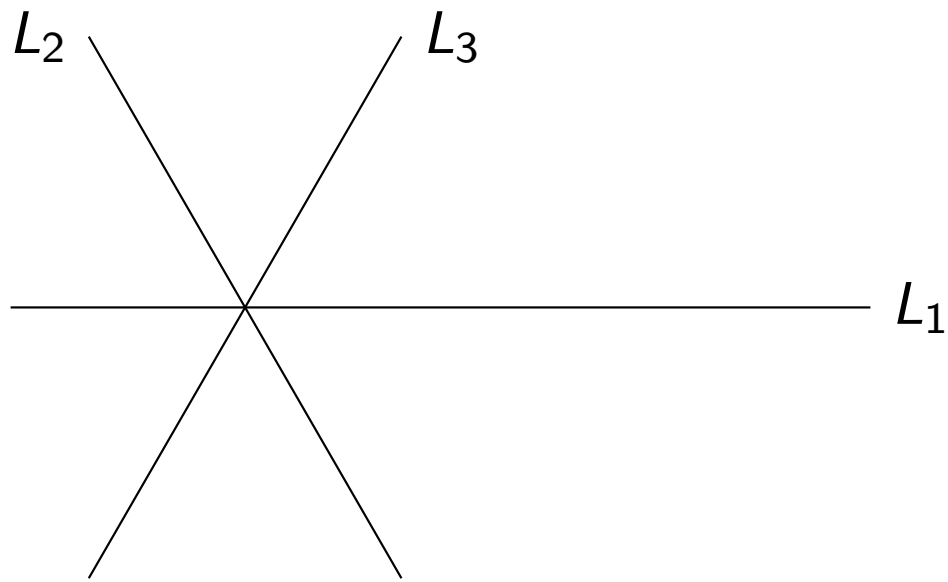
Familias de rectas



Patrón de corte

3 rectas que se cortan en tres puntos distintos

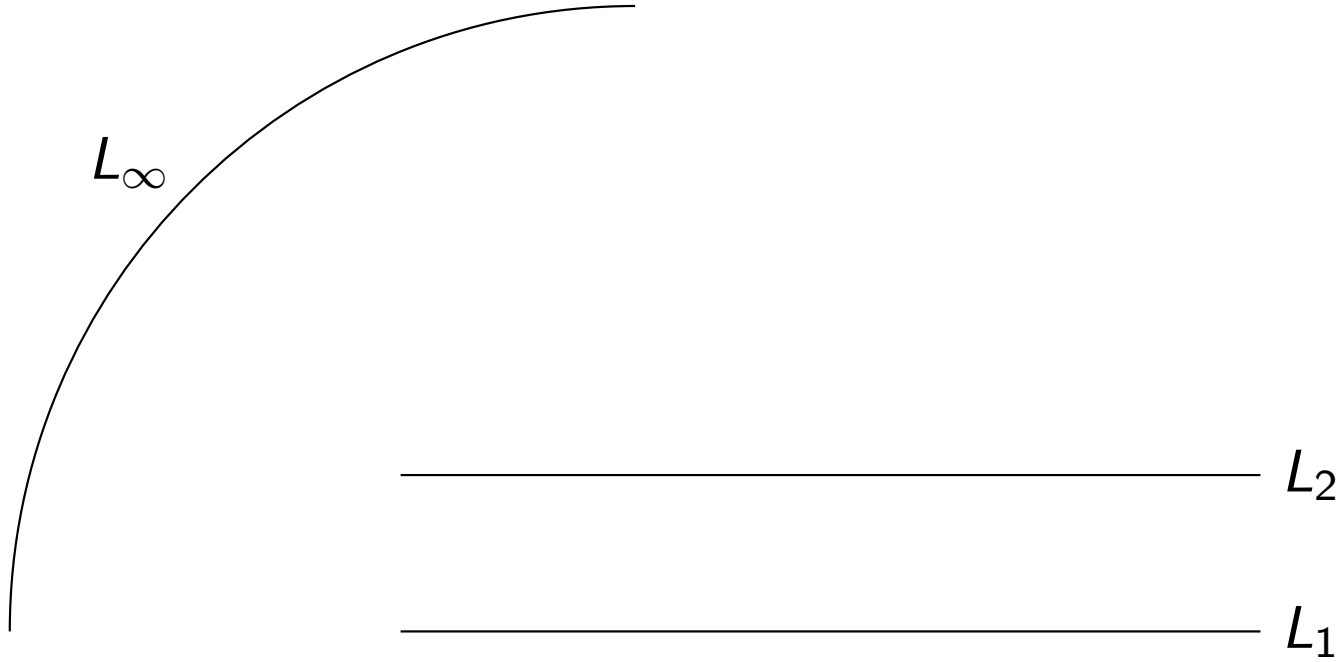
Familias de rectas



Patrón de corte

3 rectas que se cortan en un punto

Familias de rectas



Patrón de corte

3 rectas que se cortan en un punto

Patrones de corte (combinatorias o matroides)

- 0 rectas: 0 patrones

Patrones de corte (combinatorias o matroides)

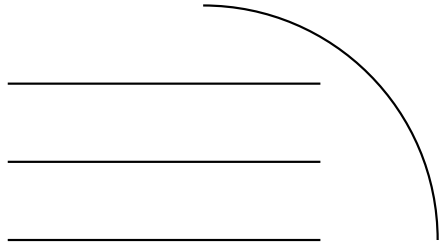
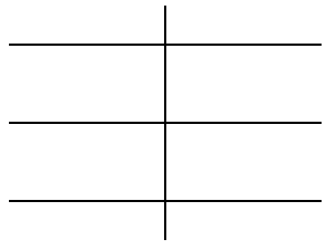
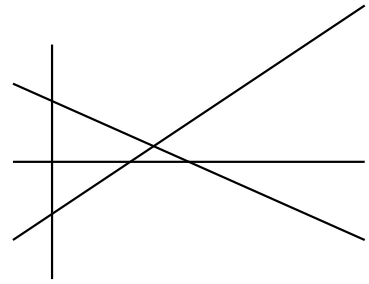
- 1 rectas: 1 patrón

Patrones de corte (combinatorias o matroides)

- 3 rectas: 2 patrones

Patrones de corte (combinatorias o matroides)

- 4 rectas: 3 patrones

Patrones de corte (combinatorias o matroides)

- 4 rectas: 3 patrones
- 5 rectas: 5 patrones

Patrones de corte (combinatorias o matroides)

- 4 rectas: 3 patrones
- 5 rectas: 5 patrones
- 6 rectas: 10 patrones
- 7 rectas: 24 patrones
- 8 rectas: 69 patrones
- 9 rectas: 384 patrones
- 10 rectas: 5250 patrones
- 11 rectas: 232 929 patrones (89MB)
- 12 rectas: 28 872 973 patrones (9,8GB)

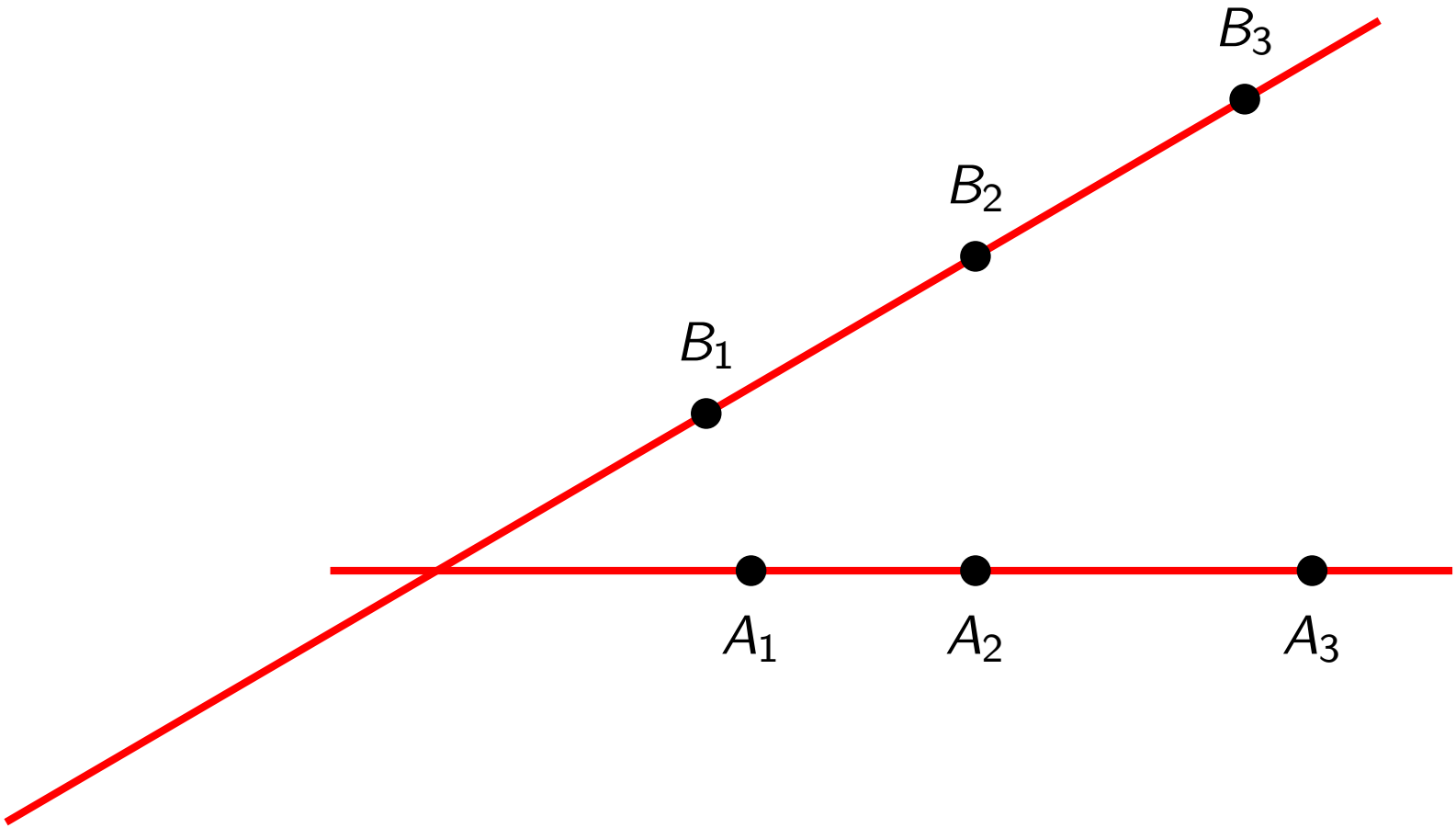
Patrones de corte (combinatorias o matroides)

- 4 rectas: 3 patrones
- 5 rectas: 5 patrones
- 6 rectas: 10 patrones
- 7 rectas: 24 patrones
- 8 rectas: 69 patrones
- 9 rectas: 384 patrones
- 10 rectas: 5250 patrones
- 11 rectas: 232 929 patrones (89MB)
- 12 rectas: 28 872 973 patrones (9,8GB)

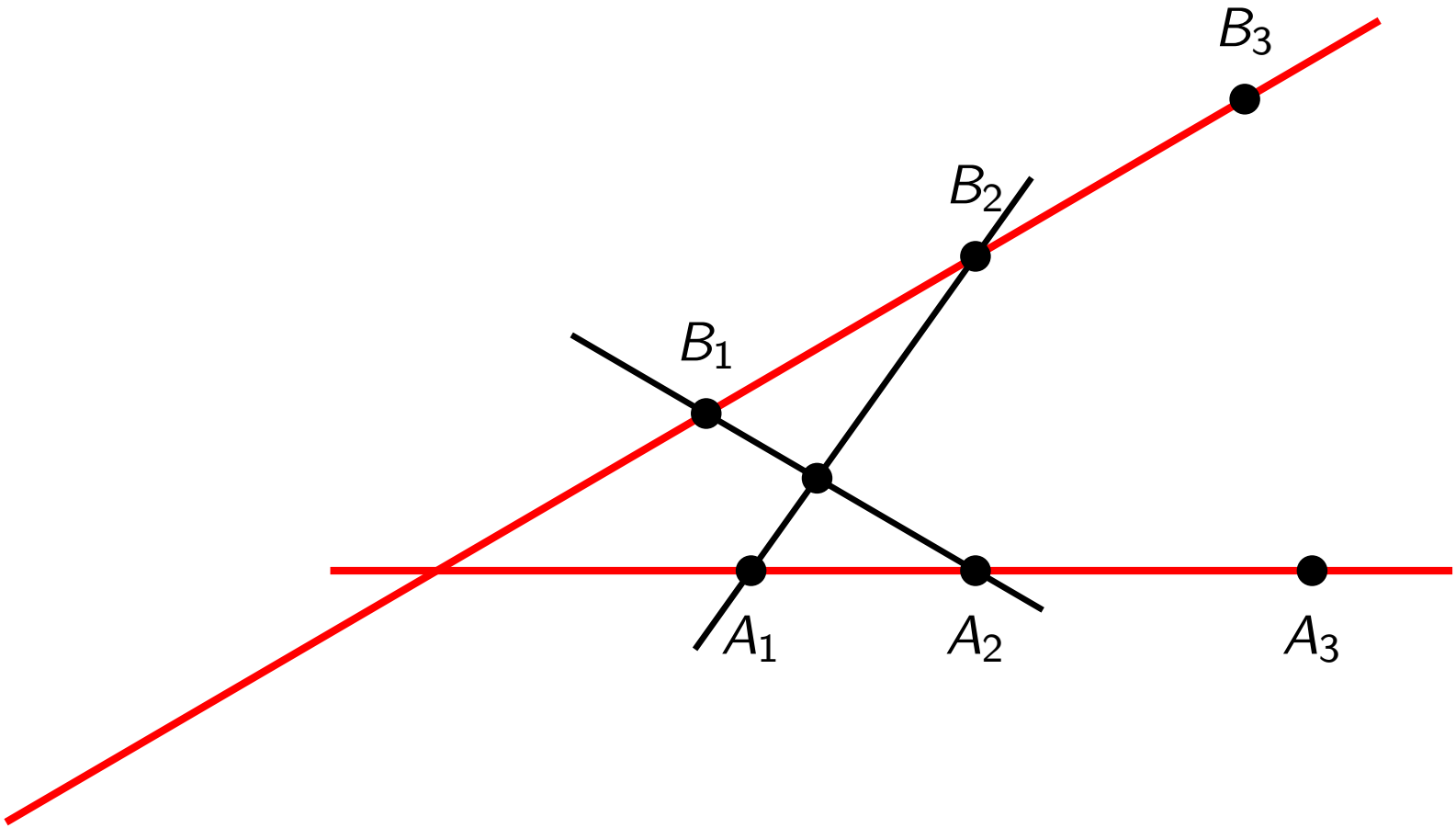
Pregunta

¿Se pueden realizar todos los patrones de corte?

