

Una corta introducción a la teoría de las
funciones zeta de Igusa

Edwin León-Cardenal

Capítulo 1

Introducción

En estas notas presentamos una introducción a la teoría de las funciones zeta locales desde cero. Supondremos únicamente conocimientos básicos de álgebra, espacios métricos y análisis elemental, en particular teoría de la medida.

Sea $\mathbb{K}$ un campo local, por ejemplo $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$, el campo de los números p -ádicos, o $\mathbb{F}_p((t))$, el campo de series formales de Laurent con coeficientes en un campo finito con p elementos. Sea $h(x) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no constante y sea φ una función de prueba. La función zeta local asociada al par (h, φ) se define como

$$Z_\varphi(s, h) = \int_{\mathbb{K}^n \setminus h^{-1}(0)} \varphi(x) |h(x)|_{\mathbb{K}}^s d^n x, \quad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

donde $|\cdot|_{\mathbb{K}}$ denota el valor absoluto en $\mathbb{K}$, $s \in \mathbb{C}$, y $d^n x$ es una medida de Haar normalizada del grupo topológico $(\mathbb{K}^n, +)$. Estas integrales definen funciones holomorfas en la variable s en el semiplano $\operatorname{Re}(s) > 0$. Si $\mathbb{K}$ tiene característica cero, entonces $Z_\varphi(s, h)$ admite una continuación meromorfa a todo el plano complejo.

Las funciones zeta locales p -ádicas (también llamadas funciones zeta locales de Igusa) están relacionadas con el número de soluciones de congruencias polinomiales mód p^m y con sumas exponenciales mód p^m , véase por ejemplo [14, 30, 33].

En el caso arquimediano, es decir, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el estudio de las funciones zeta locales fue iniciado por Gel'fand y Shilov [21]. La continuación meromorfa de estas funciones fue establecida, de manera independiente, por Atiyah [4] y Bernstein [6], véase también [33, Theorem 5.5.1 and Corollary 5.5.1]. La motivación principal era que dicha continuación meromorfa implica la existencia de soluciones fundamentales (es decir, funciones de Green) para operadores diferenciales con coeficientes constantes.

Es importante mencionar que, en el contexto p -ádico, la existencia de soluciones fundamentales para operadores pseudodiferenciales también es consecuencia

de que las funciones zeta locales de Igusa admiten continuación meromorfa; véase [35, Chapter 10] y [68, Chapter 5].

Por otro lado, a mediados de los años 60, Weil inició el estudio de las funciones zeta locales, tanto en el caso arquimediano como en el no arquimediano, en conexión con la fórmula de Poisson-Siegel [63]. En los años 70, Igusa desarrolló una teoría uniforme para funciones zeta locales sobre campos locales de característica cero [30], [32]. Más recientemente, Denef y Loeser introdujeron en [15] las funciones zeta topológicas, y en [16] las funciones zeta motivicas, las cuales constituyen una vasta generalización de las funciones zeta locales p -ádicas.

En los últimos treinta y cinco años ha habido un gran interés en modelos p -ádicos de teoría cuántica de campos, motivado en parte por el hecho de que estos modelos son exactamente resolubles. Existe una amplia variedad de amplitudes de Feynman y de cuerdas de tipo p -ádico que están relacionadas con funciones zeta locales del tipo de Igusa. Es interesante mencionar que, al parecer, la comunidad matemática que trabaja en funciones zeta locales no siempre está al tanto de estas conexiones; véase por ejemplo [2, 5, 7], [10]-[13], [18]-[20], [29, 42, 43, 46], [52]-[55] y las referencias ahí incluidas.

Las conexiones entre amplitudes de Feynman y funciones zeta locales son profundas y de larga data. Por ejemplo, los trabajos de Speer [54] y de Bollini, Giambiagi y González Domínguez [11] sobre regularización de amplitudes de Feynman se basan en la continuación analítica de distribuciones asociadas a potencias complejas de funciones polinomiales en el sentido de Gel'fand y Shilov [21]; véase también [5, 7, 10] y [46], entre otros. Esta analogía resulta ser muy importante en la construcción rigurosa de campos cuánticos escalares en el contexto p -ádico; véase [47] y las referencias ahí citadas.

Las funciones zeta locales también están profundamente relacionadas con las amplitudes de cuerdas p -ádicas. En [8], los autores demostraron que las amplitudes de tipo Koba-Nielsen en el contexto p -ádico pueden interpretarse como integrales bien definidas. A estas amplitudes les asocian integrales del tipo de Igusa que dependen de varios parámetros complejos, y prueban que dichas integrales admiten continuación meromorfa como funciones racionales. Posteriormente, estas funciones se utilizan para regularizar las amplitudes de Koba-Nielsen.

En [9], los autores estudian el límite cuando $p \rightarrow 1$ de ciertas amplitudes de cuerdas abiertas p -ádicas a nivel árbol, así como su relación con las funciones zeta topológicas. Existe evidencia empírica de que las cuerdas p -ádicas están relacionadas con las cuerdas clásicas en el límite $p \rightarrow 1$. Denef y Loeser establecieron que el límite $p \rightarrow 1$ de una función zeta local de Igusa da lugar a un objeto conocido como función zeta topológica. Usando esta teoría, en [9] se muestra que dicho límite produce ciertas amplitudes, a las cuales se les denomina amplitudes de cuerdas de Denef-Loeser.

Finalmente, vale la pena mencionar la notable conexión entre funciones zeta locales y estadística algebraica; véase [44, 62]. En [62] se presenta además una interesante relación con el aprendizaje automático.

Estas notas están basadas principalmente en el artículo [40], que a su vez usa el contenido clásico de las primeras secciones del libro de Igusa [33]. La organización es la siguiente: en la Sección 2 introducimos los números p -ádicos, y en la Sección 3 desarrollamos la teoría de integración sobre $\mathbb{Q}_p$. La Sección 4 está dedicada a los teoremas de la función implícita en el contexto p -ádico. En la Sección 5 introducimos el tipo más sencillo de función zeta local y su relación con el número de soluciones de congruencias polinomiales mód p^m . En la Sección 5.1 presentamos la fórmula de fase estacionaria y la utilizamos para establecer la racionalidad de estas funciones en varios casos. Finalmente, en las Secciones 6.2 y 6.3 usamos el teorema de resolución de singularidades de Hironaka para demostrar nuevamente dicha racionalidad.

Para una introducción al análisis p -ádico, el lector puede consultar [1, 26, 34, 38, 50, 51, 57, 60]. Para un estudio más profundo de las funciones zeta locales, recomendamos [3, 14, 21, 30, 32, 33]. Existen además excelentes artículos de survey sobre el tema y sus generalizaciones; véase por ejemplo [14, 16, 17, 48, 49, 59]. Para el caso de espacios vectoriales prehomogéneos, se puede consultar [32, 33, 36]. Finalmente, para las conexiones con física matemática y análisis p -ádico, véase [12, 13, 19, 20, 29, 35], [41]-[43], [47, 52, 53, 58, 60, 61, 68].

Capítulo 2

Números p -ádicos: hechos básicos

2.1. Primeras definiciones

En esta sección resumimos los aspectos fundamentales del campo de los números p -ádicos. Para una exposición más detallada, el lector puede consultar [1, 26, 34, 38, 50, 51, 57] y [60].

Definición 1. Sea F un campo. Un **valor absoluto** en F es una función con valores reales $|\cdot|$ que satisface:

$$(i) \quad |x| = 0 \text{ si y solo si } x = 0;$$

$$(ii) \quad |xy| = |x| |y|;$$

$$(iii) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (desigualdad triangular), para todo } x, y \in F.$$

Definición 2. Un valor absoluto $|\cdot|$ se llama **no arquimadiano** (o ultramétrico) si satisface

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Ejemplo 1. El valor absoluto trivial se define como

$$|x|_{\text{trivial}} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

A partir de ahora trabajaremos únicamente con valores absolutos no triviales.

Definición 3. Sean $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ dos valores absolutos definidos en F . Decimos que son **equivalentes** si existe una constante positiva c tal que

$$|x|_1 = |x|_2^c$$

para todo $x \in F$.

Definición 4. Sea p un número primo fijo y sea x un número racional distinto de cero. Entonces x puede escribirse como $x = p^k \frac{a}{b}$, con $p \nmid ab$ y $k \in \mathbb{Z}$. El **valor absoluto p -ádico** de x se define como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-k}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Lema 1. La función $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano en $\mathbb{Q}$.

La demostración se deja como ejercicio. De hecho, invitamos al lector a demostrar todos los resultados etiquetados como lemas en estas notas.

Teorema 1 (Ostrowski, [38]). *Todo valor absoluto no trivial en $\mathbb{Q}$ es equivalente a $|\cdot|_p$ o al valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$.*

Un valor absoluto $|\cdot|$ en F nos permite definir una distancia

$$d(x, y) := |x - y|, \quad x, y \in F.$$

Esto induce una topología en F cuya base está formada por las *bolas abiertas*

$$B_r(a) = \{x \in F : |x - a| < r\},$$

donde $a \in F$ y $r > 0$.

Una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset F$ se dice de *Cauchy* si

$$|x_m - x_n| \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Decimos que F es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge en F , es decir, existe $x^* \in F$ tal que

$$|x_n - x^*| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Esto es equivalente a que (F, d) sea un *espacio métrico completo*.

Observación 1. Sean (X, d) y (Y, D) espacios métricos. Una biyección $\rho : X \rightarrow Y$ tal que

$$D(\rho(x), \rho(x')) = d(x, x')$$

se llama una *isometría*.

El siguiente resultado es clásico, véase por ejemplo [39].

Teorema 2. *Todo espacio métrico (M, d) puede completarse, es decir, existe un espacio métrico completo $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ tal que M es isométrico a un subconjunto denso de $\widetilde{M}$.*

Definición 5. El campo de los números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$ se define como la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a la distancia inducida por $|\cdot|_p$.

Todo número p -ádico $x \neq 0$ puede escribirse de manera única como

$$x = p^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \quad (2.1)$$

donde $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ y $x_0 \neq 0$. El entero γ se llama el *orden p -ádico* de x y se denota por $\text{ord}(x)$. Por convención, $\text{ord}(0) = +\infty$.

Lema 2. Sea $(F, |\cdot|)$ un campo valuado con un valor absoluto no arquimediano. Si F es completo, entonces la serie $\sum_{k \geq 0} a_k$ converge si y solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$.

Dado que $|x_i p^{i+r}|_p = p^{-i-r} \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$, por el Lema 2 concluimos que la serie (2.1) converge.

Ejemplo 2.

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots$$

En efecto, si definimos

$$\begin{aligned} z^{(n)} &:= (p-1) + (p-1)p + \dots + (p-1)p^n \\ &= (p-1) \frac{p^{n+1} - 1}{p-1} = p^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = -1,$$

ya que $|p^{n+1}|_p = p^{-n-1} \rightarrow 0$.

