Tema 4. Topologías finales: identificación y suma topológica

CONSTRUCCIÓN 7.4.1 (Topología imagen directa (Ejemplo 2.1.2(10))). Consideremos $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos. Supongamos que $(X, \mathcal{T}_X)$ es un E.T. Toda topología $\mathcal{T}_Y$ que haga $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua tiene que cumplir que si $V \in \mathcal{T}_Y$, entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$. Por tanto si consideramos

$$f\mathcal{T}_X := \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\},$$

se tiene que $\mathcal{T} \subset f\mathcal{T}_X$. Como además $f\mathcal{T}_X$ es una topología en Y (Ejemplo 2.1.2(10)) entonces hemos probado que $f\mathcal{T}_X$ es *la mayor topología en Y que hace f una aplicación continua*. Esta topología es un ejemplo de topología final y se denomina **topología imagen directa** de f sobre Y.

La topología imagen directa tiene una propiedad universal similar a la topología cociente y que se demuestra de la misma manera.

PROPOSICIÓN 7.4.2. *Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to Y$ una aplicación. Consideramos en Y la topología imagen directa por f. Sea Z un espacio topológico y sea $g : Y \to Z$ una aplicación. Entonces, g es continua si y solo si lo es $g \circ f$.*

La topología imagen directa también se caracteriza mediante cerrados.

PROPOSICIÓN 7.4.3. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces la topología sobre Y es la topología imagen directa por f si y solo si el conjunto de cerrados de Y es $\{C \subset Y \mid f^{-1}(C) \subset X$ es cerrado$\}$.*

DEFINICIÓN 7.4.4. Diremos que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una **identificación** si f es suprayectiva y $\mathcal{T}_Y = f(\mathcal{T}_X)$.

Vamos a ver la relación que hay entre proyecciones en espacios cocientes e identificaciones.

PROPOSICIÓN 7.4.5. *Sea X E.T. y $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en X, entonces la proyección $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ es una identificación.*

Análogamente, se tiene una especie de recíproco de este resultado. Obsérvese que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una identificación, entonces podemos definir la siguiente relación de equivalencia: si $x, y \in X$, entonces $x \overset{\mathcal{R}_f}{\sim} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. En tal caso tenemos el espacio cociente $X/\mathcal{R}_f$ y f factoriza por dicho espacio obteniéndose el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y, \\ & \searrow^{\pi_f} \quad \nearrow_{h} & \\ & X/\mathcal{R}_f & \end{array} \tag{7.1}$$

donde $f = h \circ \pi_f$.

PROPOSICIÓN 7.4.6. *La aplicación $h : X/\mathcal{R}_f \to Y$ descrita en* (7.1) *es un homeomorfismo.*

Por tanto, toda identificación puede verse como la proyección sobre una topología cociente y toda proyección cociente es una identificación.

PROPIEDADES 7.4.7 (Identificaciones). Consideremos $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : Y \to Z$ aplicaciones continuas:

(1) Si f_1 y f_2 son identificaciones, entonces $f_2 \circ f_1$ es una identificación.
(2) Si la composición $f_2 \circ f_1$ es una identificación, entonces f_2 es identificación.
(3) Si f_1 es una identificación entonces $f_2 \circ f_1$ es identificación si y sólo si f_2 es identificación.
(4) Una aplicación continua, sobreyectiva y abierta (o cerrada) es una identificación.
(5) Si f es una aplicación biyectiva, entonces es identificación si y sólo si es homeomorfismo.

EJERCICIO 7.30. ♠ *Sean X, Y* E.T. *, $f : X \to Y$ identificación. Sean $B \subset Y$, $A := f^{-1}(B) \subset X$ y $\tilde{f} : A \to B$ la aplicación inducida por f. Demostrar que si B es abierto (resp. cerrado) entonces $\tilde{f}$ es identificación.*

EJERCICIO 7.31. ♠ *Demuestra que si X es T_1, T_2, normal o regular, sus cocientes no tienen porqué serlo*

Terminamos este Tema con otro ejemplo importante de topología final.

CONSTRUCCIÓN 7.4.8. La **suma topológica** de una familia de espacios topológicos se define como sigue. Consideremos una familia $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ de E.T. y el conjunto suma $X := \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\} \times X_\lambda)$. Para todo $\lambda \in \Lambda$ tomemos la aplicación

$$j_\lambda : X_\lambda \to \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \qquad j_\lambda(x_\lambda) := (\lambda, x_\lambda). \tag{7.2}$$

La topología suma se define como

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \mid j_\lambda^{-1}(U) \text{ abierto } \forall\lambda \in \Lambda\}.$$

Es fácil ver que se cumplen las condiciones (T1-3). Si todos los espacios X_λ son iguales a X, denotaremos esta suma $\sum_\Lambda X$.

PROPIEDADES 7.4.9. Sea $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ de E.T. y el conjunto suma $X := \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\{\lambda\} \times X_\lambda)$ con la topología suma. Sea $j_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X$ la inclusión.

(1) $C \subset X$ es cerrado si y solo si $j_\lambda^{-1}(C)$ es cerrado en X_λ.
(2) j_λ es un homeomorfismo sobre la imagen y esta es a su vez abierta y cerrada en X.
(3) Sea $f : X \to Z$ aplicación, Z espacio topológico. Entonces f es continua si y solo si $j_\lambda \circ f$ es continua $\forall \lambda \in \Lambda$.

Observación 7.4.10. Debido a la Propiedad 7.4.9(2), si no hay lugar a confusión identificaremos X_λ con su imagen; con esta identificación, se trata de un abierto-cerrado de X. Además, la Propiedad 7.4.9(3) se interpreta reemplazando $j_\lambda \circ f$ por $f_{|X_\lambda}$. Obsérvese que si $A \subset X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, entonces $A = \sum_{\lambda\in\Lambda} j_\lambda^{-1}(A)$. Por lo tanto, denotando $A_\lambda = j_\lambda^{-1}(A)$ podemos considerar que todo subconjunto de X es de la forma $\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Observemos que las inclusiones (o las aplicaciones j_λ) son aplicaciones continuas cerradas y abiertas ya que la definición (o la Propiedad 7.4.9(1)) se traducen en que A es abierto (resp. cerrado) si y solo si A_λ lo es en X_λ.

Ejercicio 7.32. ♠ *Demuestra que si* $A = \sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *entonces* $\overline{A} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \overline{A}_\lambda$.

Observación 7.4.11. Se pueden probar de manera análoga resultados similares para el interior, exterior, puntos aislados y conjunto derivado de A.

Ejercicio 7.33. ♠ *Considera* $\mathcal{B}_\lambda$ *base de abiertos de* X_λ. *Demuestra que*

$$\mathcal{B}_\Sigma := \{\{\lambda\} \times B_\lambda \mid B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda\}$$

es una base de abiertos de $X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Ejercicio 7.34. ♠ *Sea* $x \in X_{\lambda_0}$ *para cierto* $\lambda_0 \in \Lambda$ *y* $\mathcal{B}^x$ *base de entornos de* x *en* X_{λ_0}. *Demuestra que*

$$\mathcal{B}^{(x,\lambda_0)} := \{\{\lambda_0\} \times B \mid B \in \mathcal{B}^x\}$$

es base de entornos para $(\lambda_0, x) \in X = \sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.