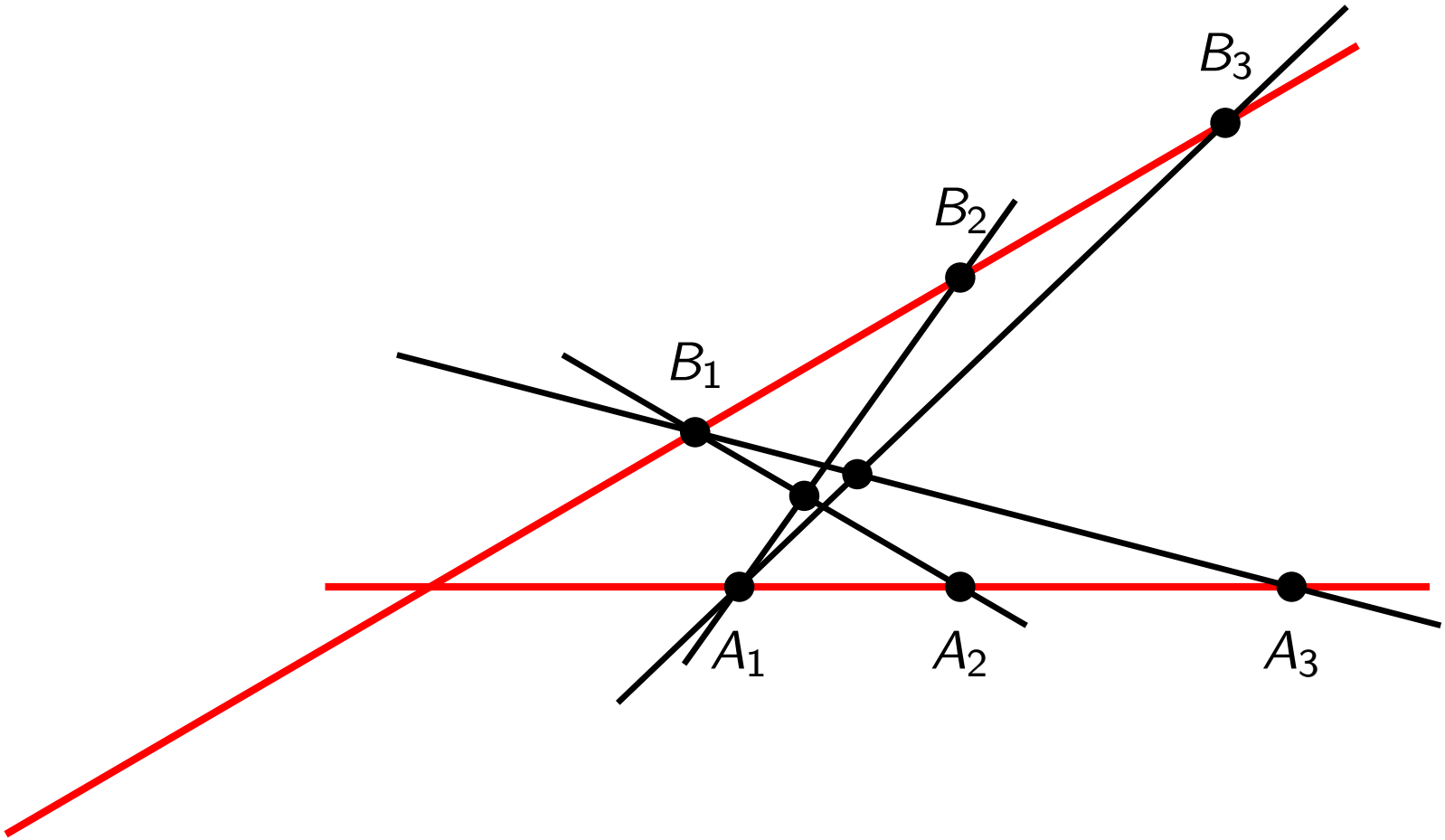
Teorema de Pappus



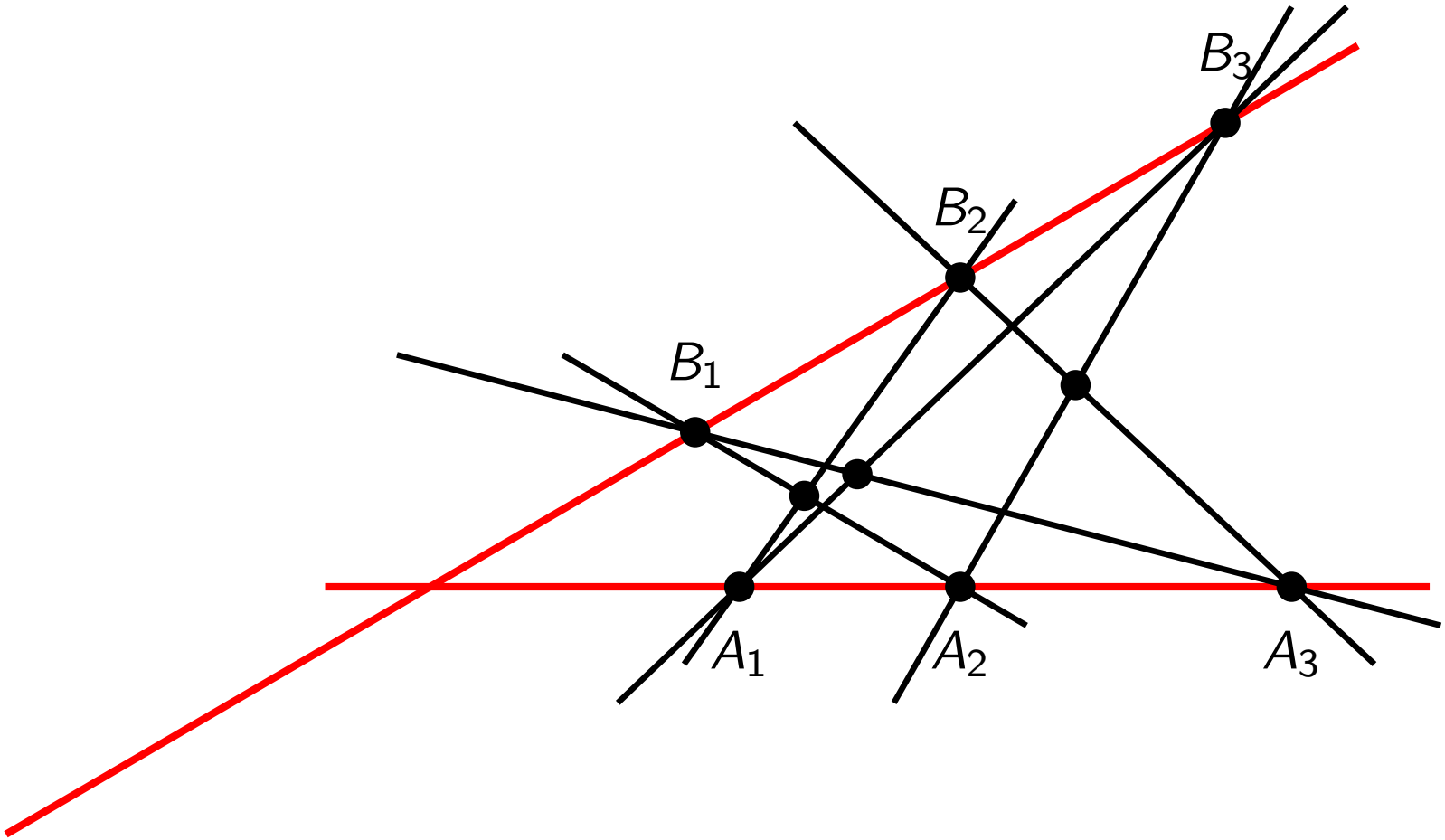
Teorema de Pappus



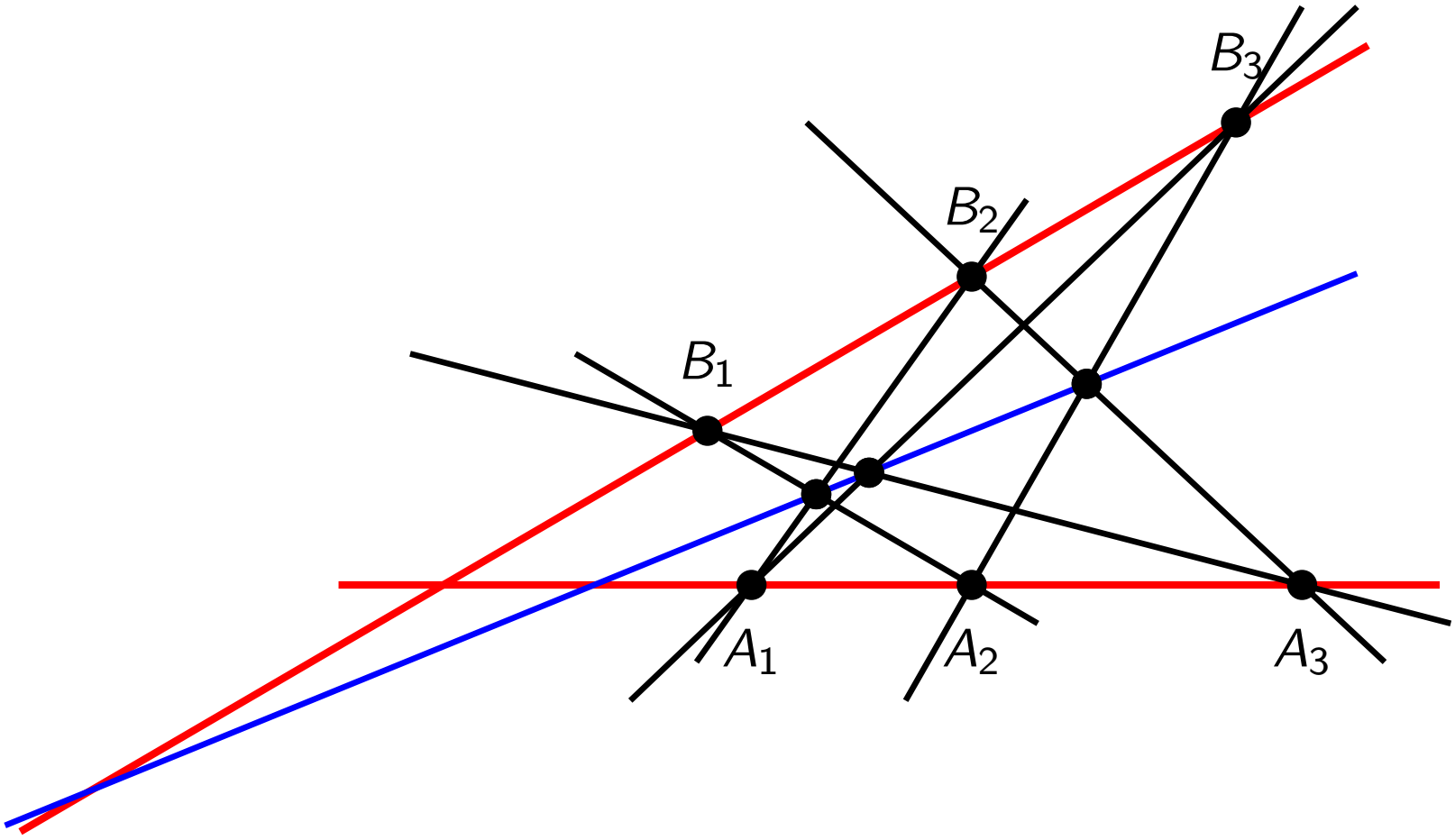
Teorema de Pappus



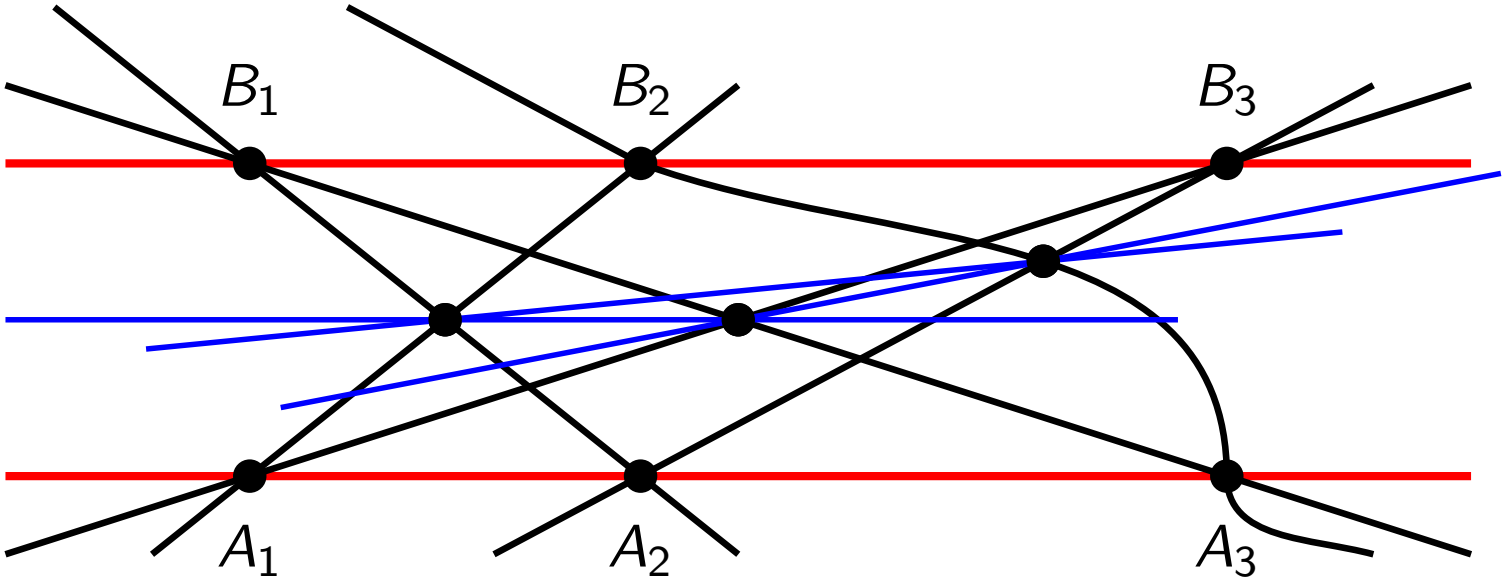
Teorema de Pappus



Teorema de Pappus

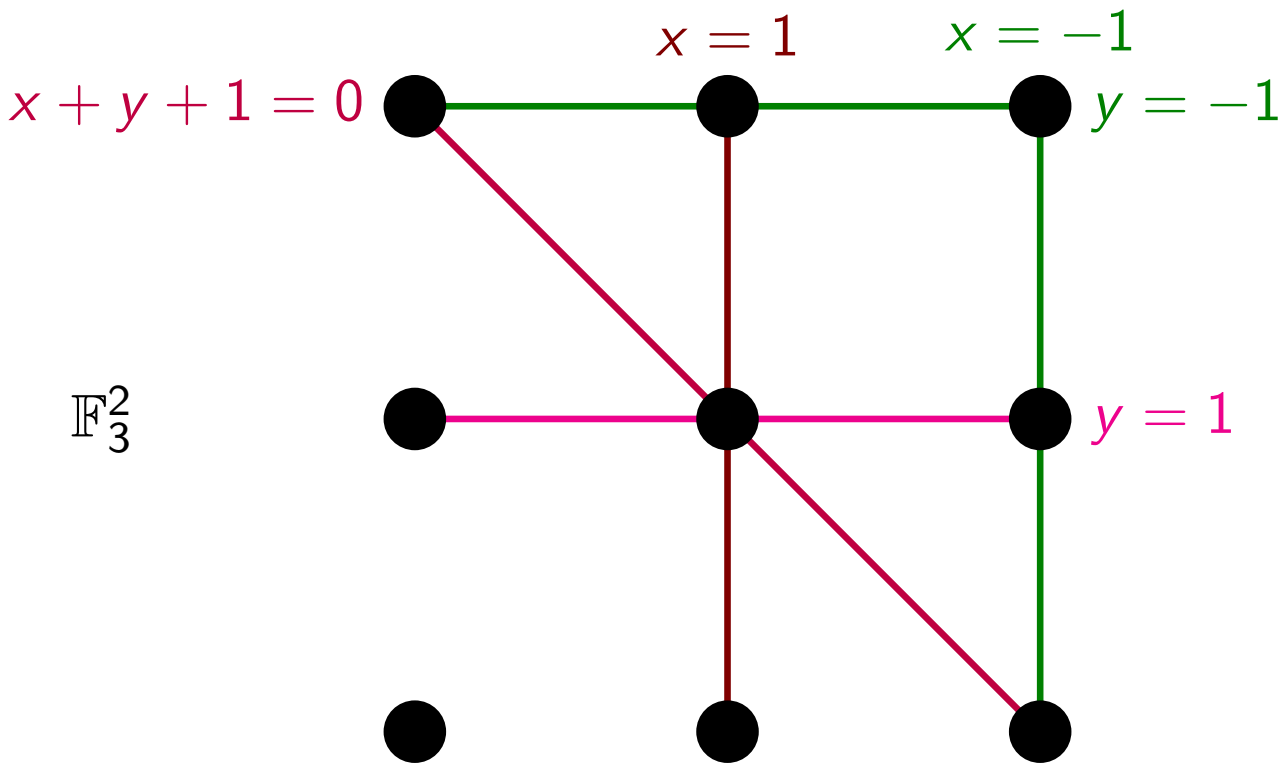


Teorema de Pappus

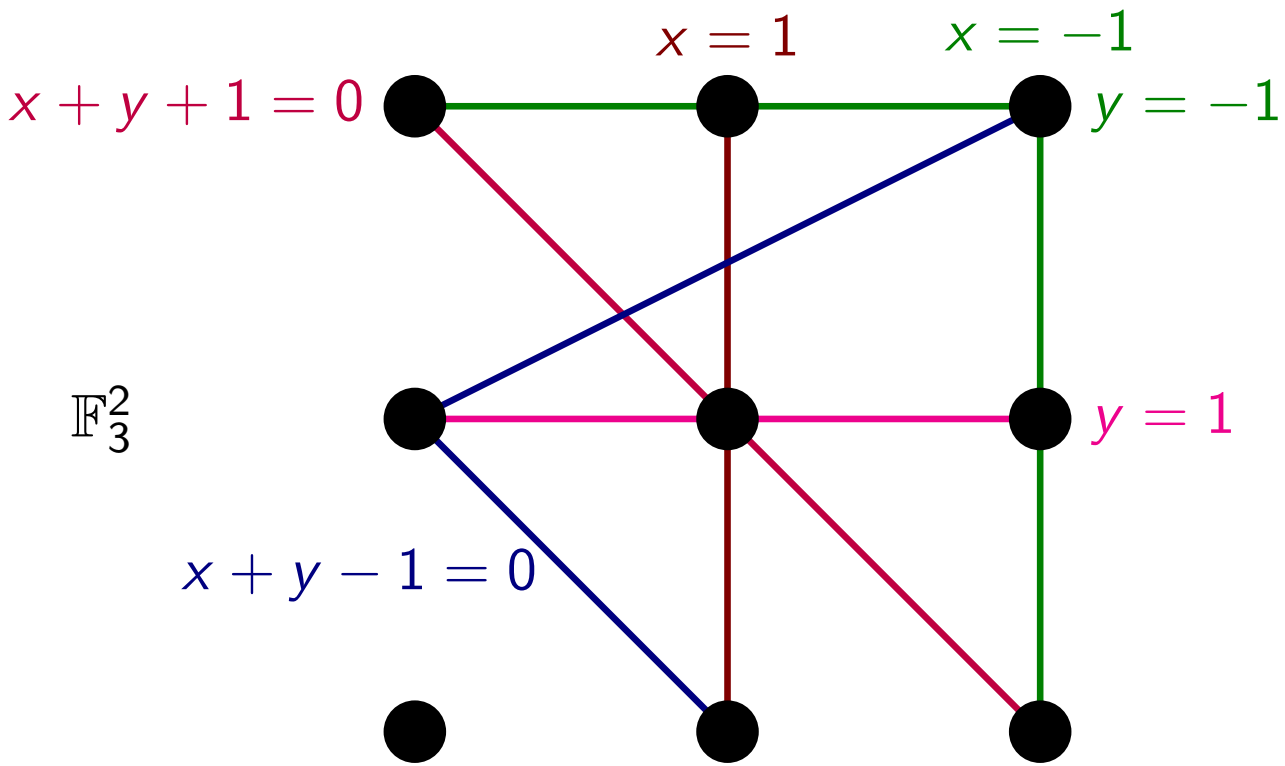


Patrón de corte no realizable

Patrón de MacLane

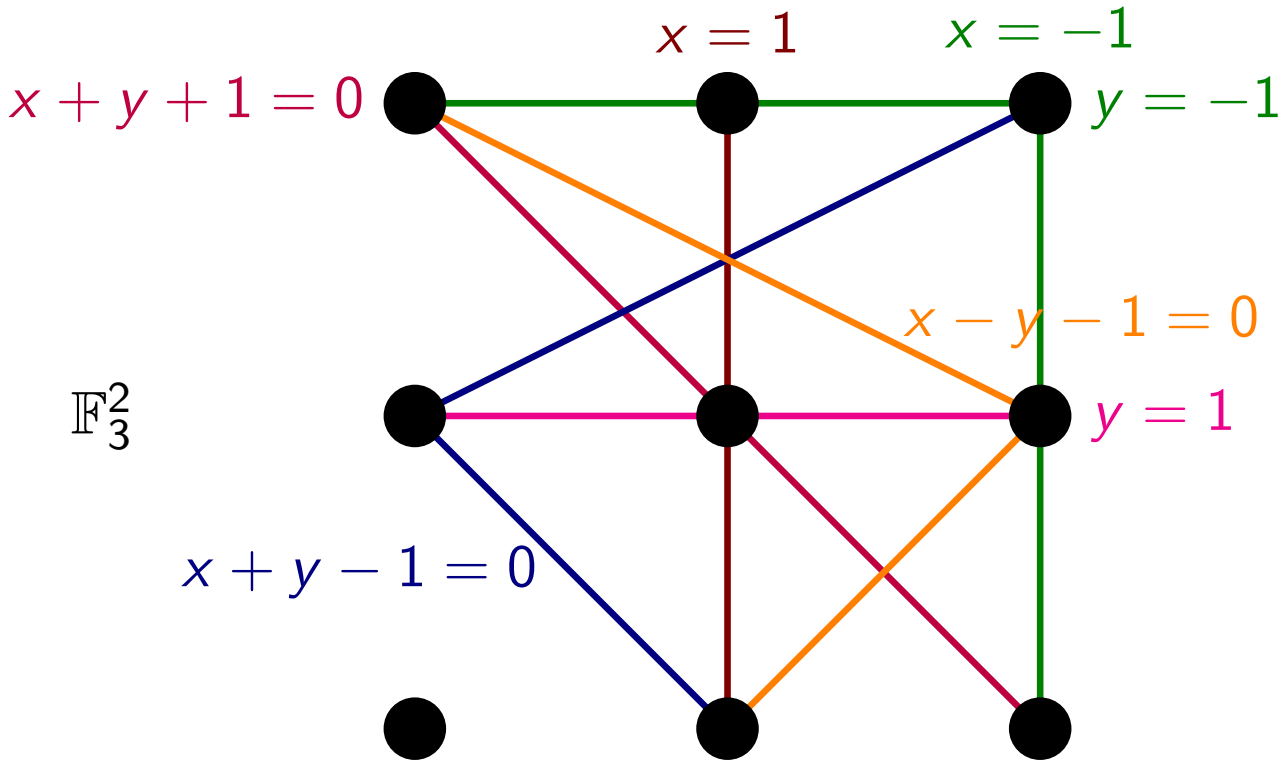


Patrón de MacLane



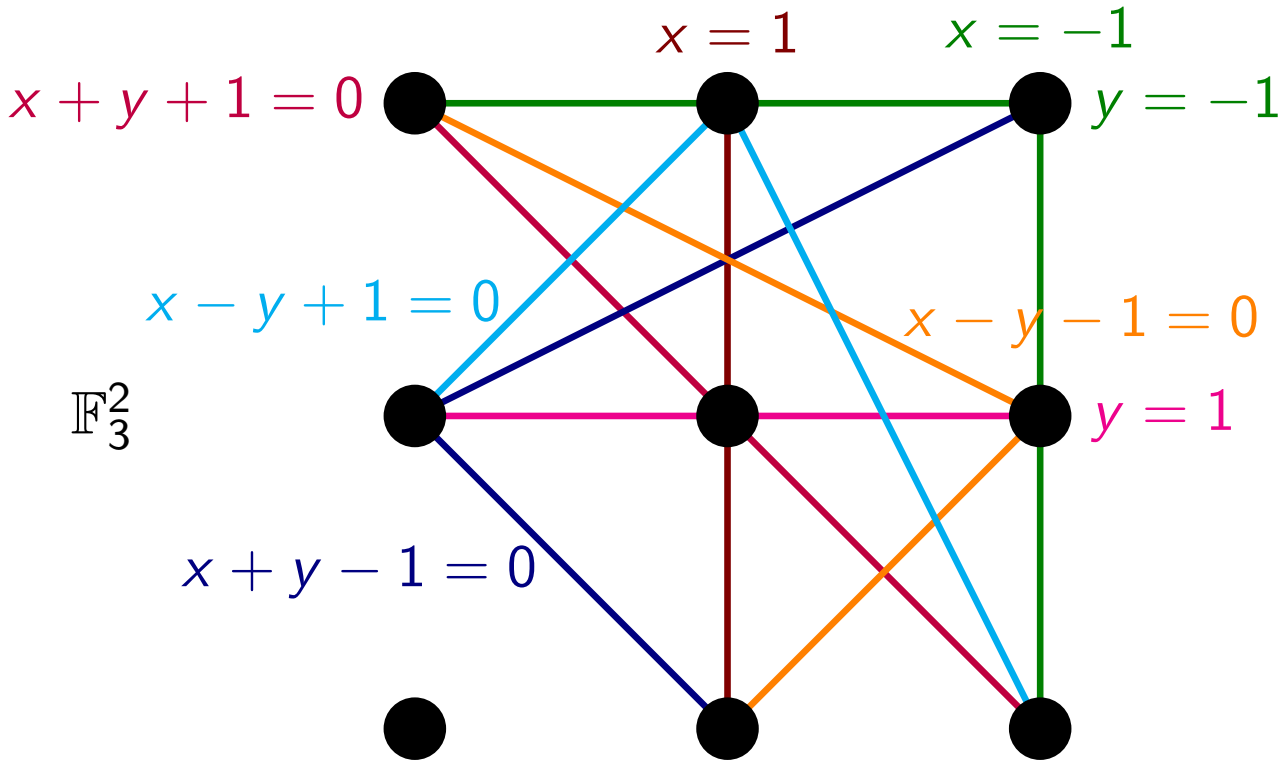
Solo cuenta las intersecciones en nodos

Patrón de MacLane



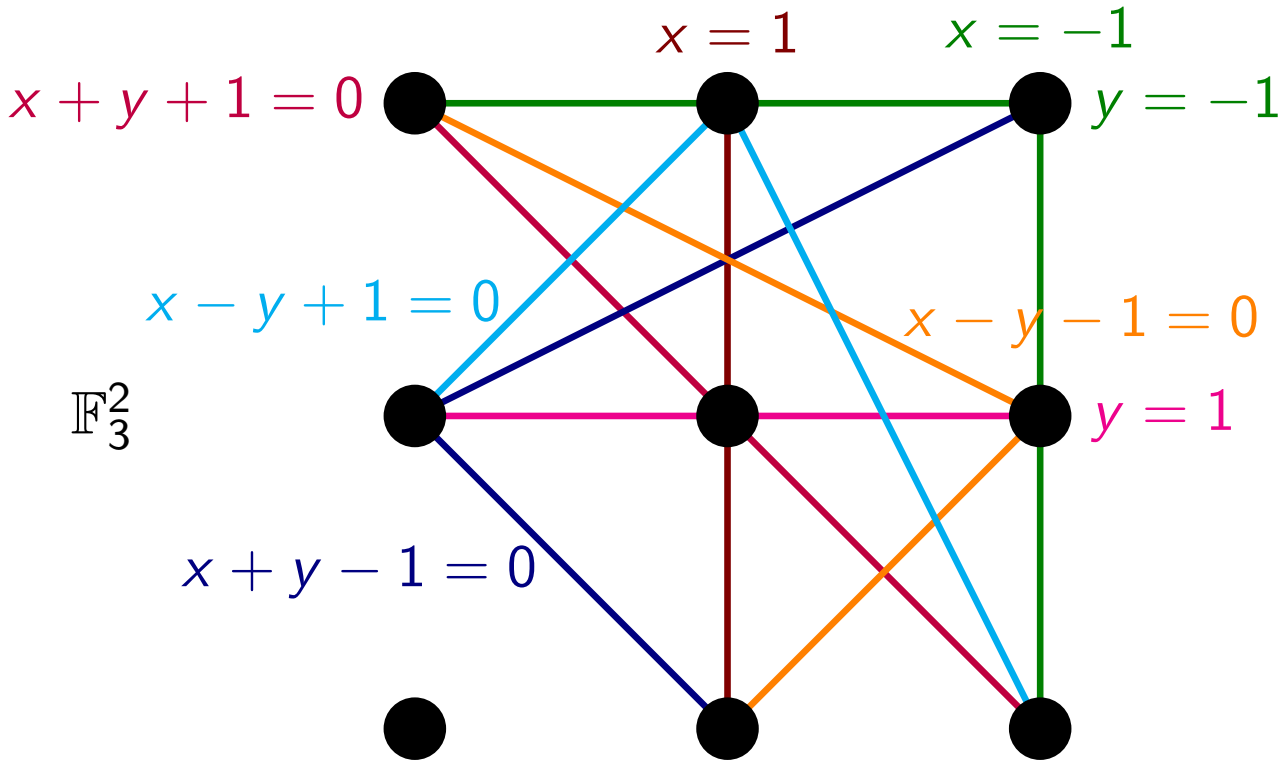
Solo cuenta las intersecciones en nodos

Patrón de MacLane



Solo cuenta las intersecciones en nodos

Patrón de MacLane



Patrón más pequeño no realizable en $\mathbb{R}$.

Sí en $\mathbb{F}_3, \mathbb{C}$

Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Q}$ es cuerpo de definición para todos los patrones realizables hasta 7 rectas.

Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Q}$ es cuerpo de definición para todos los patrones realizables hasta 7 rectas.