La bola unidad

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &= \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{i=i_0}^{\infty} x_i p^i, i_0 \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

es un anillo; de hecho, es un dominio de ideales principales.

Todo ideal de $\mathbb{Z}_p$ es de la forma

$$p^m \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : x = \sum_{i \geq m} x_i p^i \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Geométricamente, los ideales $p^m \mathbb{Z}_p$ forman un sistema fundamental de vecindades del origen en $\mathbb{Q}_p$.

El *campo residual* de $\mathbb{Q}_p$ es

$$\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p.$$

El *grupo de unidades* de $\mathbb{Z}_p$ es

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}.$$

Lema 3. Un elemento $x = x_0 + x_1p + \cdots \in \mathbb{Z}_p$ es unidad si y solo si $x_0 \neq 0$. Además, si $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, entonces

$$x = p^m u, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathbb{Z}_p^\times.$$

Ejercicio 1. Sea $x, y \in \mathbb{Q}_p$ tales que $|x|_p \neq |y|_p$. Demuestra que

$$|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Ejercicio 2. Escribe los siguientes números como series p -ádicas:

(i) $-p$

(ii) $\frac{1}{1-p}$

Ejercicio 3. Determina si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{Q}_p$:

(i) $x_n = p^n$

(ii) $x_n = \sum_{k=0}^n p^k$

En caso afirmativo, encuentra su límite.

2.2. Topología de $\mathbb{Q}_p$

Como ya mencionamos, $\mathbb{Q}_p$ con la distancia $d(x, y) = |x - y|_p$ es un espacio métrico completo. Definimos

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^r\}, \quad r \in \mathbb{Z},$$

como la *bola con centro a y radio p^r* , y

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^r\}, \quad r \in \mathbb{Z}$$

como la *esfera con centro a y radio p^r* .

La topología de $\mathbb{Q}_p$ es bastante distinta de la topología usual de $\mathbb{R}$. En primer lugar, como $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \{p^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, los radios siempre son potencias enteras de p . Por simplicidad, usamos directamente el exponente en la notación $B_r(a)$ y $S_r(a)$.

Por otro lado, dado que las potencias de p (junto con el cero) forman un conjunto discreto en $\mathbb{R}$, en la definición de bolas y esferas podemos usar siempre la desigualdad ' $\leq$ '. De hecho,

$$\{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{r-1}\} = B_{r-1}(a) \subset B_r(a).$$

Observación 2.

$$B_r(a) = a + p^r \mathbb{Z}_p,$$

$$S_r(a) = a + p^r \mathbb{Z}_p^\times.$$

Declaramos que los conjuntos $B_r(a)$, con $r \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{Q}_p$, son abiertos. Además, estos conjuntos forman una base para la topología de $\mathbb{Q}_p$.

Proposición 1. *Los conjuntos $S_r(a)$ y $B_r(a)$ son abiertos y cerrados en la topología de $\mathbb{Q}_p$.*

Demostración. Primero mostramos que $S_r(a)$ es abierto. Observemos que $\mathbb{Z}_p^\times = \sqcup_{i \in \{1, \dots, p-1\}} i + p\mathbb{Z}_p$, entonces

$$S_r(a) = \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, p-1\}} a + p^r i + p^{r+1}\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_i B_{r+1}(a + p^r i),$$

lo cual muestra que es abierto.

Ahora probamos que $S_r(a)$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $S_r(a)$ que converge a $\widetilde{x_0} \in \mathbb{Q}_p$. Debemos verificar que $\widetilde{x_0} \in S_r(a)$.

Notemos que $x_n = a + p^r u_n$ con $u_n \in \mathbb{Z}_p^\times$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, se cumple

$$|x_n - x_m|_p = p^{-r} |u_n - u_m|_p \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$. Entonces $\{u_n\}$ también es de Cauchy, y como $\mathbb{Q}_p$ es completo, existe $\widetilde{u_0}$ tal que $u_n \rightarrow \widetilde{u_0}$.

De aquí, $x_n \rightarrow a + p^r \widetilde{u_0}$, así que para concluir, debemos verificar que $\widetilde{u_0} \in \mathbb{Z}_p^\times$. Dado que los u_n están arbitrariamente cerca de $\widetilde{u_0}$, sus expansiones p -ádicas coinciden en suficientes términos iniciales, lo que implica que $\widetilde{u_0}$ también es una unidad. Por lo tanto, $\widetilde{x_0} \in S_r(a)$.

Un argumento similar muestra que $B_r(a)$ es cerrado. $\square$

Proposición 2. *Si $b \in B_r(a)$, entonces $B_r(b) = B_r(a)$; es decir, cualquier punto de la bola $B_r(a)$ puede considerarse como su centro.*

Demostración. Sea $x \in B_r(b)$. Entonces

$$\|x - a\|_{\{p\}} = \|x - b + b - a\|_{\{p\}} \leq \max\{\|x - b\|_{\{p\}}, \|b - a\|_{\{p\}}\} \leq p^{\{r\}}$$

por lo que $B_r(b) \subseteq B_r(a)$.

Como $a \in B_r(b)$, se puede repetir el argumento anterior para obtener la inclusión opuesta, y por lo tanto $B_r(a) = B_r(b)$. $\square$

Lema 4. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) *cualesquiera dos bolas en $\mathbb{Q}_p$ o bien son disjuntas, o bien una está contenida en la otra;*
- (ii) *la frontera de cualquier bola es el conjunto vacío.*

Teorema 3. *[1, Sec. 1.8] Un conjunto $K \subset \mathbb{Q}_p$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Ejercicio 4. *Sea $a \in \mathbb{Q}_p$ y $r \in \mathbb{Z}$. Demuestra que si $b \in B_r(a)$, entonces*

$$B_r(a) = B_r(b).$$

Ejercicio 5. *Demuestra que dos bolas en $\mathbb{Q}_p$ o bien son disjuntas o bien una está contenida en la otra.*

2.3. El espacio p -ádico n -dimensional

Extendemos la norma p -ádica a $\mathbb{Q}_p^n$ definiendo

$$\|x\|_p := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p, \quad \text{para } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Definimos además

$$\text{ord}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \{\text{ord}(x_i)\},$$

de modo que $\|x\|_p = p^{-\text{ord}(x)}$.

El espacio métrico $(\mathbb{Q}_p^n, \|\cdot\|_p)$ es un espacio ultramétrico completo y separable (aquí, separable significa que $\mathbb{Q}_p^n$ contiene un subconjunto denso numerable, que en este caso es $\mathbb{Q}^n$).

Para $r \in \mathbb{Z}$, definimos

$$B_r^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \|x - a\|_p \leq p^r\}$$

como la *bola de radio p^r con centro en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$* , y escribimos $B_r^n(0) := B_r^n$.

Ejemplo 3. Sea $a = (1, p) \in \mathbb{Q}_p^2$. Entonces la bola

$$B_1^2(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^2 : \|x - a\|_p \leq p\}$$

consiste de todos los puntos $x = (x_1, x_2)$ tales que

$$\max\{|x_1 - 1|_p, |x_2 - p|_p\} \leq p.$$

Observemos que

$$B_r^n(a) = B_r(a_1) \times \dots \times B_r(a_n),$$

donde

$$B_r(a_i) = \{x_i \in \mathbb{Q}_p : |x_i - a_i|_p \leq p^r\}$$

es la bola unidimensional de radio p^r con centro en $a_i \in \mathbb{Q}_p$.

En particular, la bola B_0^n coincide con el producto de n copias de

$$B_0 = \mathbb{Z}_p.$$

De manera análoga, definimos

$$S_r^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \|x - a\|_p = p^r\}$$

como la *esfera de radio p^r con centro en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$* , y escribimos $S_r^n(0) := S_r^n$.

Notemos que $S_0^1 = \mathbb{Z}_p^\times$ (el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$), pero

$$(\mathbb{Z}_p^\times)^n \subsetneq S_0^n.$$

Ejemplo 4. Consideremos la esfera S_0^2 . Entonces

$$S_0^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_p^2 : \max(|x_1|_p, |x_2|_p) = 1\}.$$

Notemos que $(1, 0) \in S_0^2$, pero $(1, 0) \notin (\mathbb{Z}_p^\times)^2$, lo que muestra que

$$(\mathbb{Z}_p^\times)^2 \subsetneq S_0^2.$$

Como espacio topológico, $(\mathbb{Q}_p^n, \|\cdot\|_p)$ es totalmente desconexo; es decir, los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}_p^n$ son el conjunto vacío y los puntos.

Además, cualesquiera dos bolas en $\mathbb{Q}_p^n$ o bien son disjuntas, o bien una está contenida en la otra.

Al igual que en el caso unidimensional, un subconjunto de $\mathbb{Q}_p^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Dado que las bolas y las esferas son simultáneamente conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbb{Q}_p^n$, se concluye que

$$(\mathbb{Q}_p^n, \|\cdot\|_p)$$

es un espacio topológico localmente compacto.

Ejercicio 6. Demuestra que $\mathbb{Q}_p^n$ es totalmente desconexo, es decir, que sus únicos subconjuntos conexos son los puntos y el conjunto vacío.

Ejercicio 7. Sea $K \subset \mathbb{Q}_p^n$. Demuestra que K es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Capítulo 3

Integración en $\mathbb{Q}_p$

En esta sección asumimos conocimientos básicos de teoría de la medida, ver por ejemplo [27].

Teorema 4. [27, Thm B. Sec. 58] Sea $(G, \cdot)$ un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una medida de Borel dx , única salvo multiplicación por una constante positiva, tal que $\int_U dx > 0$ para todo conjunto abierto de Borel no vacío U , y además

$$\int_{x \cdot E} dx = \int_E dx,$$

para todo conjunto de Borel E .

La medida dx se llama una *medida de Haar* en G . Como $(\mathbb{Q}_p, +)$ es un grupo topológico localmente compacto, por el Teorema 4 existe una medida dx que es invariante por traslaciones, es decir, $d(x + a) = dx$.

Si normalizamos esta medida mediante la condición

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1,$$

entonces dx queda completamente determinada.

Para el caso n -dimensional, utilizamos que $(\mathbb{Q}_p^n, +)$ también es un grupo topológico localmente compacto. Denotamos por $d^n x$ la medida producto $dx_1 \cdots dx_n$, normalizada de modo que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = 1.$$

Esta medida también es invariante por traslaciones, es decir,

$$d^n(x + a) = d^n x, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Las bolas abiertas y compactas de $\mathbb{Q}_p^n$, por ejemplo conjuntos de la forma $a + p^m \mathbb{Z}_p^n$, generan la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{Q}_p^n$.

La medida $d^n x$ asigna a cada subconjunto abierto compacto U un número real no negativo $\int_U d^n x$, y satisface

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k} d^n x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{U_k} d^n x, \quad (3.1)$$

para cualquier familia de subconjuntos abiertos compactos U_k disjuntos dos a dos, tales que $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ sigue siendo compacto.

Además,

$$\int_{a+U} d^n x = \int_U d^n x.$$

3.1. Integración de funciones localmente constantes

Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *localmente constante* si para todo $x \in \mathbb{Q}_p^n$ existe un conjunto abierto compacto U que contiene a x tal que $\varphi(x) = \varphi(u)$ para todo $u \in U$.

Lema 5. *Toda función localmente constante es continua.*

Observación 3. *Sea $I = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Entonces I es numerable. Fijamos un sistema de representantes de la forma*

$$x_{-m} p^{-m} + \cdots + x_{-1} p^{-1}.$$

Si V es un subconjunto abierto de $\mathbb{Q}_p$, entonces para cualquier $x \in V$ existe una bola contenida en V de la forma

$$p^m(j + \mathbb{Z}_p^n),$$

para algún $j \in I^n$ y $m \in \mathbb{Z}$, que contiene a x .

En consecuencia, $\mathbb{Q}_p^n$ es un espacio de segunda numerabilidad.

Toda función localmente constante $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ puede escribirse como combinación lineal de funciones características:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{U_k}(x), \quad (3.2)$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ y

$$1_{U_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in U_k, \\ 0, & \text{si } x \notin U_k, \end{cases}$$

y cada $U_k \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ es abierto compacto.

Sea φ como en (3.2) y supongamos que $A = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$, con U_i abiertos compactos. Definimos

$$\int_A \varphi(x) d^n x = c_1 \int_{U_1} d^n x + \cdots + c_k \int_{U_k} d^n x. \quad (3.3)$$

Recordemos que el *soporte* de una función $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ se define como

$$\text{Supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{Q}_p^n : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Una función localmente constante con soporte compacto se llama una *función de prueba p -ádica* o una *función de Bruhat-Schwartz*. Estas funciones forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, que denotamos por $\mathcal{D}$.

De (3.1) y (3.3) se deduce que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(x) d^n x \end{aligned} \quad (3.4)$$

está bien definida y es lineal.

3.2. Integración de funciones continuas con soporte compacto

Ahora extendemos la integración a una clase más amplia de funciones. Sea U un subconjunto abierto compacto de $\mathbb{Q}_p^n$. Denotamos por $C(U, \mathbb{C})$ el espacio de todas las funciones continuas con valores complejos soportadas en U , dotado de la norma del supremo.

Denotamos por $C_0(\mathbb{Q}_p^n, \mathbb{C})$ el espacio de todas las funciones continuas con valores complejos que se anulan en el infinito, también con la norma del supremo. Decimos que una función φ se anula en el infinito si, dado $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto compacto K tal que $|\varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$.

Se sabe que $\mathcal{D}$ es denso en $C_0(\mathbb{Q}_p^n, \mathbb{C})$, ver por ejemplo [57, Prop. 1.3]. Identificamos $C(U, \mathbb{C})$ con un subespacio de $C_0(\mathbb{Q}_p^n, \mathbb{C})$, por lo que $\mathcal{D}$ es denso en $C(U, \mathbb{C})$.

Fijemos un subconjunto abierto compacto U y consideremos el funcional (3.4). Como

$$\left| \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(x) d^n x \right| \leq \sup_{x \in U} |\varphi(x)| \int_U d^n x,$$

se sigue que el funcional (3.4) admite una única extensión continua a $C(U, \mathbb{C})$.

Esto significa que si $f \in C(U, \mathbb{C})$ y $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}$ que converge a f en la norma del supremo, entonces

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) d^n x = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{Q}_p^n} f_m(x) d^n x.$$

3.3. Integrales impropias

Nuestro siguiente objetivo es integrar funciones que no tienen soporte compacto.

Una función $f : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *localmente integrable*, y escribimos $f \in L_{loc}^1$, si

$$\int_K f(x) d^n x$$

existe para todo subconjunto compacto K .

Ejemplo 5. La función $|x|_p$ es localmente integrable, pero no es integrable en todo $\mathbb{Q}_p$.

Definición 6 (Integral impropia). Una función $f \in L_{loc}^1$ se dice integrable en $\mathbb{Q}_p^n$ si

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{B_l(0)} f(x) d^n x = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{j=-\infty}^l \int_{S_j(0)} f(x) d^n x$$

existe.

En ese caso, el límite se denota por

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) d^n x,$$

y decimos que la integral impropia existe.

Obsérvese que

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) d^n x = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{S_j(0)} f(x) d^n x.$$

3.4. Fórmula de cambio de variable en dimensión uno

Comenzamos con la fórmula

$$d(ax) = |a|_p dx, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad (3.5)$$

la cual significa lo siguiente:

$$\int_{aU} dx = |a|_p \int_U dx,$$

para todo conjunto de Borel $U \subseteq \mathbb{Q}_p$, por ejemplo, un subconjunto compacto abierto.

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{Q}_p &\longrightarrow \mathbb{Q}_p \\ x &\longmapsto ax, \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Esta aplicación es un isomorfismo tanto algebraico como topológico.

Entonces la aplicación $aU \mapsto \int_{aU} dx$ define una medida de Haar en $(\mathbb{Q}_p, +)$. Por la unicidad de la medida de Haar, existe una constante positiva $C(a)$ tal que

$$\int_{aU} dx = C(a) \int_U dx.$$

Para calcular $C(a)$, basta tomar un conjunto compacto abierto conveniente, por ejemplo $U = \mathbb{Z}_p$, y demostrar que

$$\int_{a\mathbb{Z}_p} dx = C(a) = |a|_p.$$

Primero consideramos el caso $a \in \mathbb{Z}_p$, es decir, $a = p^l u$, con $l \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Fijamos un sistema de representantes $\{b\}$ de $\mathbb{Z}_p/p^l\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p$. Entonces

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{b \in \mathbb{Z}_p/p^l\mathbb{Z}_p} (b + p^l\mathbb{Z}_p),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{Z}_p} dx = \sum_b \int_{b+p^l\mathbb{Z}_p} dx \\ &= \sum_b \int_{p^l\mathbb{Z}_p} dx = \#(\mathbb{Z}_p/p^l\mathbb{Z}_p) \int_{p^l\mathbb{Z}_p} dx. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos

$$p^{-l} = |a|_p = \int_{p^l\mathbb{Z}_p} dx = \int_{a\mathbb{Z}_p} dx.$$

El caso $a \notin \mathbb{Z}_p$ se trata de manera similar.

Ahora, si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, donde U es un conjunto de Borel, entonces

$$\int_U f(x) dx = |a|_p \int_{a^{-1}U+b} f(ay+b) dy,$$

para cualesquiera $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ y $b \in \mathbb{Q}_p$.

Esta fórmula se obtiene haciendo el cambio de variable $x = ay + b$, de donde

$$dx = d(ay + b) = d(ay) = |a|_p dy,$$

ya que la medida de Haar es invariante por traslaciones.

Ejemplo 6. Sea $U = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Mostramos que

$$\int_U dx = \int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1.$$

Observa que U no es compacto, pues la sucesión $\{p^n\}$ converge a $0 \notin U$.
Usando la descomposición

$$\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigsqcup_{j=0}^{\infty} \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = p^{-j}\},$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{p^j \mathbb{Z}_p^\times} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} dy \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} dy \\ &= \frac{1}{1-p^{-1}} \left(\int_{\mathbb{Z}_p} dy - \int_{p\mathbb{Z}_p} dy \right) = 1. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ tiene medida de Haar igual a 1 y que $\{0\}$ tiene medida 0.

Ejemplo 7. Para todo $r \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{B_r(0)} dx = \int_{p^{-r}\mathbb{Z}_p} dx = p^r.$$

Ejemplo 8. Para todo $r \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{S_r(0)} dx = p^r - p^{r-1} = p^r(1 - p^{-1}).$$

Ejemplo 9. Definimos

$$Z(s) := \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \quad \operatorname{Re}(s) > -1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} \int_{|x|_p=p^{-j}} dx \\ &= (1 - p^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j(s+1)} \\ &= \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-1-s}}. \end{aligned}$$

Esto define una continuación meromorfa en todo $\mathbb{C}$, con un polo simple en $s = -1$.

Ejemplo 10. Si $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ es radial, es decir, $f(x) = f(|x|_p)$, entonces

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p) dx = (1 - p^{-1}) \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(p^j) p^j.$$

Ejemplo 11. Se tiene

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \ln(|x|_p) dx = -\frac{\ln p}{p-1}.$$

Ejemplo 12. Calculamos

$$Z(s, x^2 - 1) = \int_{\mathbb{Z}_p} |x^2 - 1|_p^s dx, \quad p \neq 2.$$

Se obtiene finalmente:

$$Z(s, x^2 - 1) = (p-2)p^{-1} + 2p^{-1-s} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}}.$$

Lema 6. Sea

$$q(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{e_i} \in \mathbb{Z}_p[x],$$

con α_i distintos módulo p . Entonces, usando los métodos anteriores, se puede calcular

$$Z(s, q(x)) = \int_{\mathbb{Z}_p} |q(x)|_p^s dx.$$

3.5. Cambio de variable (caso general)

Una función $h : U \rightarrow \mathbb{Q}_p$ se dice *analítica en un subconjunto abierto* $U \subseteq \mathbb{Q}_p$ si existe una serie de potencias convergente $\sum_i a_i x^i$ para $x \in \tilde{U} \subset U$, con $\tilde{U}$ abierto, tal que $h(x) = \sum_i a_i x^i$ para $x \in \tilde{U}$. En este caso,

$$h'(x) = \sum_i i a_i x^{i-1}$$

también es una serie convergente.

Una función f se dice *bianalítica* si f y su inversa f^{-1} son analíticas.

Sean $K_0, K_1 \subset \mathbb{Q}_p$ subconjuntos abiertos y compactos. Sea $\sigma : K_1 \rightarrow K_0$ una función bianalítica tal que $\sigma'(y) \neq 0$ para todo $y \in K_1$. Entonces, si f es continua en K_0 , se cumple:

$$\int_{K_0} f(x) dx = \int_{K_1} f(\sigma(y)) |\sigma'(y)|_p dy, \quad (x = \sigma(y)).$$

Capítulo 4

Teoremas de la función implícita en $\mathbb{Q}_p$

Denotamos por $\mathbb{Q}_p[[x_1, \dots, x_n]]$ el *anillo de series formales de potencias* con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$. Un elemento de este anillo tiene la forma

$$\sum c_i x^i = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} c_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Una serie formal $\sum c_i x^i$ se dice *convergente* si existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\sum c_i a^i$ converge para todo $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ con

$$\|a\|_p = \max_i |a_i|_p < p^r.$$

Las series convergentes forman un subanillo de $\mathbb{Q}_p[[x_1, \dots, x_n]]$, denotado por

$$\mathbb{Q}_p\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle\rangle.$$

Si para $\sum c_i x^i$ existe una serie $\sum c_i^{(0)} x^i$ con coeficientes reales tal que $|c_i|_p \leq c_i^{(0)}$ para todo i , decimos que $\sum c_i^{(0)} x^i$ es una *serie dominante* y escribimos

$$\sum c_i x^i \ll \sum c_i^{(0)} x^i.$$

Proposición 3. *Una serie formal es convergente si y sólo si tiene una serie dominante.*

Demostración. Sea $|i| := i_1 + \dots + i_n$. Si

$$\sum c_i x^i \ll \sum c_i^{(0)} x^i,$$

entonces

$$\lim_{|i| \rightarrow \infty} |c_i|_p \leq \lim_{|i| \rightarrow \infty} c_i^{(0)} = 0,$$

por lo que la serie es convergente.