- El patrón de MacLane no se realiza en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (luego en $\mathbb{C}$)

Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Q}$ es cuerpo de definición para todos los patrones realizables hasta 7 rectas.
- El patrón de MacLane no se realiza en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (luego en $\mathbb{C}$)
- Patrones con cuerpos finitos de definición: Criptografía

Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Q}$ es cuerpo de definición para todos los patrones realizables hasta 7 rectas.
- El patrón de MacLane no se realiza en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (luego en $\mathbb{C}$)
- Patrones con cuerpos finitos de definición: Criptografía
- Patrones donde $\mathbb{R}$ es cuerpo de definición: Combinatoria, interpolación (Conjetura de Gasca-Maeztu)

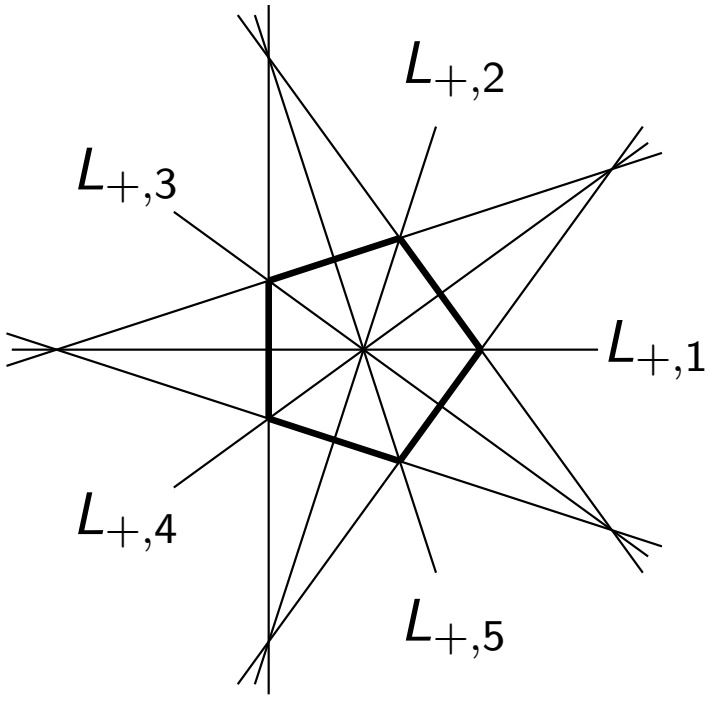
Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Q}$ es cuerpo de definición para todos los patrones realizables hasta 7 rectas.
- El patrón de MacLane no se realiza en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (luego en $\mathbb{C}$)
- Patrones con cuerpos finitos de definición: Criptografía
- Patrones donde $\mathbb{R}$ es cuerpo de definición: Combinatoria, interpolación (Conjetura de Gasca-Maeztu)
- Patrones donde $\mathbb{R}$ es cuerpo de definición: Topología

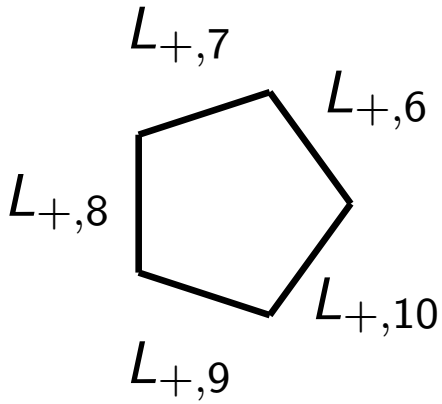
Cuerpo de definición

- $\mathcal{P}$ patrón de corte. Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un cuerpo de definición para $\mathcal{P}$ si es posible encontrar una realización donde todas las rectas tengan ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{Q}$ es cuerpo de definición para todos los patrones realizables hasta 7 rectas.
- El patrón de MacLane no se realiza en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (luego en $\mathbb{C}$)
- Patrones con cuerpos finitos de definición: Criptografía
- Patrones donde $\mathbb{R}$ es cuerpo de definición: Combinatoria, interpolación (Conjetura de Gasca-Maeztu)
- Patrones donde $\mathbb{R}$ es cuerpo de definición: Topología
- Cuerpos de definición mínimos (contenidos en $\mathbb{C}$): Topología y teoría de Galois