Recíprocamente, si $\sum c_i x^i$ es convergente, existe r tal que converge en $\|a\|_p < p^r$. Tomando $r_0 < r$, se obtiene que

$$|c_i|_p p^{|i|r_0} \leq M,$$

para alguna constante $M > 0$, lo que da una serie dominante:

$$\sum c_i x^i \ll \sum \left(\frac{M}{p^{|i|r_0}} \right) x^i.$$

□

Decimos que $f(x) = \sum c_i x^i$ es una *serie de potencias restringida especial* (SRP) si $f(0) = 0$ y $c_i \equiv 0 \pmod{p^{|i|-1}}$ para todo $i \neq 0$.

Lema 7. Si f es una SRP, entonces:

$$(i) \ f(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n]],$$

$$(ii) \ f \text{ converge en todo } \mathbb{Z}_p^n,$$

$$(iii) \ f(a) \in \mathbb{Z}_p \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}_p^n.$$

Teorema 5 (Primera versión del teorema de la función implícita). (i) Sea

$$F(x, y) = (F_1(x, y), \dots, F_m(x, y)),$$

con

$$F_i(x, y) \in \mathbb{Q}_p[[x, y]] := \mathbb{Q}_p[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]],$$

tal que $F_i(0, 0) = 0$ para todo i , y

$$\det \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, 0) \right]_{1 \leq i, j \leq m} \neq 0.$$

Entonces existe una única función

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

con

$$f_i(x) \in \mathbb{Q}_p[[x_1, \dots, x_n]], \quad f_i(0) = 0,$$

tal que

$$F(x, f(x)) = 0,$$

es decir,

$$F_i(x, f(x)) = 0 \quad \text{para todo } i.$$

(ii) Si cada $F_i(x, y)$ es una serie de potencias convergente, entonces cada $f_i(x)$ también es una serie convergente.

Además, si a está suficientemente cerca de 0 en $\mathbb{Q}_p^n$, entonces $f(a)$ está cerca de 0 en $\mathbb{Q}_p^m$ y se cumple

$$F(a, f(a)) = 0.$$

Recíprocamente, si (a, b) está suficientemente cerca de $(0, 0)$ en $\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^m$ y satisface

$$F(a, b) = 0,$$

entonces necesariamente $b = f(a)$.

Una prueba de este resultado se puede encontrar en [33, Thm. 2.1.1].

Corolario 1. [33, Cor. 2.2.1]

(i) Si $g_i(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n]]$, $g_i(0) = 0$ para todo i , y

$$\det \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0, 0) \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

entonces cada $f_j(x)$ en la única solución de

$$g_i(f_1(x), \dots, f_n(x)) = x$$

con $f_j(0) = 0$, pertenece también a $\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n]]$.

(ii) Si cada $g_i(x)$ es una SRP en $x_1, \dots, x_n$, entonces cada $f_j(x)$ también es una SRP, y $y = f(x)$ define una aplicación bicontinua de $\mathbb{Z}_p^n$ en sí mismo.

Observación 4. (i) Sean $U_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$ y $U_2 \subset \mathbb{Q}_p^m$ subconjuntos abiertos que contienen al origen. Supongamos que cada

$$F_i(x, y) : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{Q}_p$$

es una serie de potencias convergente.

Un conjunto de la forma

$$V := \{(x, y) \in U_1 \times U_2 : F_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, m\}$$

se llama un conjunto analítico.

En el caso en que todos los $F_i(x, y)$ son polinomios y $U_1 = \mathbb{Q}_p^n$, $U_2 = \mathbb{Q}_p^m$, el conjunto V se llama un conjunto algebraico.

Si todos los $F_i(x, y) \in \mathbb{Q}_p\langle\langle x, y \rangle\rangle$ satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita, entonces V admite una parametrización (posiblemente reduciendo U_1 y U_2), es decir, existen abiertos $\tilde{U}_1 \subset U_1$, $\tilde{U}_2 \subset U_2$ que contienen al origen tales que

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y) \in \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 : F_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, m\} \\ &= \{(x, y) \in \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 : y = f(x)\}. \end{aligned}$$

(ii) Si ahora usamos como coordenadas

$$x_1, \dots, x_n, \quad z_1 = y_1 - f_1(x), \dots, z_m = y_m - f_m(x),$$

entonces

$$V = \{(x, z) \in \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 : z_1 = \cdots = z_m = 0\}.$$

Decimos que tal conjunto V es una subvariedad analítica cerrada de $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2 \subset \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^m$ de codimensión m .

La palabra “cerrada” significa que V es cerrado en la topología p -ádica.

En la siguiente versión del teorema de la función implícita podemos controlar los radios de las bolas que intervienen en el teorema.

Teorema 6 (Segunda versión del Teorema de la Función Implícita). (i) Si

$$F_i(x, y) \in \mathbb{Z}_p[[x, y]] := \mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]],$$

$F_i(0, 0) = 0$ para todo i y

$$\det \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, 0) \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

entonces existe una única solución

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

con $f_i(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n]]$, $f_i(0) = 0$, de

$$F(x, f(x)) = 0,$$

es decir, $F_i(x, f(x)) = 0$ para todo i .

(ii) Si cada $F_i(x, y)$ es una SRP en $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, entonces cada $f_i(x)$ es una SRP en $x_1, \dots, x_n$.

Además, si $a \in \mathbb{Z}_p^n$, entonces $f(a) \in \mathbb{Z}_p^m$ y $F(a, f(a)) = 0$, y si $(a, b) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m$ satisface $F(a, b) = 0$, entonces $b = f(a)$.

Para una demostración de este resultado, el lector puede consultar [33, Thm. 2.2.1].

Corolario 2. [33, Cor. 2.2.1]

(i) Si $g_i(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n]]$, $g_i(0) = 0$ para todo i y además

$$\det \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0, 0) \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

entonces cada $f_j(x)$ en la única solución de

$$g_i(f_1(x), \dots, f_n(x)) = x$$

que satisface $f_j(0) = 0$ pertenece también a $\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_n]]$.

(ii) Si cada $g_i(x)$ es una SRP en $x_1, \dots, x_n$, entonces cada $f_j(x)$ es también una SRP en las mismas variables, y $y = f(x)$ define una aplicación bicontinua de $\mathbb{Z}_p^n$ en sí mismo.

Observación 5. Supongamos que cada $F_i(x, y)$ es una SRP en x, y . Sea

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m : F_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Bajo las hipótesis de la segunda versión del teorema de la función implícita, se tiene

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m : y = f(x), x \in \mathbb{Z}_p^n\}.$$

Usando el sistema de coordenadas

$$x_1, \dots, x_n, \quad z_1 = y_1 - f_1(x), \dots, z_m = y_m - f_m(x),$$

el conjunto V toma la forma

$$V = \{(x, z) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m : z_1 = \dots = z_m = 0\}.$$

Diremos que V es una subvariedad analítica cerrada de $\mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m$ de codimensión m .

4.1. Fórmula general de cambio de variables

Teorema 7. [33, Prop. 7.4.1] Sean $K_0, K_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$ subconjuntos abiertos y compactos, y sea

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : K_1 \rightarrow K_0$$

una aplicación bianalítica tal que

$$\det \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial y_j}(z) \right] \neq 0, \quad z \in K_1.$$

Si f es una función continua en K_0 , entonces

$$\int_{K_0} f(x) d^n x = \int_{K_1} f(\sigma(y)) \left| \det \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial y_j}(y) \right] \right|_p d^n y, \quad (x = \sigma(y)).$$

Capítulo 5

Las funciones zeta locales de Igusa

Sea p un número primo fijo. El objetivo central de esta sección es relacionar problemas de conteo aritmético con propiedades analíticas de integrales p -ádicas.

Definimos

$$A_m := \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

el anillo de *enteros módulo* p^m . Recordemos que cualquier entero puede escribirse de manera única en la forma

$$a_0 + a_1p + \cdots + a_kp^k, \quad a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Así, podemos identificar, como conjuntos, A_m con

$$\{a_0 + a_1p + \cdots + a_{m-1}p^{m-1}, \quad a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}.$$

Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{Z}$, y definimos

$$N_m = \begin{cases} \#\{x \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^n : f(x) \equiv 0 \pmod{p^m}\} & \text{si } m \geq 1, \\ 1 & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

El número N_m cuenta las soluciones de la ecuación $f(x) \equiv 0 \pmod{p^m}$, y su crecimiento refleja la estructura aritmética de las singularidades de f . Un problema básico es estudiar el comportamiento de la sucesión N_m cuando $m \rightarrow \infty$.

Más generalmente, podemos tomar $f(x) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ no constante (recordemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ y que $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p$), y

$$N_m = \begin{cases} \#\{x \in (\mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p)^n : f(x) \equiv 0 \pmod{p^m}\} & \text{si } m \geq 1, \\ 1 & \text{si } m = 0, \end{cases}$$

donde $x \equiv y \pmod{p^m}$ significa que $x - y \in p^m\mathbb{Z}_p$.

Para estudiar la sucesión $\{N_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ introducimos la siguiente serie de Poincaré:

$$P(t) := \sum_{m=0}^{\infty} N_m (p^{-n}t)^m, \quad t \in \mathbb{C}, |t| < 1. \quad (5.1)$$

La serie $P(t)$ codifica la información aritmética de los números N_m en forma de función generatriz y esperamos que las propiedades analíticas de $P(t)$ proporcionen información sobre el comportamiento asintótico de la sucesión $\{N_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Una cuestión clave es la siguiente:

¿Es $P(t)$ una función racional de t ?

En lo que sigue usaremos la convención: dado $a > 0$ y $s \in \mathbb{C}$, definimos $a^s = e^{s \ln a}$.

Definición 7. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{Q}_p$ y sea φ una función localmente constante con soporte compacto, es decir, un elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.

La función zeta local (también llamada función zeta local de Igusa) asociada a (f, φ) es

$$Z_\varphi(s, f) := \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x) |f(x)|_p^s d^n x, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0,$$

donde $d^n x$ es la medida de Haar de $(\mathbb{Q}_p^n, +)$ normalizada de modo que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = 1.$$

Observación 6. $Z_\varphi(s, f)$ es una función holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re}(s) > 0$. Para la demostración de este hecho el lector puede consultar [33, Lemma 5.3.1].