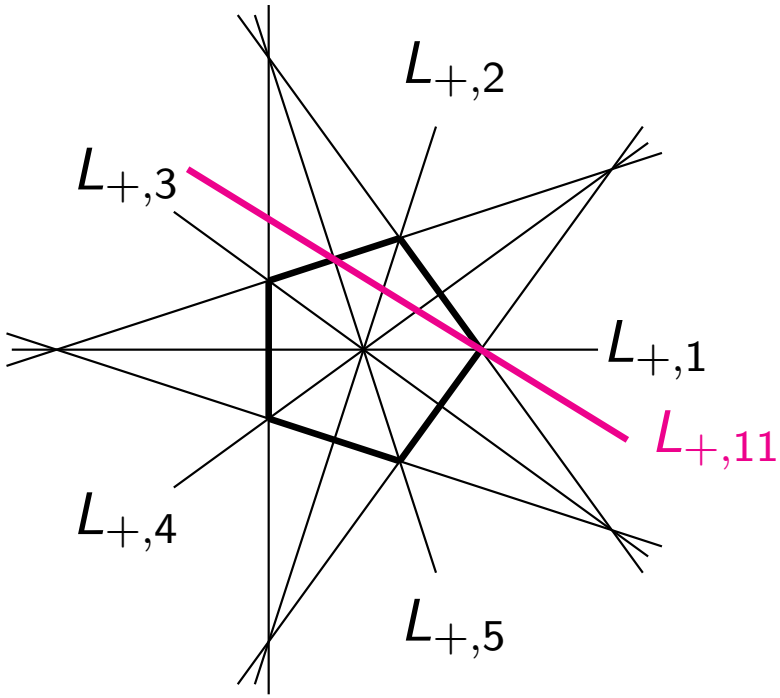
Pentágono y pentagrama



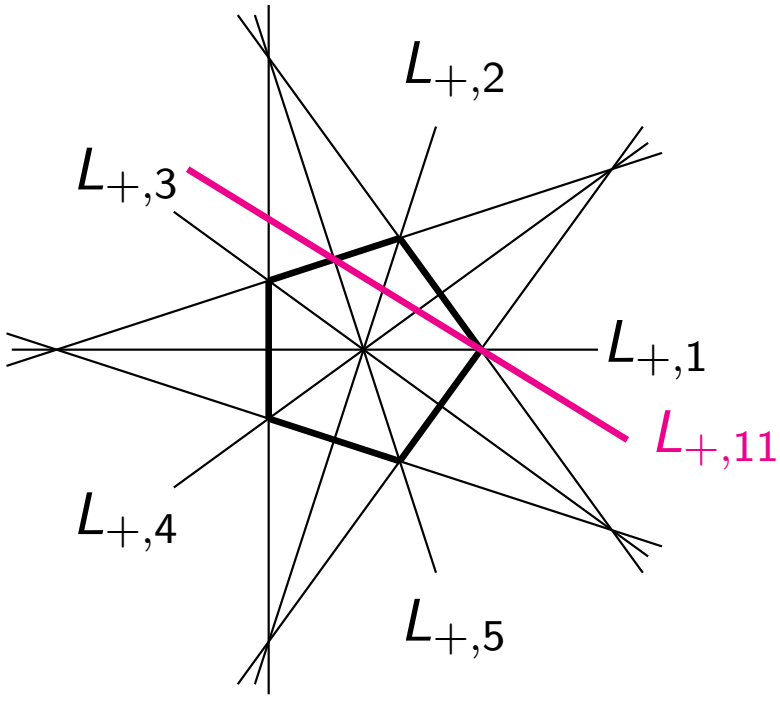
Pentágono y pentagrama

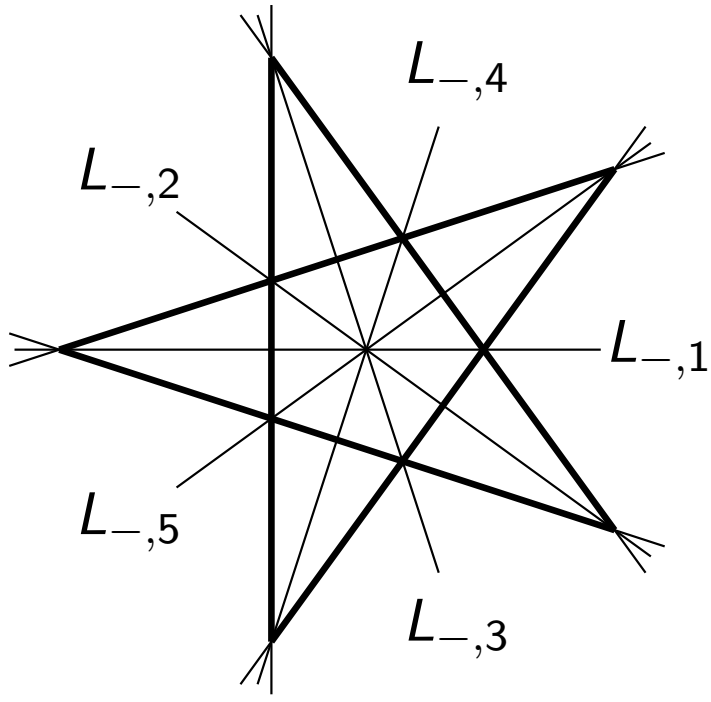


Pentágono y pentagrama

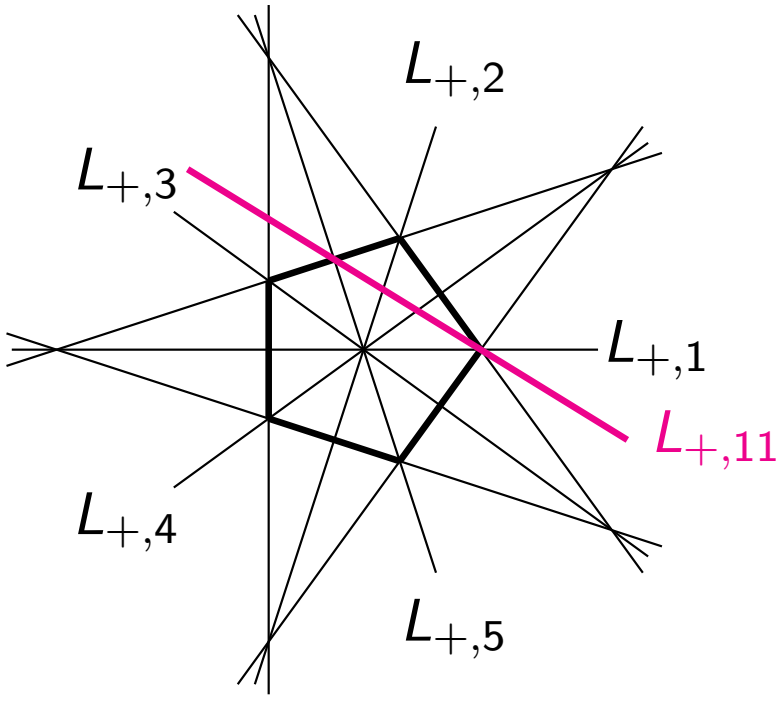


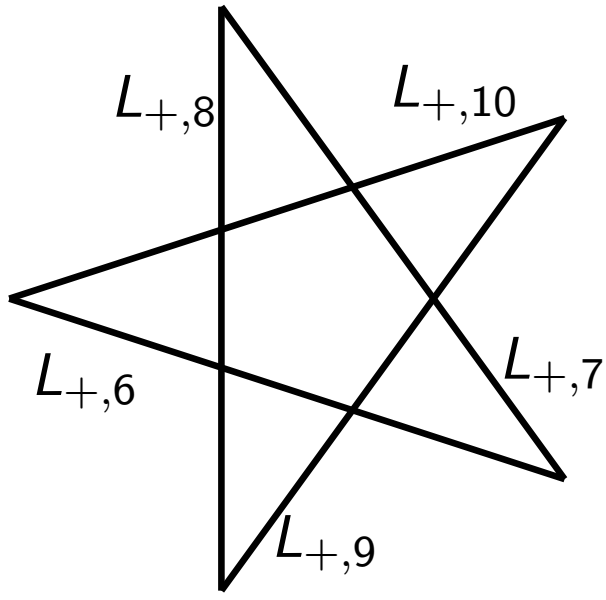
Pentágono y pentagrama



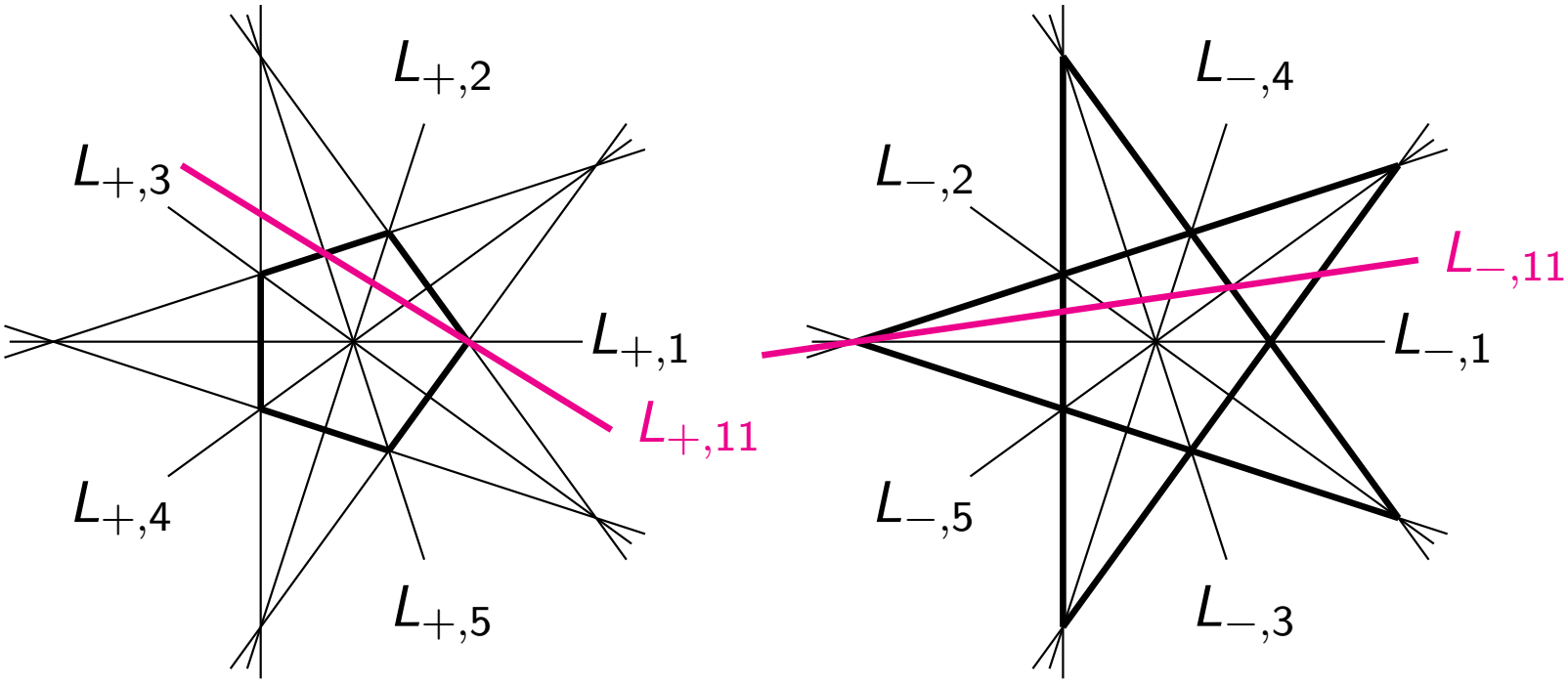


Pentágono y pentagrama

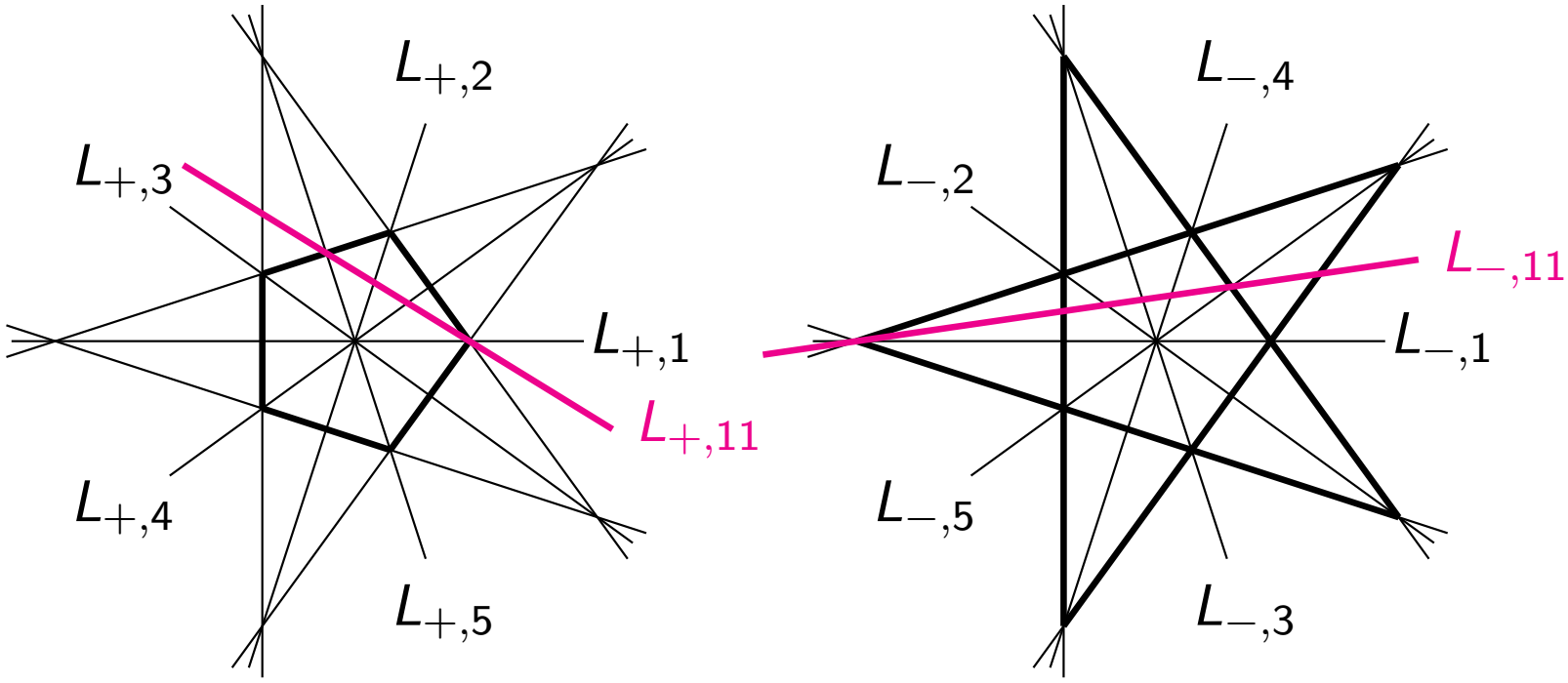




Pentágono y pentagrama

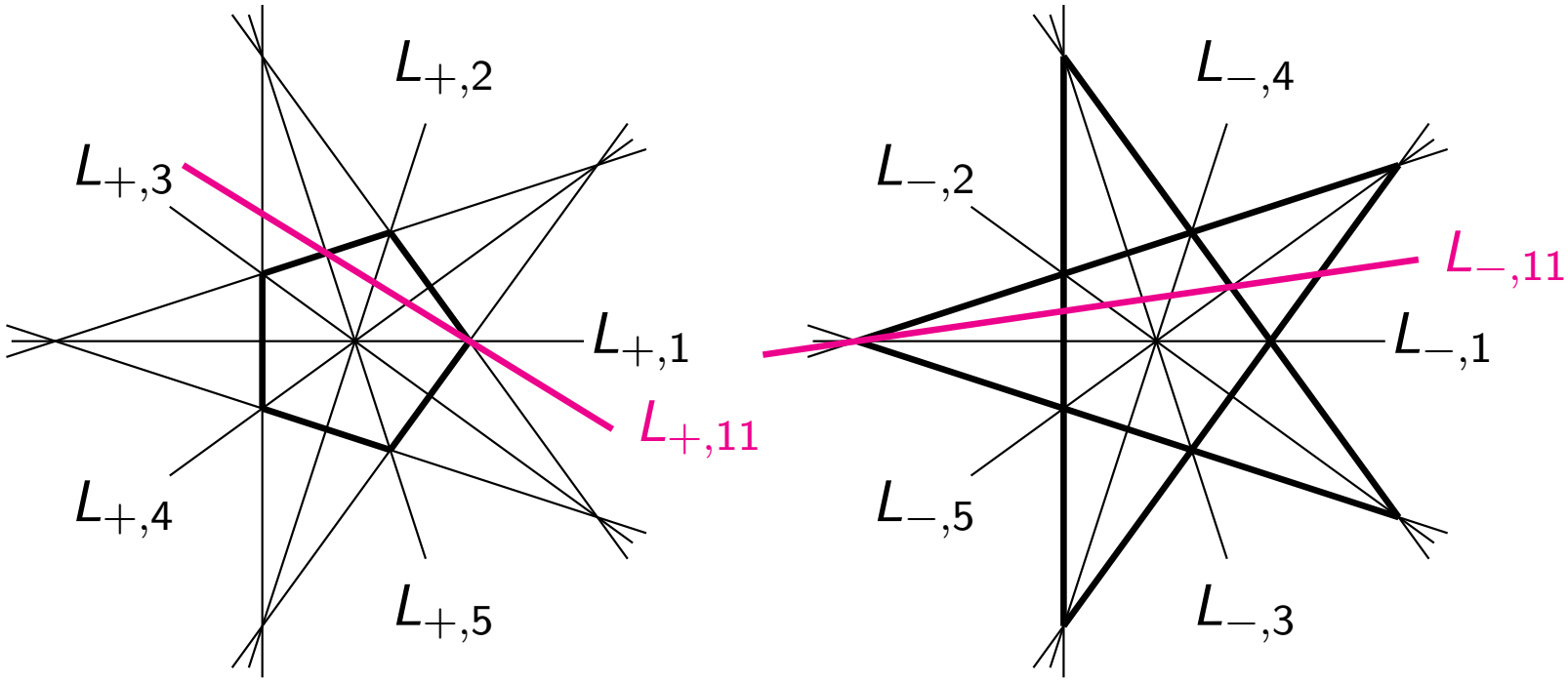


Pentágono y pentagrama



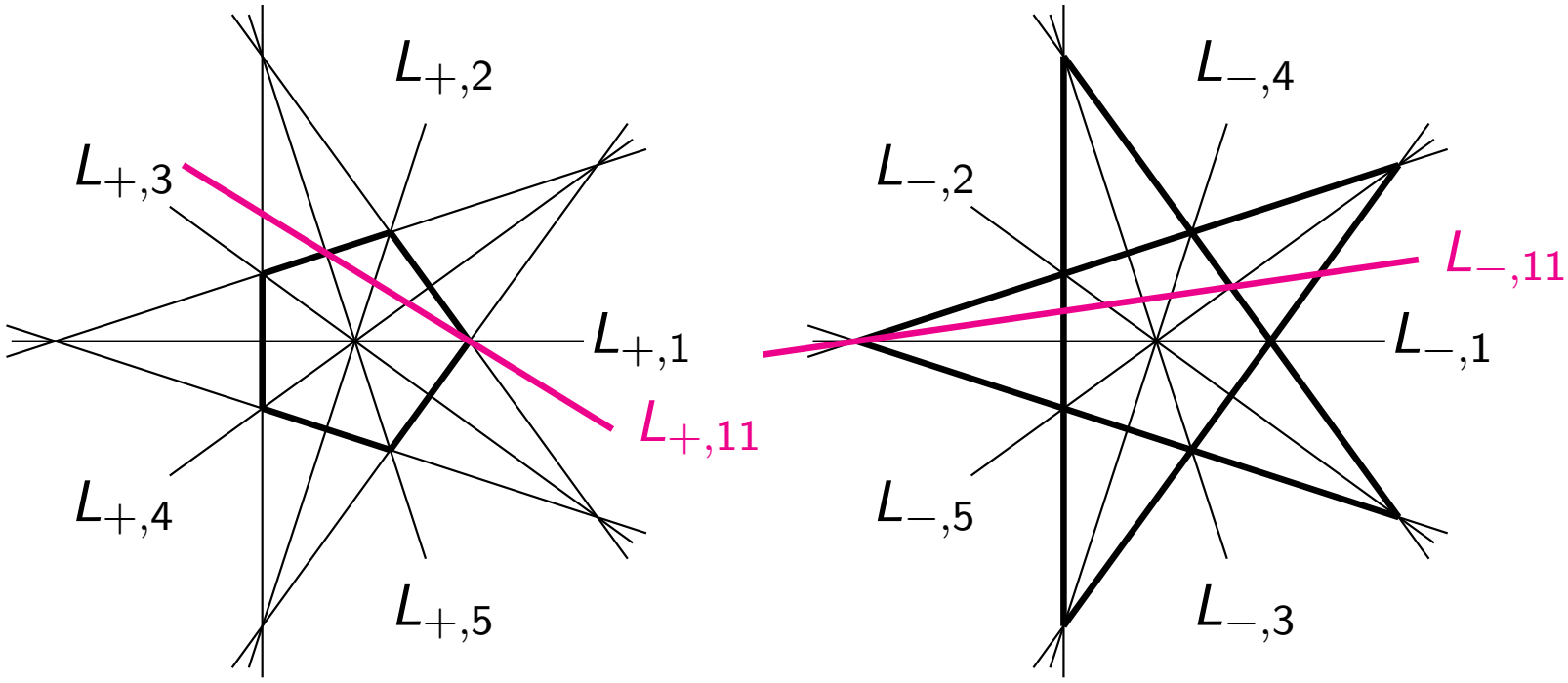
- $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cuerpo mínimo de definición de este patrón

Pentágono y pentagrama



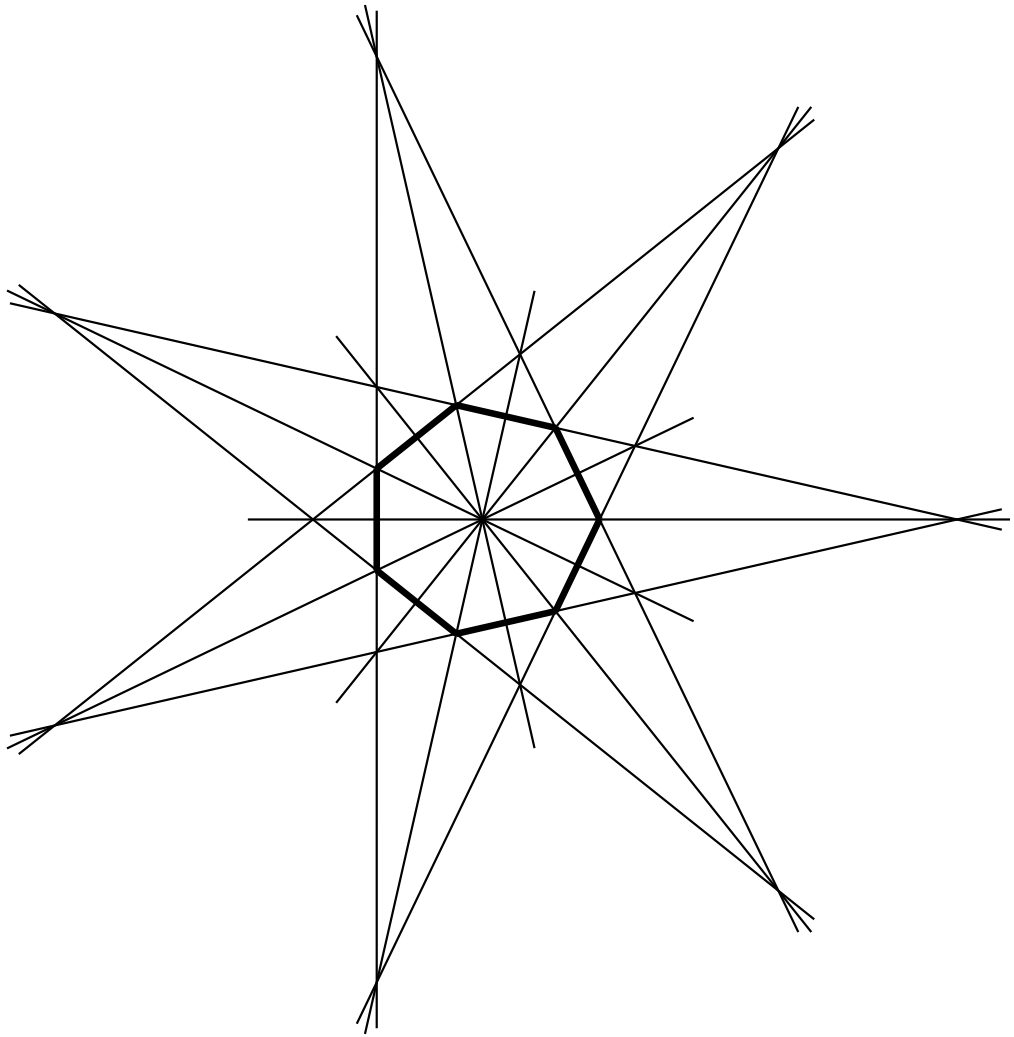
- $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cuerpo mínimo de definición de este patrón
- $L_{i,+} \mapsto L_{i,-}$ via $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$.

Pentágono y pentagrama

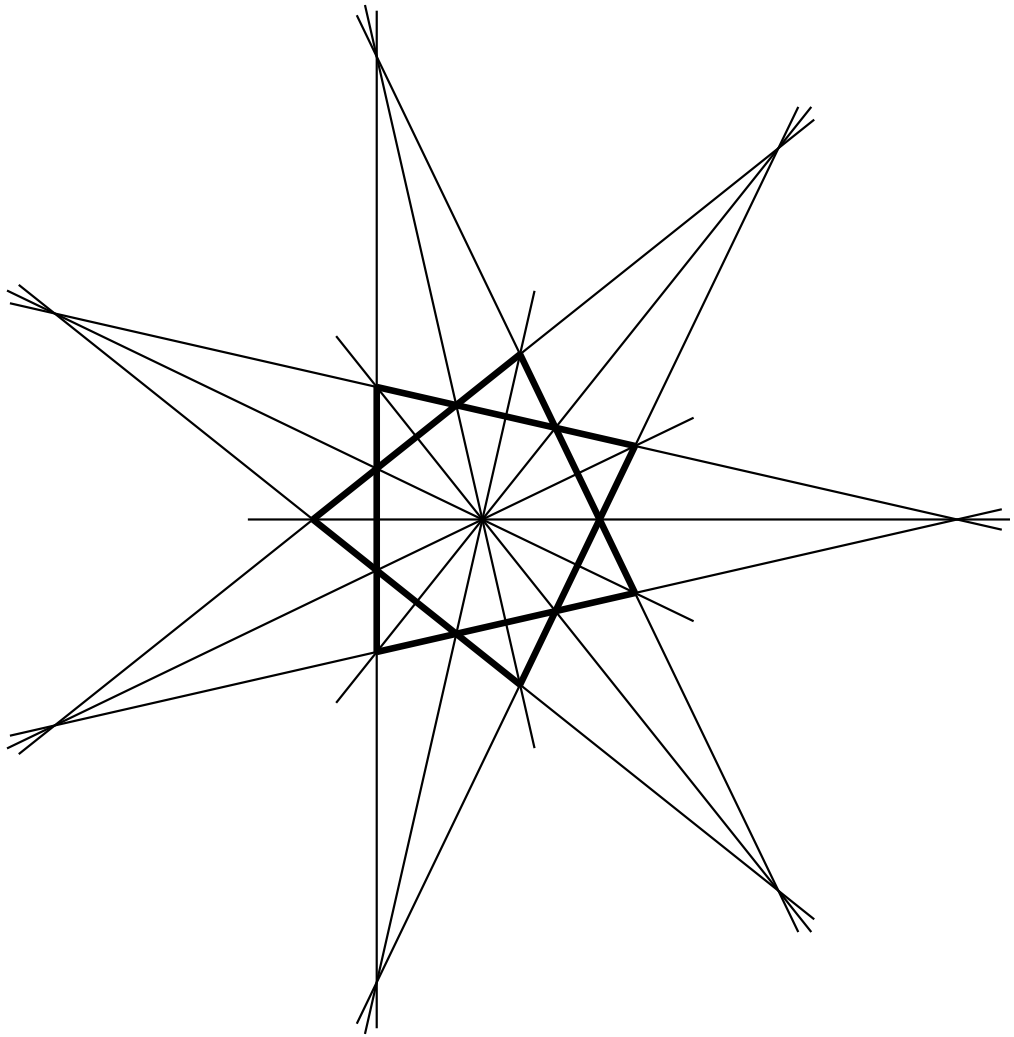


- $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cuerpo mínimo de definición de este patrón
- $L_{i,+} \mapsto L_{i,-}$ via $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$.
- En $\mathbb{CP}^2$ es imposible deformar la primera en la segunda (A_-Carmona-Cogolludo-Marco)