Dado $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$, definimos

$$Z(s, f) := Z(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |f(x)|_p^s d^n x, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Ejemplo 13 (Polinomio lineal). Sea $f(x) = x \in \mathbb{Z}_p$. Entonces

$$N_m = \#\{x \in \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod{p^m}\} = 1.$$

Por lo tanto,

$$P(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (p^{-n}t)^m = \frac{1}{1 - p^{-n}t}.$$

Además,

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-1-s}}.$$

Proposición 4. Con la notación anterior,

$$P(t) = \frac{1 - tZ(s)}{1 - t}, \quad t = p^{-s}, \quad \text{para } \operatorname{Re}(s) > 0,$$

donde $P(t)$ es la serie de Poincaré definida en (5.1).

Demostración. Observamos primero que

$$Z(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |f(x)|_p^s d^n x = \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} \int_{\{x \in \mathbb{Z}_p^n : |f(x)|_p = p^{-j}\}} d^n x.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{Z}_p^n : |f(x)|_p = p^{-j}\} &= \{x \in \mathbb{Z}_p^n : \operatorname{ord}(f(x)) = j\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_p^n : \operatorname{ord}(f(x)) \geq j\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}_p^n : \operatorname{ord}(f(x)) \geq j+1\}. \end{aligned}$$

Sea $x_0 \in \mathbb{Z}_p^n$ tal que $\operatorname{ord}(f(x_0)) \geq j$. Entonces, usando el desarrollo de Taylor,

$$f(x_0 + p^j z) = f(x_0) + p^j \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}) + p^{2j} (\text{términos de orden superior}),$$

se tiene que $\operatorname{ord}(f(x_0 + p^j z)) \geq j$ para todo $z \in \mathbb{Z}_p^n$.

Este hecho implica:

- (i) $x_0 \in (\mathbb{Z}_p/p^j \mathbb{Z}_p)^n$ satisface $f(x_0) \equiv 0 \pmod{p^j}$;
- (ii)

$$A_j := \{x \in \mathbb{Z}_p^n : \operatorname{ord}(f(x)) \geq j\} = \bigsqcup_{f(x_0) \equiv 0 \pmod{p^j}} (x_0 + p^j \mathbb{Z}_p^n);$$

(iii)

$$\int_{A_j} d^n x = N_j p^{-jn}.$$

Por lo tanto,

$$Z(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} \left(N_j p^{-jn} - N_{j+1} p^{-(j+1)n} \right),$$

de donde se obtiene finalmente

$$P(t) = \frac{1 - tZ(s)}{1 - t}.$$

□

Esta identidad muestra que el estudio de la serie de Poincaré se reduce al estudio analítico de la función zeta local.

Ejemplo 14 (Monomio). Sea $f(x) = x^k$, $k \geq 1$. Entonces

$$|f(x)|_p = |x|_p^k, \quad Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^{ks} dx = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-1-ks}}.$$

Ejemplo 15 (Función sin ceros módulo p). Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\bar{f}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{F}_p^n$. Entonces $|f(x)|_p = 1$ en $\mathbb{Z}_p^n$, y

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} 1 dx = 1.$$

Teorema 8 (Igusa, [33, Thm. 8.2.1]). Sea $f(x)$ un polinomio no constante en $\mathbb{Q}_p[x_1, \dots, x_n]$. Existen un número finito de pares $(N_E, v_E) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$, $E \in T$, tales que

$$\prod_{E \in T} (1 - p^{v_E - sN_E}) Z_\varphi(s, f)$$

es un polinomio en p^{-s} con coeficientes racionales.

La demostración de este teorema se dará en el Capítulo 6. A partir del Teorema 8 y la Proposición 4, obtenemos:

Corolario 3. $P(t)$ es una función racional de t .

La racionalidad de $P(t)$ fue conjeturada en los años sesenta por Borevich y Shafarevich. Igusa demostró este resultado a mediados de los años setenta.

La racionalidad de $Z_\varphi(s, f)$ también permite obtener cotas para los N_m , véase por ejemplo [30] y [33].

La demostración del Teorema 8 dada por Igusa depende de un resultado profundo de geometría algebraica conocido como el teorema de resolución de singularidades de Hironaka.

Ejercicio 1. Sea $f(x, y) = xy$. Calcular la función zeta local $Z(s, f)$.

Ejercicio 2. Probar la Proposición 4 en el caso $n = 1$.

Ejercicio 3. Sea $f(x) = x^2$. Calcular explícitamente N_m y estudiar su comportamiento asintótico cuando $m \rightarrow \infty$.

5.1. La fórmula de fase estacionaria

Ahora introducimos la *fórmula de fase estacionaria*, que es un método elemental para calcular integrales p -ádicas como $Z_\varphi(s, f)$. Igusa conjeturó en [31] que este método conducirá a una nueva demostración elemental de la racionalidad de $Z_\varphi(s, f)$.

Identificamos $\mathbb{F}_p$, como conjunto, con $\{0, 1, \dots, p-1\}$. Denotamos por ‘ $\rightarrow$ ’ la aplicación de reducción mód p , es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &\rightarrow \mathbb{F}_p \\ x_0 + p(\dots) &\rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Esta aplicación se extiende de manera natural a $\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p^n$. La reducción mód p de un subconjunto $E \subset \mathbb{Z}_p^n$ se denotará por $\overline{E} \subset \mathbb{F}_p^n$. Si $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$, denotamos por $\overline{f}$ su reducción mód p .

Proposición 5 (Fórmula de fase estacionaria). *Sea $\overline{E} \subset \mathbb{F}_p^n$ y denotemos por $\overline{S}$ el subconjunto formado por todos los $\overline{a} \in \overline{E}$ tales que*

$$\overline{f}(\overline{a}) \equiv \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\overline{a}) \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Denotemos por E, S las preimágenes de $\overline{E}, \overline{S}$ mediante la aplicación de reducción mód p $\mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p^n$, y por N el número de ceros de $\overline{f}(x)$ en $\overline{E}$. Entonces

$$\int_E |f(x)|_p^s d^n x = p^{-n}(\#\overline{E} - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N - \#\overline{S})}{1-p^{-1-s}} + \int_S |f(x)|_p^s d^n x.$$

Demostración. Por definición,

$$E = \bigsqcup_{\overline{a} \in \overline{E}} (a + p\mathbb{Z}_p^n),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|_p^s d^n x &= \sum_{\overline{a} \in \overline{E}} \int_{a+p\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x \\ &= p^{-n} \sum_{\overline{a} \in \overline{E}} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(a+px)|_p^s d^n x \\ &= p^{-n} \sum_{\overline{a} \in \overline{E} \setminus \overline{S}} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(a+px)|_p^s d^n x + \int_S |f(x)|_p^s d^n x. \end{aligned}$$

Tomemos $\overline{a} \in \overline{E} \setminus \overline{S}$ tal que $\overline{f}(\overline{a}) \neq 0$, es decir, $|f(a+px)|_p = 1$. En este caso

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(a+px)|_p^s d^n x = 1,$$

y la contribución de tales $\overline{a}$ es $p^{-n}(\#\overline{E} - N)$.

Consideremos ahora $\overline{a} \in \overline{E} \setminus \overline{S}$ tal que

$$\overline{f}(\overline{a}) = 0, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\overline{a}) \neq 0 \text{ para algún } i,$$

digamos $i = 1$. Definimos

$$y_i = \begin{cases} \frac{f(a+px) - f(a)}{p} & \text{si } i = 1, \\ x_i & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Entonces las y_i son SRP's y

$$\det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(0) \right] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

por lo que la aplicación $x \mapsto y$ preserva la medida en $\mathbb{Z}_p^n$.

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(a+px)|_p^s d^n x &= \int_{\mathbb{Z}_p} |py_1 + f(a)|_p^s dy_1 \\ &= p^{-s} \int_{\mathbb{Z}_p} \left| y_1 + \frac{f(a)}{p} \right|_p^s dy_1 \\ &= p^{-s} \int_{\mathbb{Z}_p} |y_1|_p^s dy_1 = p^{-s} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}}. \end{aligned}$$

La contribución de estos puntos es

$$\frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N-\#\bar{S})}{1-p^{-1-s}}.$$

□

Sea $f(a+px) = p^{e_a} \tilde{f}(x)$ con $\tilde{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$. La fórmula de fase estacionaria (SPF) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|_p^s d^n x &= \frac{L(p^{-s})}{1-p^{-1-s}} + \int_S |f(x)|_p^s d^n x \\ &= \frac{L(p^{-s})}{1-p^{-1-s}} + p^{-n} \sum_{\bar{a} \in \bar{S}} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(a+px)|_p^s d^n x \\ &= \frac{L(p^{-s})}{1-p^{-1-s}} + p^{-n-e_a s} \sum_{\bar{a} \in \bar{S}} \int_{\mathbb{Z}_p^n} |\tilde{f}(x)|_p^s d^n x. \end{aligned}$$

Podemos ahora aplicar SPF a cada integral $\int_{\mathbb{Z}_p^n} |\tilde{f}(x)|_p^s d^n x$. Igusa conjeturó que, aplicando recursivamente SPF, es posible demostrar la racionalidad de integrales del tipo $\int_E |f(x)|_p^s d^n x$ cuando el polinomio f tiene coeficientes en un cuerpo completo no arquimediano de característica arbitraria.

La aritmética del campo de series formales de Laurent

$$\mathbb{F}_p((T)) = \left\{ \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k T^k : a_k \in \mathbb{F}_p, k_0 \in \mathbb{Z} \right\},$$

es completamente análoga a la de $\mathbb{Q}_p$. En particular, dado un polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}_p((T))$, podemos asociarle una función zeta local definida como en el caso p -ádico. La racionalidad de tales funciones zeta locales es un problema abierto. La principal dificultad es la ausencia de un teorema de resolución de

singularidades en característica positiva. La conjetura anterior puede reformularse diciendo que la racionalidad debería seguir de la aplicación recursiva de SPF.