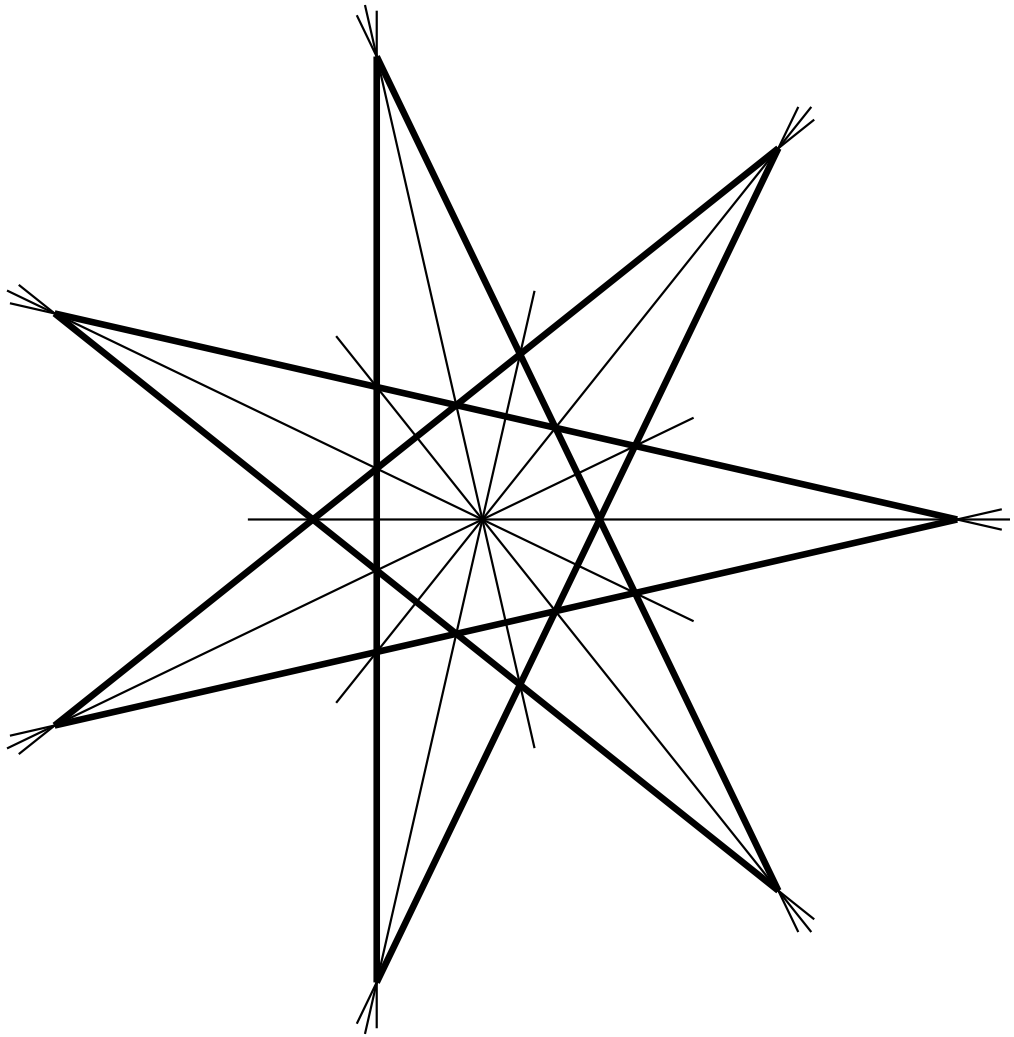
Más polígonos regulares



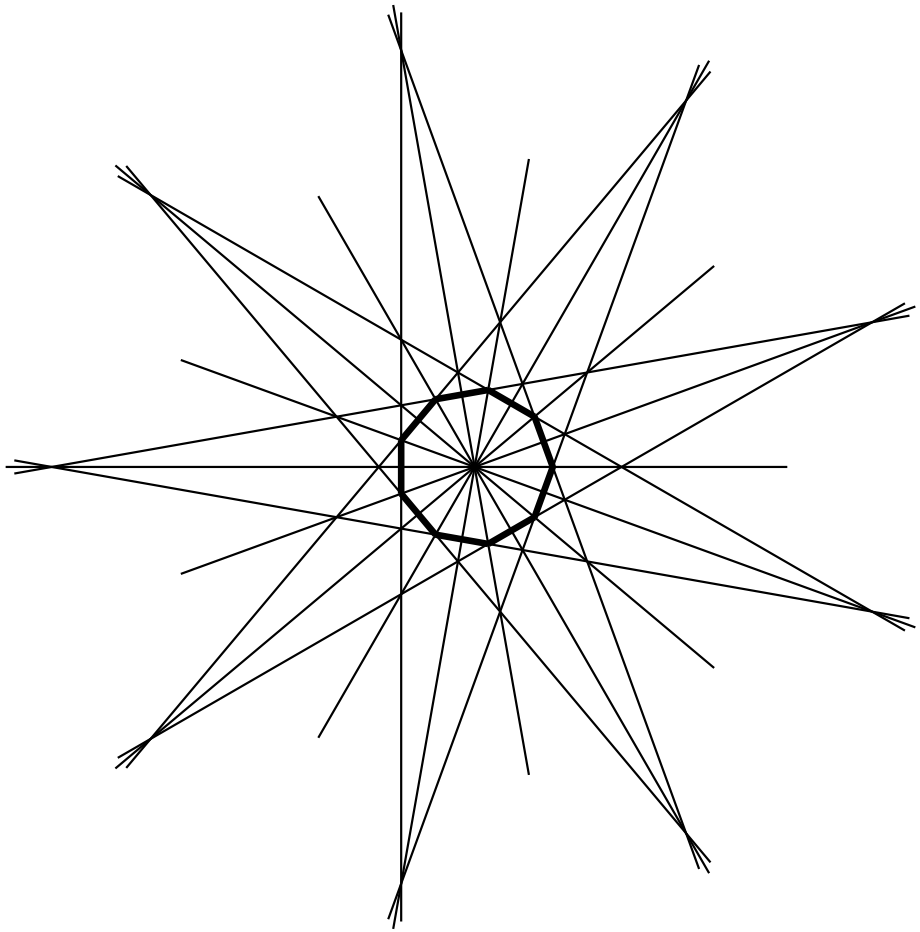
Más polígonos regulares



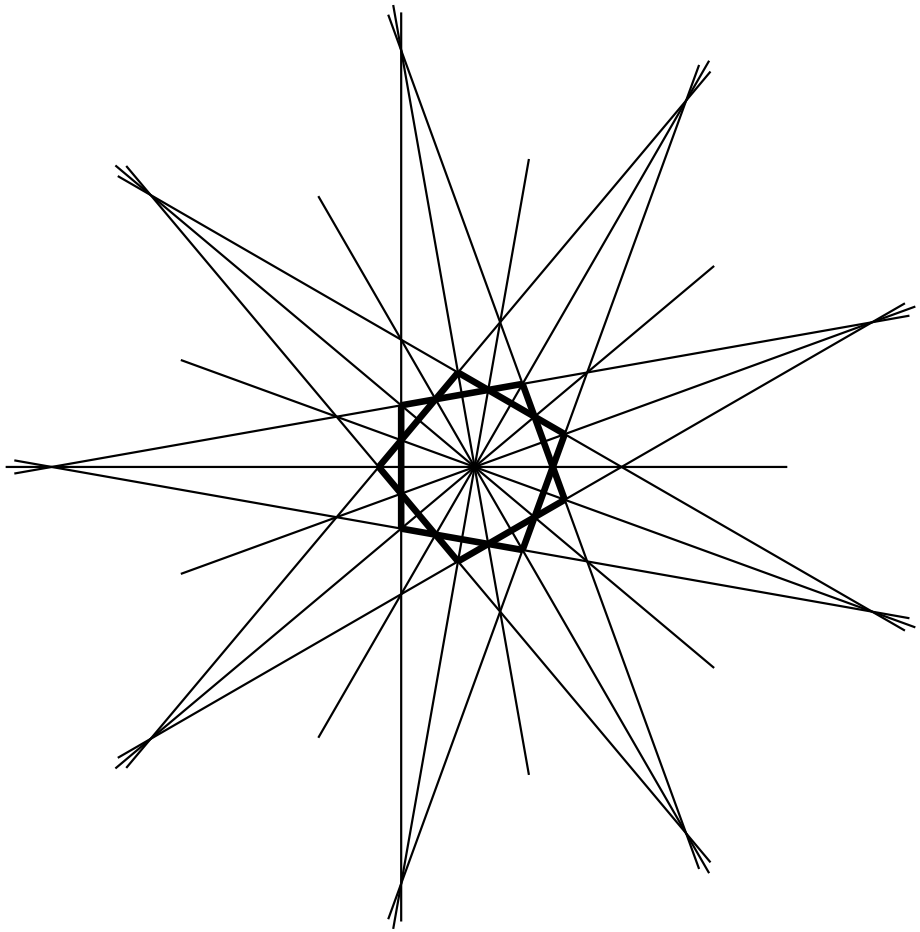
Más polígonos regulares



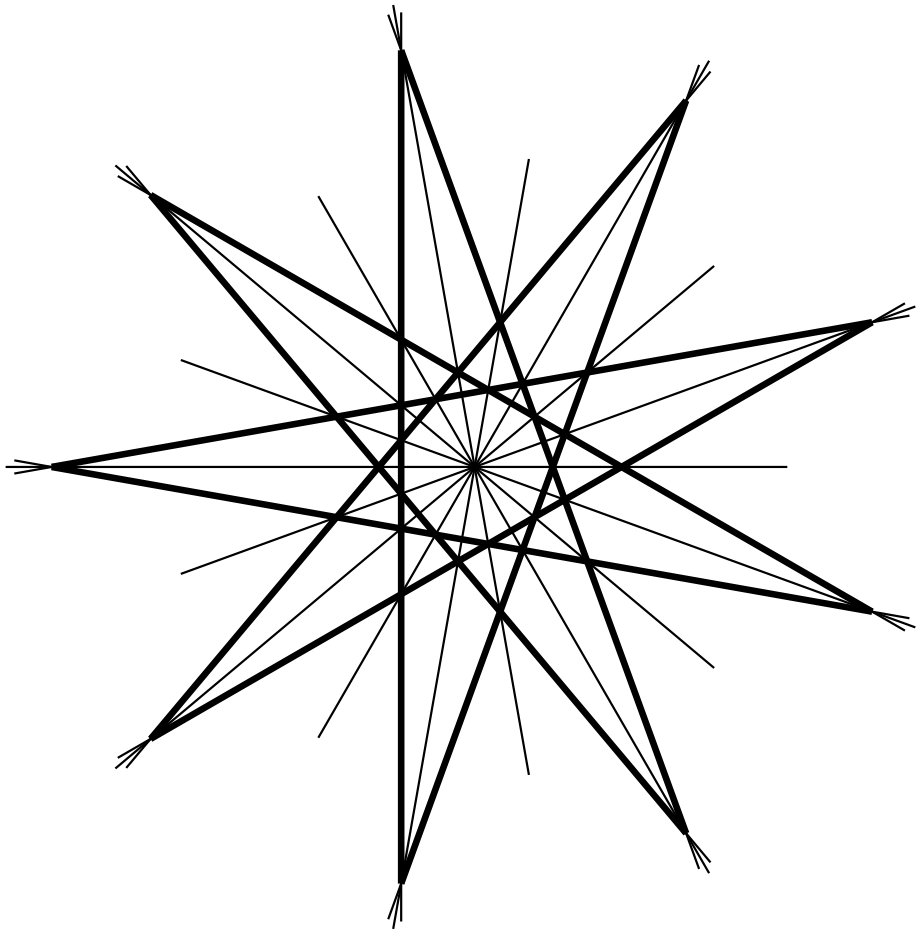
Y más



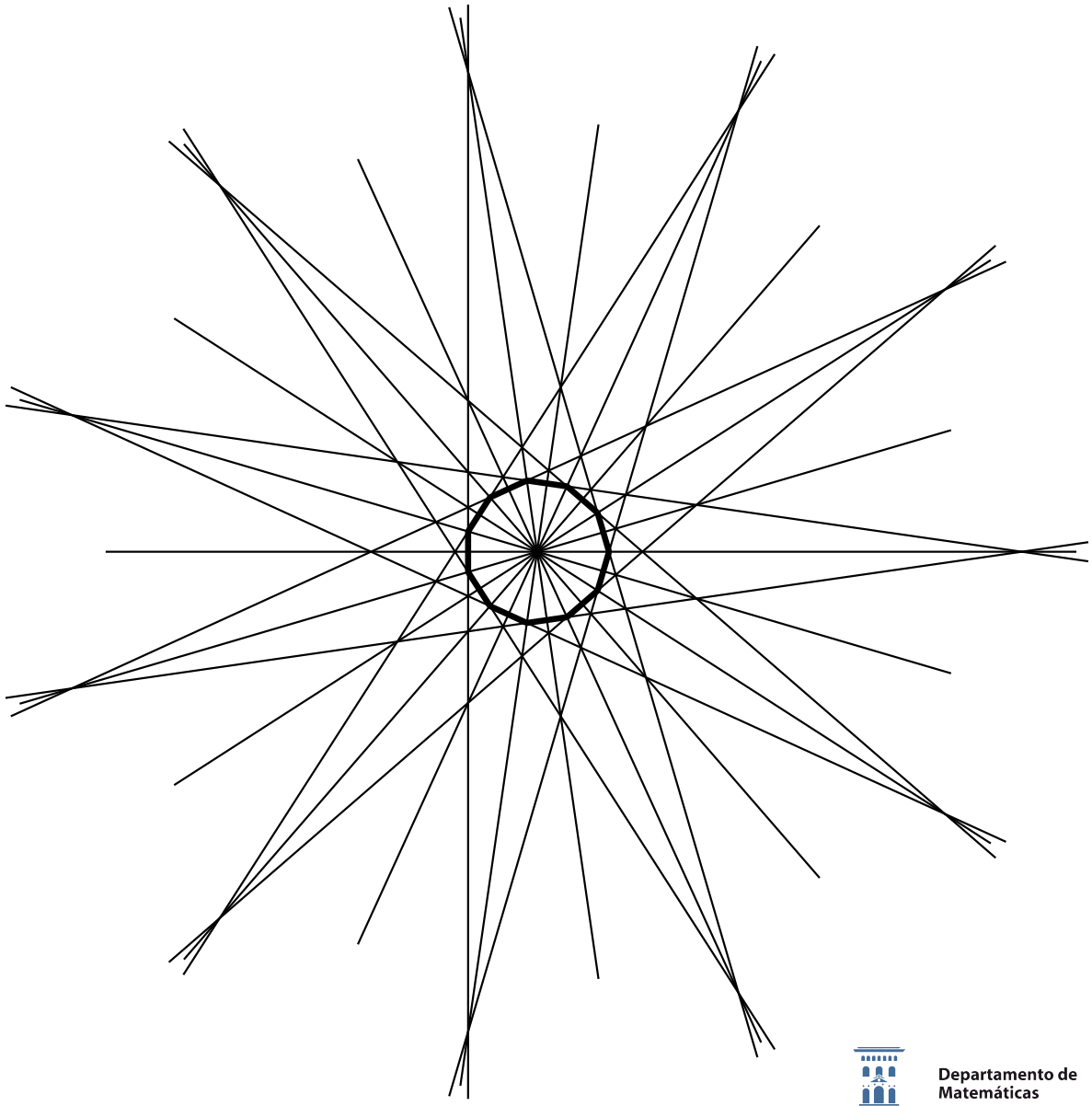
Y más



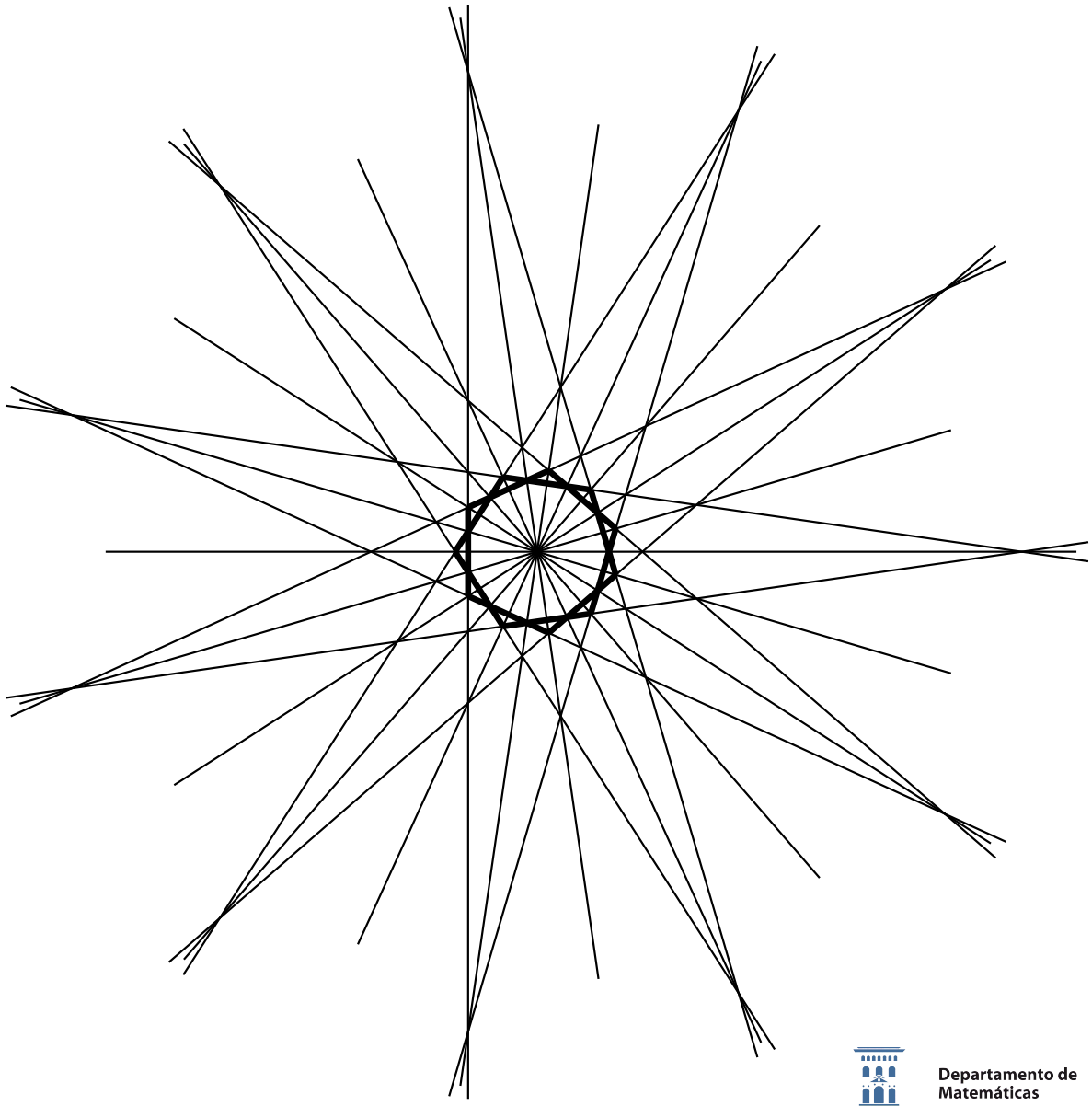
Y más



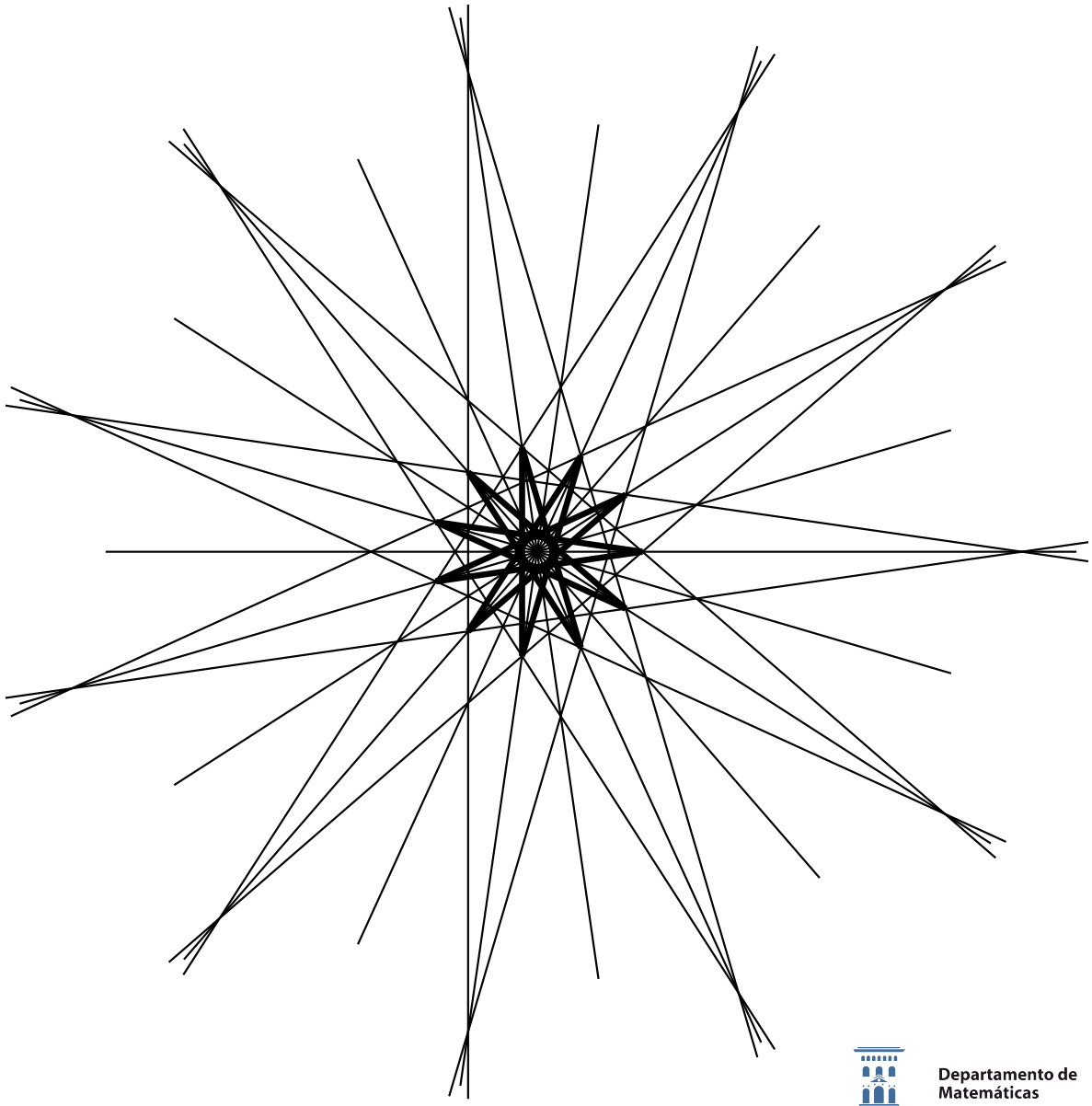
Con 11 ya basta



Con 11 ya basta

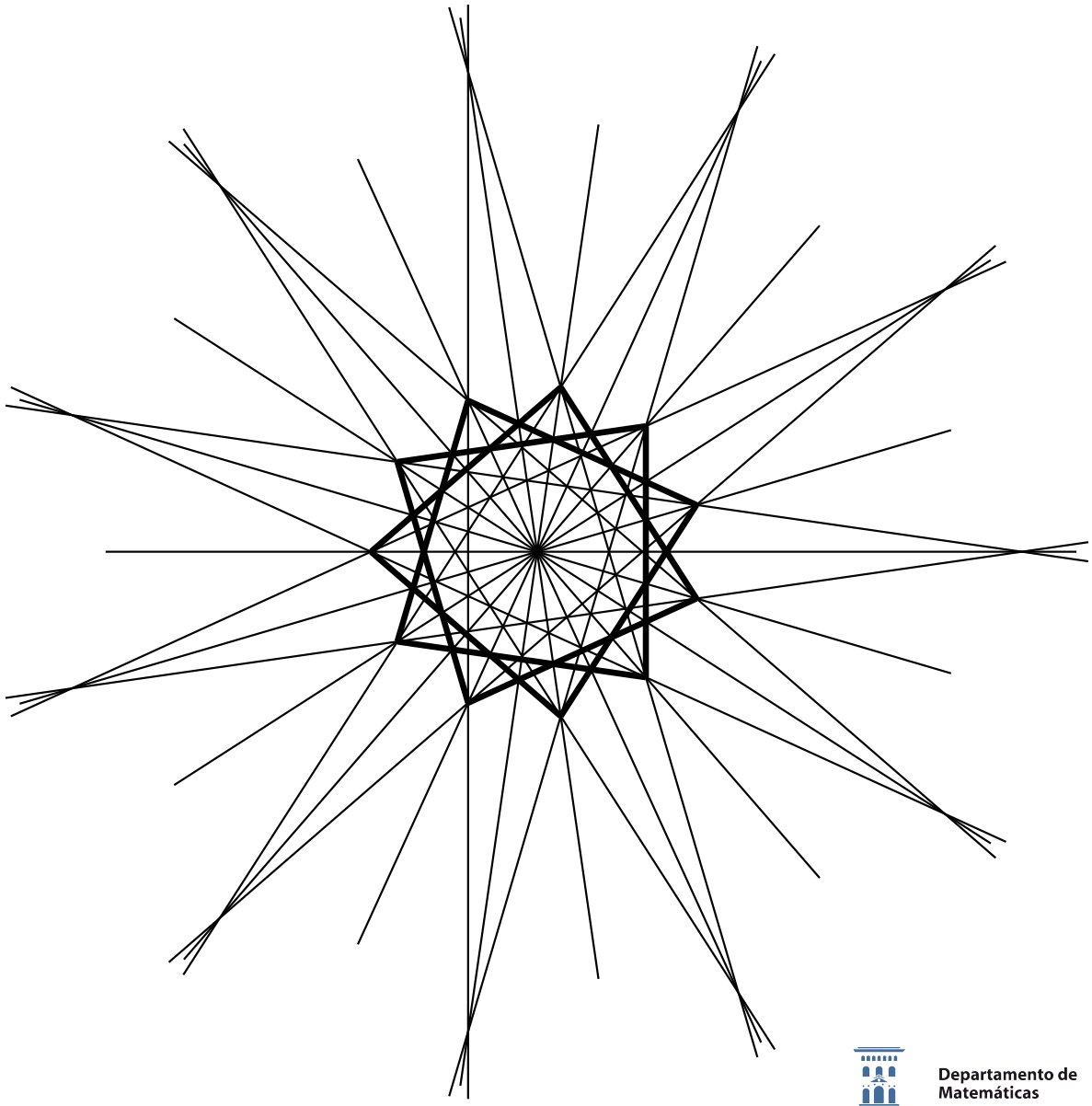


Con 11 ya basta

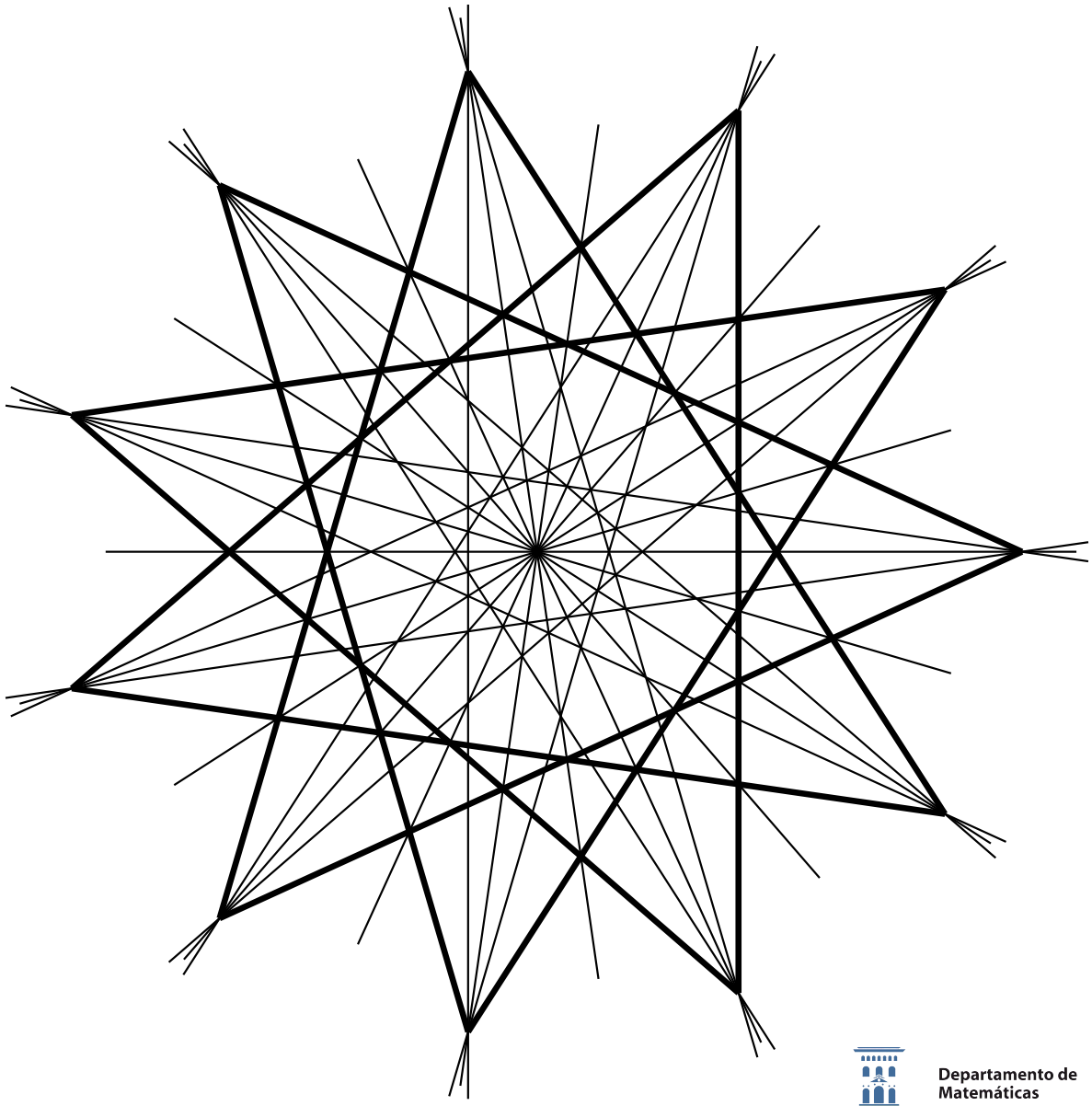


Departamento de Matemáticas
Universidad Zaragoza

Con 11 ya basta



Con 11 ya basta



¡Muchas gracias por su atención!