Observación 7. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$. Si el sistema

$$\bar{f}(\bar{a}) \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{a}) \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

no tiene soluciones en $\mathbb{F}_p^n$, entonces $S = \emptyset$ y, por SPF,

$$Z(s, f) = p^{-n}(\#\bar{E} - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})N}{1-p^{-1-s}}.$$

Ejemplo 16. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio homogéneo de grado d tal que

$$\bar{f}(\bar{a}) \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{a}) \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq i \leq n \Rightarrow \bar{a} = 0.$$

Calculamos $Z(s, f)$. Aplicamos SPF con $E = \mathbb{Z}_p^n$, $\bar{E} = \mathbb{F}_p^n$, $S = p\mathbb{Z}_p^n$, $\bar{S} = \{0\}$:

$$\begin{aligned} Z(s, f) &= p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N-1)}{1-p^{-1-s}} + \int_{p\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x \\ &= p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N-1)}{1-p^{-1-s}} + p^{-n-ds} Z(s, f). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Z(s, f) = \frac{1}{1-p^{-n-ds}} \left\{ p^{-n}(p^n - N) + \frac{p^{-n-s}(1-p^{-1})(N-1)}{1-p^{-1-s}} \right\}.$$

Capítulo 6

Singularidades y funciones zeta de Igusa

Antes mencionábamos que la prueba de Igusa de la racionalidad de $Z_\varphi(s, f)$ [33], i.e. Teorema 8, depende de un resultado profundo de geometría algebraica conocido como el teorema de resolución de singularidades de Hironaka [28]. En este capítulo ahondamos un poco más en la relación de las singularidades de f y el cálculo de $Z(s, f)$,

6.1. Puntos singulares de hipersuperficies

Sea

$$f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$$

y definimos

$$V_f(\mathbb{Q}_p) = \{z \in \mathbb{Q}_p^n : f(z) = 0\}.$$

El conjunto $V_f(\mathbb{Q}_p)$ es el conjunto de puntos $\mathbb{Q}_p$ -rationales de la hipersuperficie definida por f . Esta noción puede formularse sobre un campo arbitrario K . Definimos

$$V_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p) := \{z \in \mathbb{F}_p^n : \bar{f}(z) = 0\}.$$

El conjunto $V_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p)$ es el conjunto de puntos $\mathbb{F}_p$ -rationales de la hipersuperficie definida por $\bar{f}$. Si

$$V_f(\mathbb{Z}_p) := V_f(\mathbb{Q}_p) \cap \mathbb{Z}_p^n,$$

entonces se tiene que

$$\overline{V_f(\mathbb{Z}_p)} = V_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p).$$

Un punto $a \in V_f(\mathbb{Q}_p)$ se dice *singular* si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

El conjunto de puntos singulares de $V_f(\mathbb{Q}_p)$ se denota por $Sing_f(\mathbb{Q}_p)$. Definimos

$$Sing_f(\mathbb{Z}_p) = Sing_f(\mathbb{Q}_p) \cap \mathbb{Z}_p^n.$$

De manera análoga se define $Sing_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p)$.

Obsérvese que

$$\overline{Sing_f(\mathbb{Z}_p)} \neq Sing_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p).$$

De hecho, puede suceder que $Sing_f(\mathbb{Z}_p) = \emptyset$ y que $Sing_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset$. Por ejemplo, si $f(x, y) = px + x^2 - y^3$, entonces

$$Sing_f(\mathbb{Z}_p) = \emptyset, \quad \text{pero} \quad Sing_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p) = \{(0, 0)\}.$$

Ejemplo 17. Calculamos $Z(s, f)$ para $f(x, y) = px + x^2 - y^3$ usando SPF. Obsérvese que $E = \mathbb{Z}_p^2$, $\bar{E} = \mathbb{F}_p^2$, $S = p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p$, $\bar{S} = \{(0, 0)\}$, y

$$N = \# \{(u, v) \in \mathbb{F}_p^2 : u^2 - v^3 = 0\}.$$

Aplicando SPF:

$$Z(s, f) = p^{-2}(p^2 - N) + \frac{p^{-2-s}(1 - p^{-1})(N - 1)}{1 - p^{-1-s}} + \int_{p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p} |px + x^2 - y^3|_p^s dx dy.$$

Haciendo el cambio de variables $x = pu$, $y = pv$:

$$\begin{aligned} Z(s, f) &= \frac{L(p^{-s})}{1 - p^{-1-s}} + p^{-2} \int_{\mathbb{Z}_p^2} |p^2u + p^2u^2 - p^3v^3|_p^s dudv \\ &= \frac{L(p^{-s})}{1 - p^{-1-s}} + p^{-2-2s} \int_{\mathbb{Z}_p^2} |u + u^2 - pv^3|_p^s dudv. \end{aligned}$$

Aplicamos SPF al último integral con $g(u, v) = u + u^2 - pv^3$, $\bar{g}(u, v) = u + u^2$. El sistema

$$u + u^2 = 0, \quad 1 + 2u = 0, \quad u, v \in \mathbb{F}_p$$

no tiene soluciones, por lo que $\bar{S} = \emptyset$. Entonces

$$Z(s, f) = \frac{L(p^{-s})}{1 - p^{-1-s}} + p^{-2-2s} \left\{ p^{-2}(p^2 - 2p) + \frac{2p^{-1-s}(1 - p^{-1})}{1 - p^{-1-s}} \right\}.$$

Observación 8. Sea

$$f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n].$$

Si $Sing_f(\mathbb{Q}_p) = \emptyset$ pero $Sing_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset$, entonces

$$Z(s, f) = \frac{L(p^{-s})}{1 - p^{-1-s}},$$

donde $L(p^{-s})$ es un polinomio en p^{-s} con coeficientes racionales. El denominador de $Z(s, f)$ está controlado por $Sing_f(\mathbb{Q}_p)$. Actualmente, el numerador no se entiende completamente, pero depende fuertemente de $Sing_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p)$.

La ausencia de puntos singulares sobre $\mathbb{Q}_p$, es decir, $Sing_f(\mathbb{Q}_p) = \emptyset$, hace que el denominador de $Z(s, f)$ sea “trivial”: 1 o $1 - p^{-1-s}$.

Ejemplo 18. *Calculamos ahora*

$$Z(s, x^2 + y^3) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} |x^2 + y^3|_p^s dx dy$$

usando SPF.

Se tiene $E = \mathbb{Z}_p^2$, $\overline{E} = \mathbb{F}_p^2$, $S = p\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p$, $\overline{S} = \{(0, 0)\}$, y

$$N = \#\{(u, v) \in \mathbb{F}_p^2 : u^2 + v^3 = 0\} = p,$$

ya que se puede parametrizar como $u = \alpha^3$, $v = \alpha^2$.

Aplicando SPF:

$$Z(s, x^2 + y^3) = (1 - p^{-1}) \frac{1 - p^{-2-s}}{1 - p^{-1-s}} + \int_{p\mathbb{Z}_p^2} |x^2 + y^3|_p^s dx dy.$$

Haciendo $x = pu$, $y = pv$:

$$Z(s, x^2 + y^3) = (1 - p^{-1}) \frac{1 - p^{-2-s}}{1 - p^{-1-s}} + p^{-2-2s} Z_1(s).$$

Repetiendo el proceso (aplicaciones sucesivas de SPF) se obtiene finalmente:

$$Z(s, x^2 + y^3) = \frac{(1 - p^{-1})}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-5-6s})} \cdot (1 - p^{-2-s} + p^{-2-2s} - p^{-5-6s}).$$

6.1.1. Singularidades cuasi-homogéneas

Sea $w = (w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$ y $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$. Decimos que $f(x)$ es un *polinomio cuasi-homogéneo de grado d con respecto a w* si:

- (1) $f(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^d f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$,
- (2) $Sing_f(\mathbb{Q}_p) = \{0\} \subset \mathbb{Q}_p^n$.

Definimos $|w| := w_1 + \dots + w_n$, y

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x.$$

Proposición 6. *Con la notación e hipótesis anteriores,*

$$Z(s, f) = \frac{L(p^{-s})}{(1 - p^{-1-s})(1 - p^{-ds-|w|})},$$

donde $L(p^{-s})$ es un polinomio en p^{-s} con coeficientes racionales.

Demostración. Definimos

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^n : \text{ord}(x_i) \geq w_i \text{ para } i = 1, \dots, n\} \\ &= p^{w_1} \mathbb{Z}_p \times \dots \times p^{w_n} \mathbb{Z}_p, \end{aligned}$$

y

$$A^c := \mathbb{Z}_p^n \setminus A.$$

Entonces

$$Z(s, f) = \int_A |f(x)|_p^s d^n x + \int_{A^c} |f(x)|_p^s d^n x.$$

En la primera integral hacemos el cambio de variables $x_i = p^{w_i} u_i$, $i = 1, \dots, n$, con lo que $d^n x = p^{-|w|} d^n u$. Así,

$$\int_A |f(x)|_p^s d^n x = p^{-ds-|w|} Z(s, f).$$

Por lo tanto,

$$Z(s, f) = \frac{1}{1 - p^{-ds-|w|}} \int_{A^c} |f(x)|_p^s d^n x.$$

Ahora observamos que

$$\text{Sing}_f(\mathbb{Q}_p) \cap A^c = \emptyset,$$

pero puede suceder que

$$\text{Sing}_{\bar{f}}(\mathbb{F}_p) \cap \overline{A^c} \neq \emptyset,$$

lo cual hace que el cálculo de la integral sobre A^c no sea sencillo.

Utilizando la fórmula de fase estacionaria (SPF) de manera recursiva y algunas ideas de desingularización p -ádica de Néron, se puede demostrar que

$$\int_{A^c} |f(x)|_p^s d^n x = \frac{L(p^{-s})}{1 - p^{-1-s}}.$$

Para una demostración detallada, incluyendo el caso más general de singularidades semicuasi-homogéneas, el lector puede consultar [65]. $\square$

6.2. Variedades analíticas p -ádicas y resolución de singularidades

6.2.1. Explicación intuitiva de la resolución de singularidades

La idea central de la resolución de singularidades es reemplazar un espacio con singularidades por otro espacio más “regular”, donde la función o variedad adquiere una forma más simple.

Dado un polinomio $f(x)$ con singularidades, el teorema de Hironaka afirma que existe una transformación analítica propia

$$h : Y \rightarrow X = \mathbb{Q}_p^n$$

tal que, al considerar la composición $f \circ h$, la función se puede escribir localmente como

$$(f \circ h)(y) = \varepsilon(y) \prod_{i=1}^m y_i^{N_i},$$

donde $\varepsilon(y)$ es una unidad (es decir, no se anula).

Esto significa que, después del cambio de variables dado por h , la función se convierte en un producto de potencias de coordenadas, lo cual es mucho más fácil de estudiar, especialmente al calcular integrales p -ádicas.

Geoméricamente, el proceso consiste en realizar una sucesión finita de *blow-ups* (transformaciones monoidales) centrados en subconjuntos suaves. Cada uno de estos pasos “separa” las componentes que causan la singularidad.

El resultado final es que el conjunto de ceros de $f \circ h$ se convierte en una unión de hipersuperficies que se intersectan transversalmente, es decir, tienen *cruces normales*. Esto simplifica tanto la geometría como el análisis.

Ejemplo: blow-up en dimensión 2

Consideremos el polinomio

$$f(x, y) = y^2 - x^3,$$

el cual tiene una singularidad en el origen $(0, 0)$.

Realizamos un blow-up en el origen. En una de las cartas del blow-up usamos el cambio de variables:

$$x = u, \quad y = uv.$$

Sustituyendo en f obtenemos:

$$f(u, uv) = (uv)^2 - u^3 = u^2(v^2 - u).$$

Así,

$$(f \circ h)(u, v) = u^2(v^2 - u).$$

Observamos que el factor u^2 corresponde al divisor excepcional introducido por el blow-up. La singularidad original se ha “descompuesto” en componentes más simples.

En la otra carta del blow-up, usando

$$x = vw, \quad y = w,$$

se obtiene una expresión análoga:

$$f(vw, w) = w^2(1 - v^3).$$

En ambas cartas, la función se escribe como producto de una potencia de una coordenada por una función más regular. Repitiendo este proceso (si es necesario), se puede lograr que la función tenga únicamente cruces normales.

Este ejemplo ilustra cómo la resolución de singularidades transforma una singularidad complicada en una configuración más manejable, lo cual es esencial para el estudio de integrales p -ádicas.

6.2.2. Teorema de Hironaka en el caso p -ádico

Esta sección está basada en [33, Sec. 2.4]. Sea $U \subset \mathbb{Q}_p^n$ un conjunto abierto no vacío, y sea $f : U \rightarrow \mathbb{Q}_p$ una función. Si en cada punto $a = (a_1, \dots, a_n)$ de U existe un elemento

$$f_a(x) \in \mathbb{Q}_p \langle \langle x - a \rangle \rangle = \mathbb{Q}_p \langle \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \rangle$$

tal que $f(x) = f_a(x)$ para todo punto x suficientemente cercano a a , decimos que f es una *función analítica en U* . No es difícil mostrar que todas las derivadas parciales de f son analíticas en U .

Sea U como antes y sea $h = (h_1, \dots, h_m) : U \rightarrow \mathbb{Q}_p^m$ una aplicación. Si cada h_i es una función analítica en U , decimos que h es una *aplicación analítica en U* .

Sea X un espacio de Hausdorff y n un entero no negativo fijo. Un par (U, ϕ_U) , donde U es un subconjunto abierto no vacío de X y $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{Q}_p^n$ es un mapeo bicontinuo (es decir, un homeomorfismo) de U sobre un abierto $\phi_U(U)$ de $\mathbb{Q}_p^n$, se llama una *carta*. Además, las coordenadas

$$\phi_U(x) = (x_1, \dots, x_n)$$

para un punto variable $x \in U$ se llaman *coordenadas locales de x* .

Un conjunto de cartas $\{(U, \phi_U)\}$ se llama un *atlas* si la unión de todos los U es X y, para cualesquiera U, U' con $U \cap U' \neq \emptyset$, la aplicación

$$\phi_{U'} \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap U') \rightarrow \phi_{U'}(U \cap U')$$

es analítica.

Dos atlas se consideran equivalentes si su unión también es un atlas. Esto define una relación de equivalencia, y cada clase de equivalencia se llama una *estructura analítica p -ádica de dimensión n sobre X* . Si $\{(U, \phi_U)\}$ es un atlas en dicha clase, decimos que X es una *variedad analítica p -ádica de dimensión n* , y escribimos $n = \dim(X)$.

Supongamos que X y Y son variedades analíticas p -ádicas definidas por los atlas $\{(U, \phi_U)\}$ y $\{(V, \psi_V)\}$, respectivamente, y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Si para todo U, V tales que $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, la aplicación

$$\psi_V \circ f \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi_V(V \cap f(U))$$

es analítica, entonces decimos que f es una *aplicación analítica*. Esta noción no depende de la elección de atlas.

Supongamos que X es una variedad analítica p -ádica y Y es un subconjunto abierto no vacío de X . Si para cada $U' = Y \cap U \neq \emptyset$ definimos $\phi_{U'} = \phi_U|_{U'}$, entonces $\{(U', \phi_{U'})\}$ es un atlas sobre Y , lo cual hace de Y una *subvariedad abierta* de X , con $\dim(Y) = \dim(X)$.

Si U, U' son vecindades de un punto $a \in X$ y f, g son funciones analíticas p -ádicas definidas respectivamente en U, U' tales que $f|_W = g|_W$ para alguna vecindad W de a contenida en $U \cap U'$, decimos que f y g son *equivalentes en a* . Una clase de equivalencia se llama un *germen de funciones analíticas en a* . El conjunto de estos gérmenes forma un anillo local denotado por $\mathcal{O}_{X,a}$ o simplemente $\mathcal{O}_a$.

Supongamos que Y es un subconjunto cerrado no vacío de X y que existe $0 < m \leq n$ tal que se puede elegir un atlas $\{(U, \phi_U)\}$ con la siguiente propiedad: si $\phi_U(x) = (x_1, \dots, x_n)$ y $U' = Y \cap U \neq \emptyset$, entonces existen funciones analíticas $F_1, \dots, F_m$ en U tales que U' es el conjunto de puntos $x \in U$ que satisfacen

$$F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0,$$

y además

$$\det \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}(a) \neq 0 \quad \text{para todo } a \in U'.$$

Entonces, por el Corolario ??-(ii), la aplicación

$$x \mapsto (F_1(x), \dots, F_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$$

es bianalítica en una vecindad de a . Si denotamos por V la intersección de dicha vecindad con Y y definimos

$$\psi_V(x) = (x_{m+1}, \dots, x_n),$$

entonces $\{(V, \psi_V)\}$ es un atlas sobre Y . Por lo tanto, Y es una variedad analítica p -ádica con $\dim(Y) = n - m$. Decimos que Y es una *subvariedad cerrada de codimensión m* de X .

Sea μ_n la medida de Haar normalizada en $\mathbb{Q}_p^n$. Sea α una forma diferencial de grado n sobre X . Entonces, en cada carta U ,

$$\alpha(x) = f_U(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde f_U es una función analítica.

Si A es un subconjunto abierto y compacto de X contenido en U , definimos

$$\mu_\alpha(A) = \int_A |f_U(x)|_p \mu_n(\phi_U(x)) = \sum_{e \in \mathbb{Z}} p^{-e} \mu_n(\phi_U(f_U^{-1}(p^e \mathbb{Z}_p^\times) \cap A)). \quad (6.1)$$

Esta serie converge porque $f_U(A)$ es compacto. Esta definición no depende de la carta elegida, lo cual se deduce de la fórmula de cambio de variables.

Teorema 9 (Hironaka). *Sea $f(x)$ un polinomio no constante en $\mathbb{Q}_p[x_1, \dots, x_n]$ y sea $X = \mathbb{Q}_p^n$. Entonces existen:*

- una variedad analítica p -ádica Y de dimensión n ,
- un conjunto finito $T = \{E\}$ de subvariedades cerradas de codimensión 1,
- una aplicación analítica propia $h : Y \rightarrow X$,

tales que:

(i) h es composición de un número finito de transformaciones monoidales con centros suaves;

(ii)

$$(f \circ h)^{-1}(0) = \bigcup_{E \in T} E,$$

y h induce un isomorfismo bianalítico fuera del conjunto singular;

(iii) localmente,

$$(f \circ h)(y) = \varepsilon(y) \prod_{i=1}^m y_i^{N_i}, \quad h^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \eta(y) \left(\prod_{i=1}^m y_i^{v_i-1} \right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n,$$

donde $\varepsilon(y)$ y $\eta(y)$ son unidades.

En particular, $\bigcup_{E \in T} E$ tiene cruces normales.

6.3. Demostración del Teorema 8

Queremos concluir estas notas demostrando el Teorema de Igusa sobre la continuación meromorfa de $Z_\varphi(s, f)$, véase el Teorema 8 en la Sección 5. Seguiremos la demostración dada por Igusa en [33, Thm. 8.2.1].

Sea

$$\left| \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right|$$

la medida inducida por la forma diferencial $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i$ en $\mathbb{Q}_p^n$, la cual coincide con la medida de Haar en $\mathbb{Q}_p^n$. Entonces

$$Z_\varphi(s, f) = \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x) |f(x)|_p^s \left| \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right|.$$

Tomemos una resolución de singularidades $h : Y \rightarrow X$ de $f^{-1}(0)$ como en el Teorema 9, usando toda la notación introducida ahí. Entonces

$$Y \setminus h^{-1}(f^{-1}(0)) \longrightarrow X \setminus f^{-1}(0)$$

es un mapeo bianalítico propio p -ádico, es decir, un cambio de coordenadas analítico propio. Por lo tanto,

$$Z_\varphi(s, f) = \int_{Y \setminus h^{-1}(f^{-1}(0))} \varphi(h(y)) |f(h(y))|_p^s \left| h^* \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i \right) (y) \right|.$$

En cada punto b de $Y \setminus h^{-1}(f^{-1}(0))$ podemos elegir una carta (U, ϕ_U) tal que se cumple (??). Como h es propio y el soporte de φ , digamos A , es compacto, se tiene que $h^{-1}(A) =: B$ es compacto. Entonces podemos cubrir B mediante una unión finita disjunta de bolas abiertas compactas B_α , cada una contenida en alguna carta U .

Dado que φ es localmente constante, después de refinar la partición podemos suponer que en cada B_α se cumple:

$$(\varphi \circ h)|_{B_\alpha} = \varphi(h(b)), \quad |\varepsilon(y)|_p|_{B_\alpha} = |\varepsilon(b)|_p, \quad |\eta(y)|_p|_{B_\alpha} = |\eta(b)|_p,$$

y además que

$$\phi_U(B_\alpha) = c + p^e \mathbb{Z}_p^n,$$

para algún $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ y $e \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$Z_\varphi(s, f) = \sum_\alpha \varphi(h(b)) |\varepsilon(b)|_p |\eta(b)|_p \prod_{i=1}^n \int_{c_i + p^e \mathbb{Z}_p} |y_i|_p^{N_i s + v_i - 1} dy_i,$$

donde se entiende que $N_i = 0$, $v_i = 1$ en el caso en que el divisor E_i no pase por b .

Finalmente, por [33, Lema 8.2.1], se tiene que

$$\int_{c_i + p^e \mathbb{Z}_p} |y_i|_p^{N_i s + v_i - 1} dy_i = \begin{cases} p^{-(N_i s + v_i)e} \left(\frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-N_i s - v_i}} \right), & \text{si } c_i \in p^e \mathbb{Z}_p, \\ p^{-e} |c_i|_p^{N_i s + v_i - 1}, & \text{si } c_i \notin p^e \mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

Por lo tanto, cada uno de los términos en la suma que define $Z_\varphi(s, f)$ es un producto finito de funciones de la forma

$$\frac{1}{1 - p^{-N_i s - v_i}}$$

multiplicadas por factores que son funciones holomorfas en p^{-s} .

En consecuencia, $Z_\varphi(s, f)$ puede escribirse como una combinación finita de funciones racionales en la variable p^{-s} . Esto implica que $Z_\varphi(s, f)$ admite una continuación meromorfa a todo el plano complejo como función de s .

Además, los posibles polos de $Z_\varphi(s, f)$ están contenidos en los valores de s que satisfacen

$$1 - p^{-N_i s - v_i} = 0,$$

es decir,

$$s = -\frac{v_i}{N_i} + \frac{2\pi i}{N_i \log p} k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

para aquellos índices i tales que $N_i \neq 0$.

En particular, las partes reales de los polos están dadas por los números racionales negativos $-\frac{v_i}{N_i}$, los cuales dependen únicamente de los datos numéricos asociados a la resolución de singularidades de f .

Esto concluye la demostración del Teorema 8.

Bibliografía

- [1] Albeverio S., Khrennikov A., and Shelkovich V. M., Theory of p -adic distributions: linear and nonlinear models. London Mathematical Society, Lecture Note Series, 370. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] Aref'eva I., Dragović B. G., and Volovich I. V., On the adelic string amplitudes. Phys. Lett. B 209 (4), 445–450 (1988).
- [3] Arnold V. I., Gusein-Zade S. M., and Varchenko A. N., Singularities of differentiable maps. Vol. II. Monodromy and asymptotics of integrals. Translated from the Russian by Hugh Porteous. Translation revised by the authors and James Montaldi. Monographs in Mathematics, 83. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1988.
- [4] Atiyah M. F., Resolution of Singularities and Division of Distributions. Comm. pure Appl. Math. 23, 145–150 (1970).
- [5] Belkale P., and Brosnan P., Periods and Igusa local zeta functions. Int. Math. Res. Not. 49, 2655–2670 (2003).
- [6] Bernstein I. N., Modules over the ring of differential operators; the study of fundamental solutions of equations with constant coefficients. Functional Analysis and its Applications 5 (2), 1–16 (1972).
- [7] Bleher P. M., Analytic continuation of massless Feynman amplitudes in the Schwartz space $\mathcal{S}'$. Rep. Math. Phys. 19 (1), 117–142 (1984).
- [8] Bocardo-Gaspar M., García-Compeán H., and Zúñiga-Galindo W. A., Regularization of p -adic String Amplitudes, and Multivariate Local Zeta Functions. To appear in Letters in Mathematical Physics. arXiv:1611.03807.
- [9] Bocardo-Gaspar M., García-Compeán H., and Zúñiga-Galindo W. A., p -Adic string amplitudes in the limit p approaches to one. J. High Energ. Phys. (2018) 2018: 43. [https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2018\)043](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2018)043).
- [10] Bogner C., and Weinzierl S., Periods and Feynman integrals. J. Math. Phys. 50 (4), 042302 (2009).

- [11] Bollini C.G., Giambiagi J. J., and González Domínguez A., Analytic regularization and the divergences of quantum field theories. *Il Nuovo Cimento* XXXI (3), 550-561 (1964).
- [12] Brekke L., Freund P. G. O., Olson M., and Witten E., Non-Archimedean string dynamics. *Nuclear Phys. B* 302 (3), 365–402 (1988).
- [13] Brekke L., and Freund P. G. O., p -adic numbers in physics. *Phys. Rep.* 233 (1), 1–66 (1993).
- [14] Denef J., Report on Igusa’s Local Zeta Function, Séminaire Bourbaki 43 (1990–1991), exp. 741; *Astérisque* 201–202–203, 359–386 (1991).
- [15] Denef J., and Loeser F., Caractéristiques D’Euler-Poincaré, Fonctions Zeta locales et modifications analytiques. *J. Amer. Math. Soc.* 5 (4), 705–720 (1992).
- [16] Denef J., and Loeser F., Motivic Igusa zeta functions, *J. Algebraic Geom.* 7 no. 3, 505–537 (1998).
- [17] Denef J., and Loeser F., On some rational generating series occuring in arithmetic geometry. In: *Geometric aspects of Dwork theory*. Vol. I, II. Walter de Gruyter, Berlin. 509–526 (2004).
- [18] Frampton P. H., and Okada Y., p -adic string N -point function. *Phys. Rev. Lett.* 60 (6), 484–486 (1988).
- [19] Freund P. G. O., and Olson M., Non-Archimedean strings. *Phys. Lett. B* 199 (2), 186–190 (1987).
- [20] Freund P. G. O., and Witten E., Adelic string amplitudes. *Phys. Lett. B* 199 (2), 191–194 (1987).
- [21] Gel’fand I. M., and Shilov G.E., *Generalized Functions* vol 1. Academic Press, New York and London (1977).
- [22] Gerasimov A. A., and Shatashvili S. L., On exact tachyon potential in open string field theory. *J. High Energy Phys.* no. 10, Paper 34, 12 pp. (2000).
- [23] Ghoshal D., Noncommutative p -tachyon. *Proc. Steklov Inst. Math.* 245 (2), 83–90 (2004).
- [24] Ghoshal D., p -adic string theories provide lattice discretization to the ordinary string worldsheet. *Phys. Rev. Lett.* 97, 151601 (2006).
- [25] Ghoshal D. and Sen A., Tachyon condensation and brane descent relations in p -adic string theory. *Nucl. Phys. B* 584, 300 (2000).
- [26] Gouvêa F. p -adic numbers: An introduction. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1997. vi+298 pp.

- [27] Halmos P., Measure Theory. D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950. xi+304 pp.
- [28] Hironaka H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203; **79** (1964), 205–326.
- [29] Hlouchek Z. and Spector D., p -adic string theories. Ann. Physics 189 (2), 370–431 (1989).
- [30] Igusa J.-I., Forms of higher degree. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics vol. 59. The Narosa Publishing House, New Delhi (1978).
- [31] Igusa J.-I., A stationary phase formula for p -adic integrals and its applications. Algebraic geometry and its applications (West Lafayette, IN, 1990), 175–194, Springer, New York, 1994.
- [32] Igusa J.-I., On local zeta functions [translation of Sūgaku 46 (1994), no. 1, 23–38]. Selected papers on number theory and algebraic geometry, 1–20, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 172, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [33] Igusa J.-I., An introduction to the theory of local zeta functions. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 2000. xii+232 pp.
- [34] Katok S. p -adic analysis compared with real. Student Mathematical Library, 37. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2007. xiv+152 pp.
- [35] Khrennikov A., Kozyrev S., and Zúñiga-Galindo W. A., Ultrametric Equations and its Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol. 168, Cambridge University Press (2018).
- [36] Kimura T., Introduction to prehomogeneous vector spaces. Translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author. Translations of Mathematical Monographs, 215. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xxii+288 pp.
- [37] Kleinert H., and Schulte-Frohlinde V., Critical Properties of ϕ^4 -Theories. World Scientific, Singapore (2001).
- [38] Koblitz N. p -adic Numbers, p -adic Analysis and Zeta functions, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [39] Lang S., Real and functional analysis. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 142. Springer-Verlag, New York, 1993. xiv+580 pp.

- [40] León-Cardenal E., and Zúñiga-Galindo W. A. An introduction to the theory of local zeta functions from scratch, *Rev. Integr. Temas Mat.* **37** (2019), no. 1, 45–76.
- [41] Lerner È. Y., Feynman integrals of a p -adic argument in a momentum space. I. Convergence. *Theoret. and Math. Phys.* 102 (3), 267–274 (1995).
- [42] Lerner È. Y., Feynman integrals of a p -adic argument in a momentum space. II. Explicit formulas. *Theoret. and Math. Phys.* 104 (3), 1061–1077 (1995).
- [43] Lerner È. Y., and Missarov M. D., p -adic Feynman and string amplitudes. *Comm. Math. Phys.* 121 (1), 35–48 (1989).
- [44] Lin S., Ideal-theoretic strategies for asymptotic approximation of marginal likelihood integrals. *J. Algebr. Stat.* 8, no. 1, 22–55 (2017).
- [45] Loeser F., Fonctions zêta locales d’Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres, et discriminants. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 22 (3), 435–471 (1989).
- [46] Marcolli M., Feynman motives. World Scientific Publishing (2010).
- [47] Mendoza-Martínez M. L., Vallejo J. A., and Zúñiga-Galindo W. A., Acausal quantum theory for non-Archimedean scalar fields. *arXiv:1805.08613*.
- [48] Meuser D., A survey of Igusa’s local zeta function. *Amer. J. Math.* 138, no. 1, 149–179 (2016).
- [49] Nicaise J., An introduction to p -adic and motivic zeta functions and the monodromy conjecture. Algebraic and analytic aspects of zeta functions and L-functions, 141–166, *MSJ Mem.*, 21, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.
- [50] Robert A., A course in p -adic Analysis, Springer-Verlag, 2000.
- [51] Schikhof W. H., Ultrametric calculus: An introduction to p -adic analysis. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 4. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. xii+306 pp.
- [52] Smirnov V. A., Renormalization in p -adic quantum field theory. *Modern Phys. Lett. A* 6 (15), 1421–1427 (1991).
- [53] Smirnov V. A., Calculation of general p -adic Feynman amplitude. *Comm. Math. Phys.* 149 (3), 623–636 (1992).
- [54] Speer E. R., Generalized Feynman amplitudes. *Annals of Mathematics Studies* vol. 62. Princeton University Press (1969).
- [55] Speer E. R., Ultraviolet and infrared singularity structure of generic Feynman amplitudes. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* 23 (1), 1–21 (1975).

- [56] Spokoiny B. L., Quantum Geometry of Non-archimedean Particles and Strings. Phys. Lett. B 208, 401 (1988).
- [57] Taibleson M. H., Fourier analysis on local fields, Princeton University Press, 1975.
- [58] Varadarajan V. S., Reflections on quanta, symmetries, and supersymmetries. Springer, New York (2011).
- [59] Veys W., Arc spaces, motivic integration and stringy invariants. Singularity theory and its applications, 529–572, Adv. Stud. Pure Math., 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
- [60] Vladimirov V. S., Volovich I. V., and Zelenov E. I., p -adic analysis and mathematical physics. Series on Soviet and East European Mathematics 1, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.
- [61] Volovich I. V., p -adic string. Classical Quantum Gravity 4 (4), L83–L87 (1987).
- [62] Watanabe S., Algebraic geometry and statistical learning theory. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 25. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. viii+286 pp.
- [63] Weil A., Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. Acta Math. 113, 1–87 (1965).
- [64] Witten E., The Feynman $i\varepsilon$ in string theory. J. High Energ. Phys. 55 (2015).
- [65] Zúñiga-Galindo W. A., Igusa’s local zeta functions of semiquasihomogeneous polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. 353, 3193–3207 (2001).
- [66] Zúñiga-Galindo W. A., Local zeta functions and Newton polyhedra, Nagoya Math. J. 172 , 31–58 (2003).
- [67] Zúñiga-Galindo W. A., Local zeta function for nondegenerate homogeneous mappings. Pacific J. Math. 218 (1), 187–200 (2005).
- [68] Zúñiga-Galindo W. A., Pseudodifferential equations over non-Archimedean spaces. Lectures Notes in Mathematics vol. 2174. Springer, Cham. (2016).